韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 21집 제 2호, 2007. 5. 125-152

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 21, No. 2, May. 2007. 125-152

문제풀이의 오류, 결점, 모순을 이용한 대학수학 학습지도

김 병 무 (충주대학교)

대학수학 학습지도에서 문제풀이가 잘못된 경우를 9개 영역으로 분류하고 각 영역마다 잘못이 일어나는 과정에 대한 세부 문항과 내용을 제시하고 오류를 지적해보도록 유도하며 올바른 문제풀이에 이르는 길을 확인하는 기회를 갖도록 한다. 이들 학습자료가 주는 중요한 의미를 여덟 가지로 요약하여 대학수학의 이해에 도움을 주고 대학수학 학습의 동기부여와 흥미를 느끼도록 안내하며 잘못된 풀이나 실수의 확인이 중요함을 일깨우고 분석하게 하여 깊이 있고 여유로운 수학학습을 생각할 기회를 제공한다.

I. 서 론

문제풀이의 과정이나 결과에서 잘못 푼 경우, 실수나 바른 풀이가 아닐 수 있고 과정에서 오류 일 수도 있다. 그 이유를 밝혀내는 것은 푼 학생이나 지도하는 교수의 입장에서도 어려운 일이다. 그러나 정답에 이르는 과정에서 또는 결과에서 어긋나는 이유를 알아낼 수 있다면 그것은 학습지도에 도움이 될 것이다. 다시는 잘못된 풀이를 되풀이하지 않도록 유념할 부분을 확인시키고 바르게 풀도록 안내하는 길을 쉽게 찾아 도움을 줄 수 있다.

여기서는 잘못된 풀이의 다양한 예를 주제별로 찾아 그 이유를 체계적으로 알아본다. 실수를 분석하는 문제들은 학생을 지도하면서, 숙제에서, 시험에서, 문헌에서 얻을 수 있는 학생들의 잘못된 풀이에서 얻은 자료이다. 이들 자료 중에는 우리를 놀라게 하고 깊이 생각하게 하는 흥미있는 실수도 있고 어떤 실수들은 어이없을 수도 있다. 어떤 것은 잘못된 이유가 명백할 수도 있으나 어떤 것은 애매할 수도 있다. 방법이 어이없더라도 왜 그것이 그렇게 작용했는가 그 이유를 아는 것은 학습지도에 새로운 아이디어를 줄 수 있다. 예를 들면 미분방정식을 다룰 때 적분에서 잘못한 실수를 이용할 수 있다. 1학기 때 일어난 실수는 2학기에 새로운 학습상황에 이용될 수 있고 또 새로운 학기에 학습지도에 이용할 수도 있다.

건설적인 방법으로 학생들의 실수로부터 문제를 분석하는 것은 여러 가지 다양한 접근을 시도하려는 기회를 줄뿐만 아니라 창조하는 기쁨도 줄 수 있다. 어떤 오류나 큰 실수를 되돌리는데 오랜 시간이 걸린다. 그리고 본래의 것으로 돌아가는 것은 흥미 있는 일이다. 잘못의 근원을 정확히 알아

* 2006년도 충주대학교 교내 학술연구조성비에 의한 논문임
* ZDM 분류 : D75
* MSC2000분류 : 97D70
* 주제어 : 문제풀이의 오류와 실수, 대학수학 학습지도

내어 바로잡는 것이 수업에 상당히 유용할 것이다. 대학수학에서 실수를 이용한 학습지도(김병무, 2005)에서는 실수가 자주 일어나는 구체적인 예제를 통해 잘못을 지적하고 바른 답을 제시하는 한편 잘못 풀이된 문제를 제시하여 학생들의 반응을 알아보고 학생들의 수학개념 이해를 증진시키는 데 도움이 됨을 인정하였다.

여기서는 구체적인 내용을 더 많이 제시하고 해설하며 다양하게 수학학습 지도에 도움을 주는 오류나 잘못이 일어난 경우를 1) 풀이 방법에 따라 답이 모두 나타나지 않는 경우, 2) 공식을 잘못 적용한 경우, 3) 정의역을 무시하여 틀린 답이 나오는 경우, 4) 역설이 나타나는 경우, 5) 정의역의 잘못 적용으로 정적분의 값이 다른 경우, 6) 부정적분에서 불일치가 일어나는 경우, 7) 급수의 재배열에 따라 오류가 나타날 수 있는 경우, 8) 정상적인 풀이가 아니지만 정답에 이른 경우, 9) 이중적분에서 잘못이 나타날 수 있는 경우로 나누어 예를 분류하였다. 이는 편의상 그룹 짓기 위한 분류이고 더 세분할 수도 있고, 내용적으로 더 유사한 것끼리 모을 수도, 수준별로 묶을 수도 있으며 여기서 분류한 것이 유일한 방법은 아니다. 학습지도 상황의 특성에 따라 취사선택하고 분류하여 이용하는 것이 도움을 줄 것이다.

