

상태관측기를 이용한 도립진자 시스템의 제어

이윤형* · 안종갑** · 진강규*** · 소명옥†

(원고접수일 : 2007년 3월 2일, 심사완료일 : 2007년 5월 13일)

Control of Inverted Pendulum Systems Using a State Observer

Yun-Hyung Lee* · Jong-Kap Ahn** · Gang-Gyoo Jin*** · Myung-Ok So†

Abstract : The design and synthesis of a state feedback controller assumes the feedback of all state variables of the system. However, some state variables are not physical quantities so that sensors may not be available, or may be too expensive to measure. Hence, a state observer can be an alternative to estimate unmeasurable state variables. This paper therefore presents a scheme for state observer-based stabilization control of inverted pendulum systems. The feedback gain matrices of both the state feedback controller and the state observer are tuned by real-coded genetic algorithms(RCGAs) such that the given performance indices are minimized. The proposed method is demonstrated through simulations.

Key words : Inverted pendulum(도립진자), PI-type State feedback control(비례적분형 상태 채환 제어), Reduced-order observer(축소차수 관측기), RCGA(실수코딩 유전알고리즘)

1. 서 론

불안정한 시스템으로 대표되는 도립진자 시스템은 1965년 Kapitza가 로켓의 발사대를 안정화시킬 목적으로 설계, 제작한 이후 현재까지 많은 연구가 있었다. Schaefer와 Cannon는 Bang-Bang 제어기를 설계하였고^[1], 최근에는 다양한 제어기법이 적용될 수 있는 현대제어 이론을 이용한 연구들이 발표되었다^{[2],[3]}.

현대 제어에 있어 상태케환 제어는 상당히 커다란 비중을 차지하고 있다. 그러나 상태케환 제어기를

사용하기 위해서는 시스템의 모든 상태 변수가 측정 가능해야 한다는 전제를 가지고 있다. 이를 위해서는 상태 변수를 측정하기 위한 센서들이 필요하게 되고, 센서에서 출력되는 신호를 제어기로 전송해야하는 장치도 필요하다.

그러나 이를 위해서는 적지 않는 비용이 발생하게 되고, 때로는 시스템의 특성상 센서를 설치하기 어려운 경우도 있고, 물리적으로 측정 불가능한 상태 변수도 존재할 수 있다. 이는 상태케환 제어기를 실제 시스템에 적용하지 못하는 경우가 발생할 수 있다는 것을 의미하고, 따라서 이를 극복하기 위한 현

* 교신저자(한국해양대학교 선박전자기계공학부), E-mail: smo@hhu.ac.kr, Tel : 051)410-4248

* 한국해양대학교 대학원 메카트로닉스공학과

** 한국항만연수원

*** 한국해양대학교 IT공학부

실적이고 경제적인 방법이 필요하다.

이에 대한 해결책으로 상태관측기를 고려해 볼 수 있다. 상태관측기는 전차수 상태관측기(Full-order observer)와 축소차수 상태관측기(Reduced-order observer)로 구분할 수 있는데 전자는 측정하는 상태를 포함한 모든 상태를 추정할 경우, 후자는 상태 변수 중 측정하는 상태를 제외한 나머지 상태만 추정하는 경우에 해당한다. 따라서 축소차수 상태관측기를 사용할 경우 측정이 가능한 변수는 곧바로 사용하면 된다.

따라서 본 논문에서는 축소차수 관측기와 적분형 상태궤환 제어기를 결합함으로서 도립진자 시스템의 출력인 대차의 위치가 기준입력에 잘 추종하고, 동시에 막대의 각도도 안정되도록 하는 문제를 다루기로 한다.

축소차수 관측기의 이득행렬과 상태궤환 이득행렬은 실수코딩유전알고리즘을 통해 각각 최적으로 탐색한다. 시뮬레이션을 통해 선형모델에서 설계된 관측기와 적분형 상태궤환 제어기를 비선형 모델에 적용함으로서 그 유효성을 살펴본다.