학생들이 경험적으로 잘못된 문제풀이나 실수한 시험문제와 특별히 오류를 유발하는 예제를 통해 그 이유를 찾아보게 하고 확인하는 과정을 통해 확실한 수학적 이론을 이해하고 적용하는 훈련을 하여 수학능력을 키우게 하는 기회를 제공하고 또 수학에 대한 관심과 흥미를 불러일으키기 위해 이런 작업의 도움을 받도록 한다. 한번 저지른 실수는 그것이 바르게 지도 받게 되면 문제의 내용을 보다 확실히 깨닫고 다음에 유사한 문제풀이나 적용에 도움을 주고 또 다른 실수를 유발하지 않게 하며 실수를 통해 새로운 창조를 하는 기쁨도 느끼게 될 것이다.

II. 본 론

잘못 풀이된 예제나 내용이 paradox, 주제별, 잘못된 질문, 실수를 유발하는 경우를 9가지로 분류하고 작은 제목을 정하여 구체적인 문제로 제시하고 그 이유를 찾아보고 올바른 정답도 필요하면 알아본다. 잘못 그 자체로 끝나는 것이 아니라 그 이유를 찾아 분석하여 또 다른 공식이나 개념, 풀이 방법을 여분으로 얻을 수 있다. 일반적인 방법은 아니지만 특별한 경우에만 해당되는 방법으로 또 다른 세계를 경험하게 된다. 제일 중요한 것은 이들을 유용한 학습자료로 활용하도록 학습현장에 맞게 적절한 시간에 제시하는 것이다. 문제풀이 과정에서 일어난 오류, 잘못, 실수가 학습지도에 많은 도움을 주었고 긍정적인 결과로 이끌었다는 선행연구(J. L. Walsh, 1927/ K. W. Miller, 1968/ Lousie S. Grinstein, 1974/ Ed Barbeau, 1989-2005/ Herb Silverman, 1990/ George B. Thomas, Jr. & Ross L. Finney, 1992/ Peter Hilton, 1993/ Berezina M. & Berman A., 2000/ Abramovit B., Berezina M. and Berman A., 2002/ Buma Abramovitz & Miryam Berezina, 2003)의 많은 예제들과 수업 현장에서 얻은 예제들이 참고되었다.

1. 풀이 방법에 따라 답이 모두 나타나지 않는 경우

1) 도형문제(이중근에 의한 접점 찾기)에서 식에 의한 풀이가 모든 답을 구하지 못한 경우

도함수를 이용하지 않고 대수방정식 $f(x, y)=0$과 $g(x, y)=0$인 두 곡선의 접점을 조사하는 한 방법은 변수중 하나를 제거하고 다른 변수로 주어진 방정식이 이중근을 갖는 것을 조사하는 것이다. 간단한 예로 $y=x^2$과 $y=2x-1$에서 $x^2=2x-1$이 중근을 가지므로 점 (1, 1)이 접점이다. 이와 같은 과정이 함정을 갖는 것을 다음 문제의 풀이에서 알아보면, 방정식 $y=x^2+3$과 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{k}=1$로 주어지는 곡선이 접하게 되는 k의 모든 값을 구할 때, x를 소거하여 $4y^2+ky-7k=0$에서 두 곡선이 접한다면 이차방정식은 중근을 가져야만 한다. 판별식 $k^2+112k=0$에서 $k=0$ 또는 $k=-112$이고 $k\neq 0$이므로 $k=-112$이다. 그림을 그려 확인하면 $k=9$도 답이 됨을 알 수 있다. 왜 이중근에 의한 풀이에서 접점이 나타나지 않았는가에 대한 이유를 y를 소거한 방정식 $4x^4+(24+k)x^2+(36-4k)=0$을 찾을 수 있다. 미분을 이용하면 $k=9$, $k=-112$가 답임을 쉽게 확인 할 수 있다.

2) 사라진 해?

실수와 그 세제곱 사이에는 일대일대응 관계가 있다. 실변수 x, y의 다음 방정식은 모두 동치이다.

$$(x+y)^{\frac{1}{3}}+(x-y)^{\frac{1}{3}}=1,\ 2x+3(x^2-y^2)^{\frac{1}{3}}=[(x+y)^{\frac{1}{3}}+(x-y)^{\frac{1}{3}}]^3=1,$$

$$x^2-y^2=(\frac{1-2x}{3})^3,\ y^2=x^2-(\frac{1-2x}{3})^3$$

$x=-1$일 때, 마지막 방정식에서 $y=0$을 얻는다. x와 y의 이들 값은 처음 방정식을 만족하지 않는다. 그 이유는 $\sqrt[3]{-1}=-1$, $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$을 생각해야 한다. 다음 풀이에서 단서를 찾을 수 있다.$(x+y)^{\frac{1}{3}}=a$, $(x-y)^{\frac{1}{3}}=b$을 하면 $a+b=1$이다. 이식을 세제곱하면 $a^3+3ab(a+b)+b^3=1$이다. $a+b=1$이므로$a^3+3ab+b^3=1$이다. 이 단계는 역이 성립하지 않는다. 실제로$a^3+3ab+b^3=1$에서,

$$0=a^3+3ab+b^3-1=(a+b-1)(a^2-ab+b^2+a+b+1)$$

$$=\frac{1}{2}(a+b-1)[(a+1)^2+(b+1)^2+(a-b)^2]$$

이고, 이 식에서 $a+b=1$ 또는 $(a, b)=(-1,-1)$이다. 이 값은 $(x, y)=(-1, 0)$에 대응한다.