2. 도립진자 시스템

2.1 수학적 모델

도립진자 시스템의 운동방정식은 몇 가지 방법으로 유도해낼 수 있으나, 본 논문에서는 기존의 문헌^[3]에 나타난 모델을 이용한다. 이 모델에는 대차를 이동시키기 위한 구동 모터도 같이 고려되어 있다.

$$\begin{aligned}\ddot{x}_c(t) &= \frac{M_p^2 \ell_p^2 g}{M_c I_p + M_p I_p + M_c M_p \ell_p^2} \alpha(t) \\ &- \frac{(I_p K_g^2 K_t K_m + \ell_p B_{eq} R_m r_{mp}^2)}{R_m r_{mp}^2 (M_c I_p + M_p I_p + M_c M_p \ell_p^2)} \dot{x}_c(t) \\ &- \frac{(M_p \ell_p^2 K_g^2 K_t K_m + M_p \ell_p^2 B_{eq} R_m r_{mp}^2)}{R_m r_{mp}^2 (M_c I_p + M_p I_p + M_c M_p \ell_p^2)} x_c(t) \\ &- \frac{M_p \ell_p B_p}{M_c I_p + M_p I_p + M_c M_p \ell_p^2} \dot{\alpha}(t)\end{aligned}$$

$$+ \frac{K_g K_t (I_p + M_p \ell_p^2)}{r_{mp} R_m (M_c I_p + M_p I_p + M_c M_p \ell_p^2)} u(t) \quad (1a)$$

$$\begin{aligned}\ddot{\alpha}(t) &= \frac{M_p g \ell_p (M_c + M_p)}{M_c I_p + M_p I_p + M_c M_p \ell_p^2} \alpha(t) \\ &- \frac{M_p \ell_p (K_g^2 K_t K_m + B_{eq} R_m r_{mp}^2)}{R_m r_{mp}^2 (M_c I_p + M_p I_p + M_c M_p \ell_p^2)} \dot{x}_c(t) \\ &- \frac{B_p (M_c + M_p)}{M_c I_p + M_p I_p + M_c M_p \ell_p^2} \dot{\alpha}(t) \\ &+ \frac{K_g K_t M_p \ell_p}{R_m r_{mp}^2 (M_c I_p + M_p I_p + M_c M_p \ell_p^2)} u(t) \quad (1b)\end{aligned}$$

여기서 x_c 와 α 는 각각 대차의 위치[m]와 진자의 각도[rad]이고, M_c 와 M_p 는 대차와 막대의 질량[kg], I_p 는 막대의 관성모멘트, ℓ_p 는 막대 중심까지의 거리[m]이다. u 는 구동모터에 인가되는 전압[V], K_t 와 K_m 은 각각 모터의 토크상수[V/rad/s]와 역기전력상수, R_m 은 모터의 전기자 저항[Ω], r_{mp} 은 모터의 피니언 반지름[m], g 는 중력가속도를 의미한다.

2.2 시스템의 상태공간 표현

(1)에서 상태변수를 $x_1 = x_c$, $x_2 = \alpha$, $x_3 = \dot{x}_c$, $x_4 = \dot{\alpha}$ 로 정의하면 다음 상태방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A x(t) + B u(t) \\ y(t) &= C x(t)\end{aligned} \quad (2)$$

여기서 $x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T \in \mathbb{R}^4$ 와 $y \in \mathbb{R}^2$ 는 각각 도립진자 시스템의 상태벡터와 출력벡터를 의미하며, $u \in \mathbb{R}$ 는 제어입력을 의미한다. 본 연구에서는 Quanser사의 Model IP02^[4]를 제어대상으로 간주하므로 행렬 A, B, C는 다음과 같게 된다.

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2.264 & -15.886 & -0.007 \\ 0 & 27.820 & -36.604 & 0.089 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2.277 \\ 5.247 \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3)$$

(2), (3)으로 표시되는 시스템은 각각 행렬의 쌍(A, B)과 (A, C)로부터 구해지는 가제어 행렬과 가관측 행렬의 랭크가 모두 4가 되어 가제어이고 가관측이다.

3. PI형 상태 케환 제어기 설계

본 연구의 목적은 계단상의 외란이 존재하는 환경에서도 도립진자 시스템의 출력이 계단상의 설정치를 정상상태 오차 없이 잘 추종하는 제어기를 설계하는 것이므로 다음과 같은 새로운 상태변수 z 를 정의한다.

$$z(t) = \int [y_1(t) - y_r(t)]dt \quad (4)$$

여기서 $y_1 = x_1$ 를, y_r 은 설정치를 의미한다.

(2)와 (4)를 결합하여 확장 시스템으로 표시하면 (5)와 같고, 역시 가제어하다.

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}u(t) + d y_r(t) \quad (5)$$

$$y(t) = \tilde{C}\tilde{x}(t)$$

$$\text{여기서 } \tilde{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix}, \tilde{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, \tilde{C} = [C \quad 0] \\ \tilde{x} = \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}, d = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(6)과 같은 제어입력을 선택하면

$$\begin{aligned} u(t) &= -\tilde{K}\tilde{x}(t) \\ &= -K_1x(t) + k_2 \int_0^t (y_r(\tau) - y_1(\tau))d\tau \end{aligned} \quad (6)$$

여기서 $\tilde{K} = [K_1 \quad k_2]$ 이다.

전체 피드백 시스템의 안정성과 응답성능은 행렬 $(\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{K})$ 의 고유치에 의해 결정되므로, 이 고유치가 모두 부의 실수부를 가지면서 다음 2차형식의 평가함수를 최소로 하는 \tilde{K} 를 선택하도록 한다.

$$J_c = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} [\tilde{x}(t)^T \tilde{Q} \tilde{x}(t) + u(t)^T \tilde{r} u(t)] dt \quad (7)$$

여기서 적분 최종시간 t_f 는 이후 적분값을 무시할 정도의 충분히 큰 시간이고, \tilde{Q} 는 양의 반한정(Positive semidefinite) 하중행렬이고, \tilde{r} 은 양의 계수로서 시스템의 성능을 결정짓는 중요한 요소로서 적절한 선택이 필요하다.

본 연구에서는 Fig. 1과 같이 실수코딩 유전알고리즘(RCGA)을 이용하여 이득행렬 K_1 과 이득 k_2 를 탐색한다.

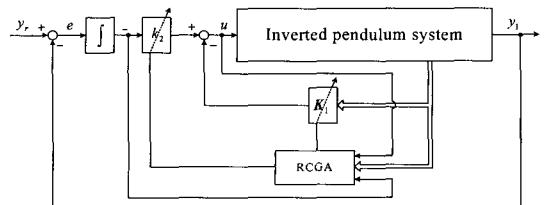


Fig. 1 Optimization of the state feedback gain matrix using RCGA

RCGA^[5]의 기본 유전 연산자로 구배와 유사한 재생산, 수정된 단순교배, 동적돌연변이를 사용하였고, 엘리티즘과 선형스케일링 전략을 사용하였다.

4. 축소차수 관측기 설계

(7)로 표시되는 상태제어기의 구현은 모든 상태의 피드백을 필요로 한다. 도립진자 시스템의 경우 대차의 위치와 진자의 각도는 엔코더(Encoder)를 사용하면 쉽게 측정이 가능하지만 속도(\dot{x}_c)와 각속도($\ddot{\alpha}$)를 위해 센서를 설치하면 장치가 복잡해지고 비용이 많이 들므로 측정 신호로부터 추정해서 사용하는 것이 경제적일 수 있다. 본 연구에서는 신호

대 잡음비가 감소되지 않도록 위치와 각도 신호를 각각 미분하여 사용하는 것을 피하고 루엔버그 (Luenberg)형의 축소차수 관측기를 설계하여 사용하도록 한다.