3) 지수방정식의 풀이 무엇이 잘못인가?

실수 x에 대해 $3^x \cdot 8^{\frac{x}{x+2}}=6$을 푸는데 분명한 해는 1이다. 왜냐하면 $f(x)=3^x 8^{\frac{x}{x+2}}$라면 $f'(x)=3^x 8^{\frac{x}{x+2}}[\log 3+(6\log 2)(x+2)^{-2}]>0$이다.

따라서, $f(x)$는 증가함수이다. $f(x)=6$은 단 하나의 해를 갖는다.

그런데 $x=-2\log_3 6$일 때, $3^x=6^{-2}$이고,

$\frac{x}{x+2}=\frac{-2\log_3 6}{-2\log_3 6+2}=\frac{\log_3 6}{\log_3 6-1}=\frac{\log_3 6}{\log_3 2}=\log_2 6$에서 $8^{\frac{x}{x+2}}=6^3$이다.

따라서, $x=-2\log_3 6$은 방정식을 만족한다.

2. 공식을 잘못 적용한 경우

1) 도형의 넓이를 구하는데 극좌표에 의한 넓이 구하는 공식을 잘못 적용한 예

매개변수방정식 $x=4\cos\theta, y=3\sin\theta$를 갖는 타원의 넓이는 12π이다.

그러나 극좌표에서 넓이에 대한 공식 $\int \frac{1}{2}r^2(\theta)d\theta$를 이용하면

$\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(4^2\cos^2\theta+3^2\sin^2\theta)d\theta=\frac{25\pi}{2}$이다. 극좌표에 의한 넓이 구하는 공식을 이용하면 안되는 이유는 $x=4\cos\theta$, $y=3\sin\theta$에서 θ는 극좌표의 각이 아니다. 왜냐하면 $\frac{y}{x}=\frac{3}{4}tan\theta$인데 극좌표에서 $\frac{y}{x}=\tan\theta$이기 때문이다.

2) Cauchy-Schwartz의 부등식 적용?

a, b, c가 $a^2+b^2+c^2=1$인 실수이면 $ab+bc+ca$의 값의 범위는 Cauchy-Schwartz의 부등식에 의해 $1=(a^2+b^2+c^2)(c^2+a^2+b^2)\geqq(ab+bc+ca)^2$에서 $-1\leqq ab+bc+ca\leqq 1$이다. 그런데 $(a+b+c)^2\geqq 0$이므로 $1+2(ab+bc+ca)\geqq 0$.

따라서, $ab+bc+ca\geqq-\frac{1}{2}$이다. 무엇이 잘못인가?

3) 점근선의 변칙적인 예

방정식 $y=\frac{x^2+3x+7}{x+2}$로 주어진 곡선의 점근선을 구할 때

나누어 $\dfrac{x^2+3x+7}{x+2}=x+1+\dfrac{5}{x+2}$에서 x가 커질수록 마지막 분수식은 0에 가까워지므로 점근선은 직선 $y=x+1$이다.

한편, 무한대에서 극한을 구하는 방법에 따르면 $\dfrac{x^2+3x+7}{x+2}=\dfrac{x+3+\dfrac{7}{x}}{1+\dfrac{2}{x}}$에서 x가 커질수록 값은 $x+3$에서 가까이 간다. 따라서 점근선은 $y=x+3$이다.

4) 산술-기하평균의 적용

A, B, C가 삼각형의 세 각일 때, $\sin A\sin B\sin C$의 최대값을 구하는데 산술-기하평균의 등식에 의해 $\sin A\sin B\sin C\leqq(\dfrac{\sin A+\sin B+\sin C}{3})^3$이고 등식은 $\sin A=\sin B=\sin C$일 때 한하여 성립한다. 이것은 $A=B=C=60°$일 때이다. 따라서 최대값은 모든 각이 같을 때이고 $\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$이다.

5) Cone의 부피?

방정식 $z=\sqrt{x^2+y^2}$과 $z=4$로 둘러싸인 입체의 부피를 구하면

$$V=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^4\int_0^4\sqrt{r^2}\cdot rdzdrd\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^4\left[\frac{r^2}{2}z\right]_0^4drd\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^4d\theta$$

$$=\left[\frac{2\cdot4^3}{3}\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4^3\pi}{3}$$

3. 정의역을 무시하여 틀린 답이 나오는 경우

1) 한 점에서 도형에 이르는 최단거리 구하기

점 (0, 5) 포물선 $16y=x^2$에 이르는 최단거리를 구할 때,

$f(y)=x^2+(y-5)^2=16y+(y-5)^2$을 최소가 되게 하는 값을 구해야 한다.

$f'(y)=2y+6$에서 $y=-3$일 때 극소값을 갖는다. 그런데 대응하는 x의 값은 허수이다.

따라서 최소거리는 존재하지 않는다. 유사한 예를 하나 더 알아보면,

"쌍곡선 $x^2-y^2=a^2$ 위의 어떤 점도 원점에 가깝지 않다."가 유도될 수 있다.

(유사한 정리 : 원$x^2+y^2=r^2$ 위의 원 내부의 점에 가깝거나 먼 점은 없다.)

$L=\sqrt{x^2+y^2}$ 을 원점에서의 거리라고 하자. y를 치환하면$L=\sqrt{2x^2-a^2}$ 이고 $\frac{dL}{dx}=\frac{2x}{\sqrt{2x^2-a^2}}$ 이다. $\frac{dL}{dx}=0$일 때, $x=0$이고 y는 허수이다. $\frac{dL}{dx}$가 정의되지 않으면 $x=\frac{a}{\sqrt{2}}$ 이고, y는 허수이다. 따라서, 가까운 점은 없다.(Note: 다른 어떤 점보다 원점에 가까운 점은 $(\pm a,\ 0)$이라는 것은 분명하다). 그래프로 확인하는 것이 제일 쉽지만 식으로 풀 경우는 정의역에 주의하여야 잘못이 일어나지 않는다. x의 정의역은 $\{x : |x| \geqq a\}$이다. 따라서, 끝점 $x=\pm a$에서, L'가 0이거나 정의되지 않거나 관계없이 L은 최소값이 된다.

이러한 예는 원, 타원의 경우에도 나타난다. 무엇이 잘못인가? y의 정의역 $y \geqq 0$이므로 이 범위에서 구해야 한다.

2) 무리방정식의 풀이?

a가 실수일 때, 방정식 $\sqrt{x}+\sqrt{x-a}=2$를 풀어보면 주어진 방정식에서 $\sqrt{x}-\sqrt{x-a}=\frac{a}{\sqrt{x}+\sqrt{x-a}}=\frac{a}{2}$이 되고 두 방정식을 더하면 $2\sqrt{x}=2+\frac{a}{2}$에서 $x=(1+\frac{a}{4})^2$을 얻는다. $x-a=(1-\frac{a}{4})^2>0$을 쉽게 알 수 있어 무리식이 정의됨을 보인다. $a=8$이면 $x=9$가 되어 방정식의 좌변이 2를 넘는다. 무엇이 잘못되었는가? 주어진 방정식은 $x \geqq a$를 만족해야 한다. 그래서 $2=\sqrt{x}+\sqrt{x-a} \geqq \sqrt{a}$ 또는 $2 \geqq \frac{a}{2}$가 필요한 조건이다. 바꾸어 $\sqrt{x}+\sqrt{x-a} \geqq \sqrt{x}-\sqrt{x-a}$에 유의하면 $2 \geqq \frac{a}{2}$를 얻는다. $a \leqq 4$일 때, 방정식을 풀 수 있다. $a=4$이면 $x=4$이고, $a=1$이면 $x=\frac{25}{16}$이다. $a>4$일 때 방정식은 실근을 갖지 않는다. 앞의 방법을 이용할 때 $\sqrt{x-a}=\frac{a}{4}-1$임을 유념해야 한다.

3) 같은 도함수를 갖는 Arctanents

$\arctan x$와$\arctan(\frac{1+x}{1-x})$의 도함수는 $\frac{1}{1+x^2}$로 같다. 따라서, 어떤 상수 C에 대하여 $\arctan(\frac{1+x}{1-x})=\arctan x+C$이다. $x=0$라 놓으면 $C=\frac{\pi}{4}$이다. 한편, $x\to\infty$이면 $\arctan x\to\frac{\pi}{2}$이고, $\arctan(\frac{1+x}{1-x})\to-\frac{\pi}{4}$이다. 따라서,$C=-\frac{3\pi}{4}$이다. 여기서 결국 적분상수는 상수가 아니다. 이것은 두 arctanents 사이를 분류하는 좋은 예이다.

$\tan(\theta - \frac{3\pi}{4}) = \tan(\theta + \frac{\pi}{4}) = \frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}$ 이다.

$x \in (-\infty, 1)$일 때, $\arctan x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$이고 $\frac{1+x}{1-x} = (\frac{2}{1-x} - 1) \in (-1, +\infty)$에서, $\arctan(\frac{1+x}{1-x}) \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$이다. 따라서, $\arctan(\frac{1+x}{1-x}) = \arctan x + \frac{\pi}{4} (x < 1)$이다.

같은 방법으로 $\arctan(\frac{1+x}{1-x}) = \arctan x - \frac{3\pi}{4} (x > 1)$이다.

4. 역설이 나타나는 경우

1) 미분결과 $3=2$임을 보이기

$x > 0$이고 $x^3 = x^2 + x^2 + x^2 + x^2 + x^2 + \cdots + x^2$ (x 항까지)를 미분하면 $3x^2 = 2x + 2x + 2x + \cdots + 2x = x(2x) = 2x^2$에서 $3 = 2$이다.

2) Perron의 역설

(명제) 1은 가장 큰 양의 정수이다.

(증명) n이 가장 큰 양의 정수라 하면 $n^2 \geq n$이므로 $n^2 = n$이어야 한다. 따라서 $n = 1$이다.
모순은 가장 큰 양의 정수는 존재하지 않는데 존재한다 하여 역설이 일어남.

3) 극좌표 역설?