먼저 상태벡터 $x(t)$ 를 측정 가능한 상태 $x_a(t)$ 와 추정하는 상태 $x_b(t)$ 로

$$x(t) = [x_a^T(t) \quad x_b^T(t)]^T \quad (8)$$

구분하고, 또 (2)의 상태방정식에서 A, B를 다음과 같이 표현하면

$$A = \begin{bmatrix} A_{aa} & A_{ab} \\ A_{ba} & A_{bb} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_a \\ B_b \end{bmatrix} \quad (9)$$

(10)의 축소차수 상태관측기 방정식을 얻는다.

$$\dot{x}_o(t) = (A_{bb} - LA_{ab})x_o(t) + A_{ba}y(t) + B_bu(t) + L[y(t) - A_{aa}y(t) - B_au(t)] \quad (10)$$

여기서 L은 축소차수 관측기의 이득행렬이다. (10)에서 보면 $x_o(t)$ 를 추정하기 위해서는 $y(t)$ 의 미분치 $\dot{y}(t)$ 를 필요로 한다. $\dot{y}(t)$ 를 직접 사용하면 잡음의 영향이 커질 수 있어 바람직하지 않으므로 x_c 로 표시되는 새로운 변수를 정의하고

$$x_c(t) = x_o(t) - Ly(t) \quad (11)$$

(12)에 대입하여 정리하면 다음과 같이 된다.

$$\dot{x}_c(t) = (A_{bb} - LA_{ab})x_c(t) + (B_b - LB_a)u(t) + (A_{ba} - LA_{aa} + A_{bb}L - LA_{ab}L)y(t) \quad (12)$$

그러면 최종적으로 추정된 변수는 다음과 같이 구해진다.

$$x_o(t) = x_c(t) + Ly(t) \quad (13)$$

한편 추정 오차벡터 $e_o(t) = x_b(t) - x_o(t)$ 라 하면

$$\dot{e}_o(t) = (A_{bb} - LA_{ab})e(t) \quad (14)$$

이므로 그 동특성은 $(A_{bb} - LA_{ab})$ 의 고유치가 복소

평면의 좌반에 위치하도록 L을 선정하면 오차벡터는 0에 수렴하게 된다. 본 연구에서는 L은 다음 목적함수 값이 최소가 되도록 선정된다.

$$J_o = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \| e(t) \| dt \quad (15)$$

Fig. 2는 RCGA를 이용한 관측기 이득행렬 탐색 기법의 개념도이다. 앞 절에서 사용된 RCGA의 탐색 기법을 다시 사용한다. 그러나 도립진자 시스템과 같이 불안정한 시스템에는 임의의 입력 u를 인가할 수 없기 때문에 본 연구에서는 피드백 제어를 통해 시스템을 안정화한 상태에서 축소차수 관측기 이득을 탐색하였다.

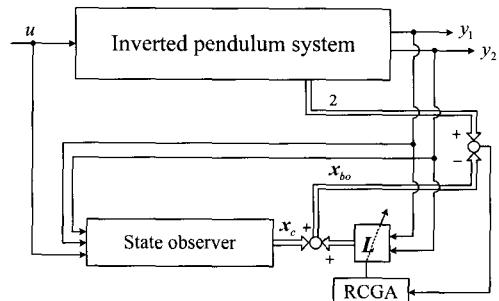


Fig. 2 Optimization of the state observer gain matrix using RCGA

5. 시뮬레이션

5.1 RCGA를 이용한 \tilde{K} 와 L의 탐색

두 최적화 문제를 푸는데 사용된 RCGA의 제어 변수로는 집단의 수 20, 재생산 계수 1.8, 교배 확률 0.9, 돌연변이 확률 0.1이 사용되었다. 상태 궤환 제어기의 이득행렬을 찾는 문제에서는 $\tilde{Q} = \text{diag}(4, 4, 0, 0, 8)$, $\tilde{r} = 0.02$ 이 선택되었고, t_f 는 30초로 하였다. 탐색 결과 다음 값을 얻었다.

$$\tilde{K} = [-79.92 \ 100.02 \ -39.97 \ 20.00 \ -87.90] \quad (16)$$

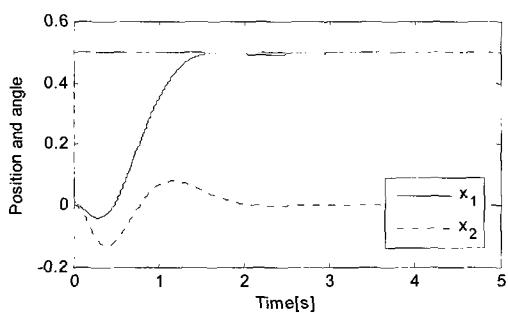
Separation theory에 의해 상태관측기 이득행렬 L은 상태궤환 제어기의 이득행렬 \tilde{K} 와는 독립적으