극좌표(r, θ)와 직교좌표 (x, y)의 변환공식은 다음과 같다.

$r^2 = x^2 + y^2$, $\tan\theta = \frac{y}{x} (x \neq 0)$, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$이다.

한편, $r = \sqrt{x^2+y^2}$ 이므로 $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{r} = \frac{r\cos\theta}{r} = \cos\theta$이고, $r = x\sec\theta$에서 $\frac{\partial r}{\partial x} = \sec\theta$이다. 무엇이 다른가? 어떤 변수들이 독립변수로 인정되느냐에 달려있다. r, θ, x, y의 어느 두 개도 다른 두 개의 함수로서 여겨질 수 있다. 따라서 x, y가 독립이면 $\frac{\partial r}{\partial x} = \cos\theta$이고, x, θ가 독립이면 $\frac{\partial r}{\partial x} = \sec\theta$이다.

4) x의 모든 멱의 도함수는 상수이다.

귀납법에 의해 x^0, x^1, x^2, x^3, x^4, $\cdots$, x^n, $\cdots$의 1차도함수는 모두 0이다.

왜냐하면, $(x^0)' = 0$이다. x^n의 도함수가 $n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ k$에 대해 0이라면 $x' = (x^1)' = (x^k)' = 0$이므로 $(x^{k+1})' = (x \cdot x^k)' = x' \cdot x^k + x \cdot (x^k)' = 0$이다.

5) $n = 1$에 대해서만 성립하는 공식

모든 양의 정수 n에 대해 $1+2+3+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$이면 $n = 1$이다.

왜냐하면 대신에 $n-1$을 가정의 식에 대입하면 $n \geqq 2$에 대해

$1+2+3+\cdots+(n-1) = \dfrac{n(n-1)}{2}$이다. 양변에 1을 더하면 $1+2+3+\cdots+n = \dfrac{n(n-1)}{2}+1$ 이다. 이식을 가정의 식과 비교하면 $\dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}+1$이다. 따라서, $n = 1$이다.

무엇이 학생들을 당황스럽게 만드는가? 분명히 속임수가 있다. 그것은 다시 써보면 알 수 있다.

$1+2+3+\cdots+(n-2)+(n-1)+n = \dfrac{n(n-1)}{2}+1$이 아니고

$1+2+3+\cdots+(n-2)+n = \dfrac{n(n-1)}{2}+1$이기 때문이다.

6) 두 값을 갖는 함수?

$$x^{x^{x^{\cdot^{\cdot}}}} = 2,\ y^{y^{y^{\cdot^{\cdot}}}} = 4,\ \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot}}}} = ?$$

이 때 x, y 모두 $\sqrt{2}$이다. 왜냐하면 $\sqrt{2}^x = x$에서 $x = 2$, $x = 4$이다. 그런데 $x = 4$는 아니다.

그 이유는? $v = u^{u^{u^{u^{\cdots}}}}$를 수열 $\{u,\ u^u,\ u^{u^u},\ \cdots\}$의 극한으로 다음과 같이 정의하면 $v = \lim_{n\to\infty} u_n,\ u_1 = u,\ u_n = u_{n-1}^u\ (n \geqq 2)$ v는 $v = u^v$를 만족해야 한다. 따라서 v는 u^x의 고정점이다. $u = \sqrt{2}$에 대한 수열은 증가하지만 2를 넘지 않는다.

7) 잘못된 극한값 구하기

$L = \lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x^3}$라 하면 $L = \lim_{x\to 0}\dfrac{3\sin x - 4\sin^3 x}{x^3} = 3\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x^3} - 4\lim_{x\to 0}(\dfrac{\sin x}{x})^3$

$= 3\lim_{t\to 0}\dfrac{\sin(3t)}{(3t)^3} - 4 = \dfrac{1}{9}\lim_{t\to 0}\dfrac{\sin 3t}{t^3} - 4 = \dfrac{1}{9}L - 4$에서 $L = -\dfrac{9}{2}$이다.

극한값이 존재하지 않는데 존재한다고 인정하고 구한 것이 잘못이다.

또, 로피탈의 정리의 무제한적인 적용으로 다음과 같이 구해도 잘못이다.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\cos 3x}{x^2}=-\frac{3}{2}\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{x}=-\frac{3}{2}(3)=-\frac{9}{2}$$ 또는

$$\lim_{x\to0}\frac{3\sin x-4\sin^3 x}{x^3}=3\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x^3}-4\lim_{x\to0}\frac{\sin^3 x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x}{3x^2}-4$$

$$=-\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{2x}-4=-\frac{1}{2}-4=-\frac{9}{2}$$

8) 로피탈의 정리의 잘못된 적용

$$1=\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x^2}{x+\sin x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-2x\cos x^2}{1+2x\cos x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-2\cos x^2}{\frac{1}{x}+2\cos x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2\cos x^2}{2\cos x^2}=-1$$

로피탈의 정리를 정확히 이해하고 적용하지 않아 $0=1$이 유도된다.

$\lim_{x\to0}\frac{3x^2-1}{x-1}$을 계산하기 위해 로피탈의 정리를 적용하면, $\lim_{x\to0}\frac{3x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to0}\frac{6x}{1}=0$이다. 그러나 $\lim_{x\to0}\frac{3x^2-1}{x-1}=1$이다. 따라서, $0=1$이다.