로 탐색될 수 있으므로, 또 다른 RCGA를 사용하여 상태관측기 이득행렬 L 을 탐색한다. 이때 축소 차수 상태관측기의 초기값은 모두 0으로 하였다. 앞에서 잠시 언급하였듯이 L 은 도립진자 시스템의 안정화 제어 하에서 탐색되었고, 앞서 구한 상태케환 이득행렬을 사용한다. t_f 는 상태케환 이득행렬을 탐색할 때와 동일한 30초로 하였다. 시뮬레이션 결과 다음과 같은 결과를 얻었다.

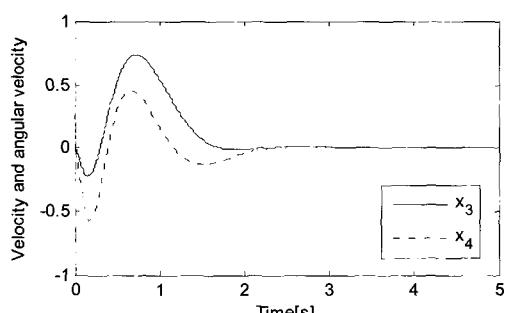
$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0.107 \\ 0 & 4.843 \end{bmatrix} \quad (17)$$

5.2 응답

Fig. 4는 축소차수 상태관측기 기반의 시스템 응답을 나타낸다. 이는 제어대상과 축소차수 상태관측기의 초기값이 모두 0인 경우로서, 출력이 정상 상태 오차 없이 설정치에 잘 추종하고 있다.

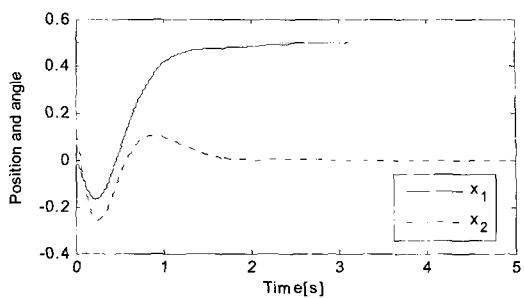


(a) Cart position and pole angle

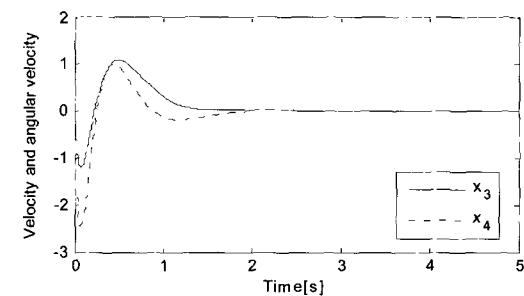


(b) Velocity and angular velocity

Fig. 4 Step responses of the observer-based system when $x(0)=[0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ and $x_o(0)=[0 \ 0]^T$

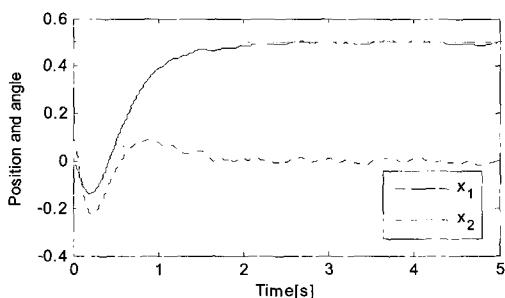


(a) Cart position and pole angle

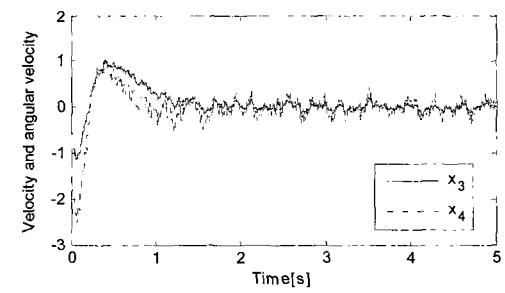


(b) Velocity and angular velocity

Fig. 5 Step responses of the observer-based system when $x(0)=[0 \ 0.1 \ 0 \ 0.2]^T$ and $x_o(0)=[0 \ 0]^T$