9) 모든 도함수는 연속인가?

점 $x=a$에서 도함수의 연속을 나타내는 다음 식을 얻는다.

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}f'(x)$$

처음 등식은 정의에서, 두 번째 등식은 로피탈의 정리 적용에서 나온다.

10) Telescoping Series의 계산?

$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+1)(k+2)}$를 구하는데

$\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\cdots=(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{4}-\frac{1}{5})+\cdots=\frac{1}{2}$이고, 한편,

$\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\cdots=(1-\frac{5}{6})+(\frac{5}{6}-\frac{3}{4})+(\frac{3}{4}-\frac{7}{10})+(\frac{7}{10}-\frac{2}{3})+\cdots=1$이다.

왜 불일치 하는가?

11) 귀납적증명으로 $(n-2)^2=n^2$이다.

모든 양의 정수 n에 대해 $(n-2)^2=n^2$이다. 귀납법에 의해 우선 주어진 식을 S_n이라 하면, S_1

은 참이고 S_k가 참이라면$S_{k+1}:(k-1)^2=(k+1)^2$에 대해 성립하는 것을 보이기 위해 $-4k=0$이면 $k^2-2k+1=k^2+2k+1$이 성립한다.

$k \geqq 1$이므로 $-4k+4=0$을 얻기 위해 $1-\frac{1}{k}$을 곱할 수 있다. 양변에 k^2을 더하여 $k^2-4k+4=k^2$을 얻는다.$(k-2)^2=k^2$이다. S_{k+1}에서 주어진S_k가 성립하므로S_{k+1}도 참이다. 따라서 모든 $n \geqq 1$에 대해 S_n이 참이다.

12) Cauchy-Schwarz 부등식의 적용

$x,\ y>0$이면 $\frac{x}{(1+x)(x+y)} \leqq \frac{1}{(1+x)^2}$을 증명하는데 Cauchy-Schwarz 부등식 $(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2) \geqq (a_1b_1+a_2b_2)^2$에 $a_1=b_1=1,\ a_2=\sqrt{x},\ b_2=\sqrt{\frac{y}{x}}$를 대입하면

$\frac{x}{(1+x)(x+y)} \leqq \frac{1}{(1+x)(1+\frac{y}{x})} \leqq \frac{1}{(1+\sqrt{y})^2}$이다. 등호는$x=\frac{y}{x}$ 또는 $y=x^2$일 때 성립한다. 따라서, 극대화하면 $\frac{x}{(1+x)(x+y)} \leqq \frac{1}{(1+x)^2}$이다.

그런데 $(x,\ y)=(2,\ 3)$의 경우를 대입하면 $\frac{2}{15} \leqq \frac{1}{9}$이 되어 모순이다!

13) $\sqrt{-1}$은 실수이다

$\sqrt{-1}=1+(\sqrt{-1}-1)$이고

$$\sqrt{-1}=1+\frac{(\sqrt{-1}-1)(\sqrt{-1}+1)}{(\sqrt{-1}+1)}=1-\frac{2}{1+\sqrt{-1}}=1-\frac{2}{2+(\sqrt{-1}-1)}\text{이다.}$$

이 과정을 반복하면 멋진 연분수로 이끈다.

$$\sqrt{-1}=1-\cfrac{2}{2-\cfrac{2}{2-\cfrac{2}{2-\cfrac{2}{2-\cfrac{2}{\cdots}}}}}$$

14) $\pi=3$이다.

단위원$x^2+y^2=1$의 위쪽 반원에서 임의의 점을 선택하면 점 (1, 0)에서 평균거리를 구하는데 다음과 같이 풀었다. 우선 점의 좌표$(\cos\theta,\ \sin\theta)(0 \leqq \theta \leqq \pi)$라면 이 점과 점 (1, 0) 사이의 거리는

$\sqrt{2(1-\cos\theta)}=2\sin\frac{\theta}{2}$이고, 평균거리는 $\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sqrt{2(1-\cos\theta)}\,d\theta=\frac{4}{\pi}$이다.

한편, 점의 좌표 $(x,\ \sqrt{1-x^2})(-1\leq x\leq 1)$라면 이 점과 점 (1, 0) 사이의 거리는 $\sqrt{2(1-x)}$이고 x는 길이 2의 구간에 있으므로 평균거리는 $\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\sqrt{2(1-x)}\,dx=\frac{4}{3}$이다.

따라서, $\frac{4}{\pi}=\frac{4}{3}$에서 $\pi=3$이다. 무엇이 잘못인가?

5. 정의역의 잘못 적용으로 정적분의 값이 다른 경우

1) 정의역에 따라 정적분 값이 다르다.

$\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan 1-\arctan(-1)=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$이다.

그런데 $\frac{1}{2}arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}$의 도함수는 $\frac{1}{1+x^2}$이다. 따라서 주어진 적분값은 $\frac{1}{2}arccos0-\frac{1}{2}arccos0=0$이다. 다른 적분값이 나온 이유는 함수 $\arccos x$는 $x>0$일 때만 $\frac{1}{1+x^2}$의 원시함수이기 때문이다.

2) 피적분함수가 양수인데 적분값은 음수인 경우

$\arctan(\sec x)$의 도함수가 피적분함수이므로 적분값은

$\int_0^{\frac{3\pi}{4}}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx=-\arctan\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}<0$이다. 그런데 피적분함수는 구간 $[0,\frac{3\pi}{4}]$에서 음이 아니다. 피적분함수가 음이 아니면 정적분 값은 또한 음이 아니어야 한다.

그 이유는 $\frac{\pi}{2}$에서 불연속으로 미분적분학의 기본정리를 잘못 적용한 것이다.

적분구간을 두 개의 구간 $[0,\ \frac{\pi}{2})$와 $(\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{4}]$로 나누어 $f(x)=\arctan(\sec x)$와 $f(x)=\pi+\arctan(\sec x)$를 각각 적분하여 더한값 $\frac{3\pi}{4}-\arctan\sqrt{2}$가 정답이다.

3) 정의역을 무시한 정적분에서 $2=1$이 유도된다.

$f(x)$를 임의의 함수라 하면, $\int_1^2 f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx - \int_0^1 f(x)dx$이다. 우변의 첫 번째 적분에서, $x = 2y$라 놓으면, $\int_0^2 f(x)dx = 2\int_0^1 f(2y)dy = 2\int_0^1 f(2x)dx$이다. $f(2x) = \frac{1}{2}f(x)$인 $f(x)$를 모든 x 값에 대해 취하면 $\int_1^2 f(x)dx = 2\int_0^1 \frac{1}{2}f(x)dx - \int_0^1 f(x)dx = 0$이다.

이제 $f(2x) = \frac{1}{2}f(x)$인 $f(x) = \frac{1}{x}$에 대해 $\int_1^2 \frac{dx}{x} = 0$이므로 $\ln 2 = 0$ 또는 $2 = 1$이다.

$f(x) \equiv \frac{1}{x}$일 때, 적분 $\int_0^1 f(x)dx$는 존재하지 않는데 존재하는 것으로 인정하여 잘못이 유도되었다.

4) 특이적분에서 주의를 무시하여 동시에 0이고 정의되지 않는 적분이 된 경우

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4x^3dx}{1+x^4} = \lim_{t\to\infty}\int_{-t}^{t} \frac{4x^3dx}{1+x^4} = \lim_{t\to\infty}[\ln(1+x^4)]_{-t}^{t} = \lim_{t\to\infty}[\ln(1+t^4) - \ln(1+t^4)] = 0$이다.

그러나 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4x^3dx}{1+x^4} = \int_{-\infty}^{0} \frac{4x^3dx}{1+x^4} + \int_{0}^{\infty} \frac{4x^3dx}{1+x^4}$에서,

$\int_{0}^{\infty} \frac{4x^3dx}{1+x^4} = \lim_{t\to\infty}[\ln(1+x^4)]_0^t = \lim_{t\to\infty}[\ln(1+t^4)]$이 되어 존재하지 않는다.

따라서, $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4x^3dx}{1+x^4} = \int_{-\infty}^{0} \frac{4x^3dx}{1+x^4} + \int_{0}^{\infty} \frac{4x^3dx}{1+x^4}$은 존재하지 않는다.

두개의 무한을 갖는 적분을 다룰 때 서로 독립적으로 t와 $-t$는 ∞와 $-\infty$로 접근함에 유의하여 각각이 수렴하여야 적분값이 존재한다.

5) 정의역에서 피적분함수의 불연속을 인정하지 않고 적분하여 $0 < 0$이 일어난다.

$f(x) = (1+e^{\frac{1}{x}})^{-1}$, $g(x) = e^{\frac{1}{x}}(x + xe^{\frac{1}{x}})^{-2}$를 택하면, $g(x) \geqq 0$이고, $\frac{d}{dx}f(x) = g(x)$이다. 이제 $0 \leqq \int_{-1}^{1} g(x)dx = f(1) - f(-1) = \frac{1-e}{1+e} < 0$이다.

따라서, $0 < 0$이다. 피적분함수 $g(x)$가 $x = 0$에서 불연속이라는 사실이 무시되었다.

6) 정의역에서 피적분함수의 양,음을 무시한 적분이 $24=0$을 유도한다.

구$x^2+y^2+z^2=9$를 원기둥$x^2+y^2=3x$로 자른 부피를 원기둥좌표를 이용하여 구한다. $xy-$평면에 대한 대칭을 생각하면, 부피는$V_1=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{3\cos\theta}\sqrt{9-r^2}\,rdrd\theta=18\pi$이고, $xy-$평면, $xz-$평면에 대한 대칭을 생각하면, 부피는 $V_2=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{3\cos\theta}\sqrt{9-r^2}\,rdrd\theta=18\pi+24$이다. 따라서, $24=0$이다.$18\pi+24$가 정답이다. 잘못된 답은 다음에서 일어난다.

$$\int_0^{3\cos\theta}\sqrt{9-r^2}\,rdrd\theta=[-\frac{(9-r^2)^{\frac{3}{2}}}{3}]_0^{3\cos\theta}=-\frac{(9-9\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}}{3}+9$$

$$=9-9(1-\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}=9-9\sin^3\theta.$$

식 $(1-\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}$은 음이 아닌 값이다. 그 동치 $\sin^3\theta$는 I, II사분면에서 양이나 III, IV사분면에서 음이다. $0\sim\frac{\pi}{2}$는 제1사분면을 벗어나지 않으므로 V_2가 정답이다.