(a) Cart position and pole angle



(b) Velocity and angular velocity

Fig. 6 Responses of the observer-based system when $x(0)=[0 \ 0.1 \ 0 \ 0]^T$ and $x_o(0)=[0 \ 0]^T$

다음으로 제어대상이 임의의 초기값에서도 상태 관측기 기반의 제어가 잘 이루어지는지 검토한다. Fig. 5는 막대의 초기 각도가 $0.1[\text{rad}]$, 초기 각속도가 $0.2[\text{rad}/\text{s}]$ 일 때의 응답결과이다. 정상상태 오차 없이 빠른 시간에 설정치에 도달하는 것을 확인할 수 있다.

측정잡음을 고려한 시뮬레이션에서는 측정잡음은 $N(0, 0.02^2)$ 인 백색잡음(White noise)으로 간주하고, 정규난수 발생기를 사용하여 발생하였다. Fig. 6에서 볼 수 있듯이 잡음의 영향이 약간 나타나고 있지만 대차와 막대의 각도가 동시에 제어되고 있음을 볼 수 있다.

6. 결 론

본 연구에서는 비례적분형 상태 궤환 제어기와 축 소차수 관측기를 이용하여 불안정한 시스템인 도립진자 시스템을 안정화하는 문제를 다루었다. 이때 필요한 상태 궤환 이득행렬과 관측기 이득행렬은 RCGA를 사용하여 탐색하여 사용하였다. 시뮬레이션을 통해 도립진자 시스템의 안정화 제어가 가능함을 확인할 수 있었다.

참고문헌

- [1] R. H. Cannon, J. F. Schaefer, "On the Control of Unstable Mechanical System", Proc. of 3rd Congress of the I.F.A.C., Paper 6C1, London, England, 1966.
- [2] Q. Feng and K. Yamafuji, "Design and Simulation of Control Systems of an Inverted Pendulum," Robotica, Vol.6, pp.235-241, 1987.
- [3] 안종갑, 이윤형, 유희한, 소명옥, 진강규, "RCGA를 이용한 도립진자 시스템의 파라미터 추정 및 안정화 제어", 한국마린엔지니어링학회지, Vol. 30, No.6, 2006.
- [4] QUANSER User Manual, Linear Motion Servo Plants : IP01 and IP02, Single Inverted Pendulum.
- [5] 진강규, 유전알고리즘과 그 응용, 교우사, 2002.

저 자 소 개



이윤형(李潤炯)

2002년 한국해양대학교 기관시스템공학부(공학사). 2004년 한국해양대학교 대학원 기관시스템공학과(석사). 현재 한국해양대학교 대학원 메카트로닉스 공학과 박사과정. 관심분야 : 제어이론, 유전알고리즘 응용



안종갑(安鍾甲)

2000년 한국해양대학교 기관시스템공학부(공학사). 2006년 한국해양대학교 대학원 메카트로닉스공학과(석사) 2006~동대학원 메카트로닉스 공학과 박사과정. 현재 한국항만연수원 부교수 관심분야 : 제어이론, 유전알고리즘 응용



진강규(陳康奎)

1977년 한국해양대학교 기관학과(학사). 1985년 Florida Institute of Technology, 전기·전자·컴퓨터공학과(석사). 1996년 University of Wales Cardiff, 전기·전자·시스템공학과 박사. 현재 한국해양대학교 IT 공학부 교수. 관심분야 : 유전알고리즘, 퍼지제어



소명옥(蘇明玉)

1980년 한국해양대학교 기관학과(학사). 1989년 한국해양대학교 대학원 기관학과 석사. 1997년 동 대학원 박사. 한국항만·운송노동연구원 연구위원. 2005~2006년 University of Wales Cardiff 파견교수. 현재 한국해양대학교 선박전자기계공학부 교수. 관심분야 : 퍼지제어, 최적제어