6. 부정적분에서 불일치가 일어나는 경우

1) 적분상수의 무시가 $\cosh x=\sinh x$, $1=0$을 유도한다.

다음 식을 두 번 부분적분하면

$$\int e^x\sinh x\,dx=e^x\cosh x-\int e^x\cosh x\,dx=e^x\cosh x-(e^x\sinh x-\int e^x\sinh x\,dx)$$

따라서, $e^x(\cosh x-\sinh x)=0$이다. $\cosh x=\sinh x$이고 $\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$이다.

정리하면 $e^{-x}=-e^{-x}$에서 $2e^{-x}=0$, $e^{-x}=0$이다. 한편 $1=e^xe^{-x}=0$이 된다.

더 주의하고 각 부분적분에 상수를 끼워 넣으면 쉽게 모든 C에 대해 $C=e^x(\cosh x-\sinh x)=1$이라는 결론에 도달한다.

2) 적분상수의 무시가 멱급수 표현에 나타난 효과

$f(x)=\frac{1+x^2}{1-x^2}$를 $x=0$에 대해 전개할 때 $f'(x)=2\frac{2x}{(1-x^2)^2}=2(\frac{1}{1-x^2})'$에서 $f(x)=2(1-x^2)^{-1}=2(1+x^2+x^4+x^6+\cdots)$이다. (따라서, $f(0)=2$이다.)

3) 적분상수의 무시로 0=1임을 보이기

$J=\int \frac{1}{xlnx}dx$ 를 $u=\frac{1}{\ln x}$, $v'=\frac{1}{x}$ 이라 놓고 부분적분할 때 $J=1+J$를 쉽게 얻는다. J를 소거하면 $0=1$이다. 또 다른 예를 알아보면 부분적분으로 $\int \frac{dx}{x}$ 를 계산하면, $u=\frac{1}{x}$, $dv=1dx$ 에서 $\int \frac{dx}{x}=1+\int \frac{dx}{x}$ 이고, $0=1$이다. 적분상수가 무시되어 잘못이 일어났다.

이 예는 일반적으로 $\int \frac{g'(x)}{g(x)}dx=\ln g(x)$꼴에서 일반화 될 수 있다(Phillip J. Sloan, 1989).

$\int e^{x}e^{-x}dx, \int \frac{4\cos^2 x}{2x+\sin 2x}dx$에서 확인해보자.

4) $\ln\sin x$의 적분?

$I=\int \ln(\sin x)dx$ 라면

$$I=\int \ln(2\sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2})dx=\int(\ln 2)dx+\int \ln(\sin\frac{x}{2})dx+\int \ln(\cos\frac{x}{2})dx$$
$$=(\ln 2)x+\int \ln(\sin\frac{x}{2})dx+\int \ln(\cos\frac{x}{2})dx$$

마지막 두 적분에서 $u=\frac{x}{2}$라 놓으면 $I=(\ln 2)x+2\int \ln(\sin u)du+2\int \ln(\cos u)du$이고, $I=(\ln 2)x+2I+2\int \ln(\cos u)du$가 된다.

따라서, $I=-(\ln 2)x-2\int \ln(\cos u)du=-(\ln 2)x-2\int \ln(\sin(\frac{\pi}{2}-u))du$이다.

$t=\frac{\pi}{2}-u$라 놓으면 $I=-(\ln 2)x+2\int \ln(\sin t)dt=-(\ln 2)x+2I$가 된다.

여기서 $\int \ln(\sin x)dx=(\ln 2)x+C$($C$는 상수)를 얻는다.

5) 적분상수의 차이로 생긴 결과

$\int \frac{y}{(y-1)^2}dy$를 다음과 같이 적분한다.

우선, $u=y$, $dv=(y-1)^{-2}$로 놓고 부분적분하면

$\int \frac{y}{(y-1)^2}dy=\frac{-y}{y-1}+\int \frac{1}{y-1}dy=\frac{-y}{y-1}+\ln(y-1)+C$이다.

한편, $y=1+u$로 치환하면

$$\int \frac{y}{(y-1)^2}dy = \int \frac{u+1}{u^2}du = \int \frac{1}{u}du + \int \frac{1}{u^2}du = \ln u - \frac{1}{u} + C = \ln(y-1) - \frac{1}{y-1} + C_1$$

이다. 위의 결과를 다음과 같이 정리하면

$\ln(y-1) + \frac{-y}{y-1} + C = \ln(y-1) + \frac{-(y-1)-1}{y-1} + C = \ln(y-1) - \frac{1}{y-1} - 1 + C$로 $-1 + C = C_1$이라 놓으면 같은 결과로 본다.

6) 삼각함수를 포함한 적분에서 결과가 불일치하는 경우

$\int \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}dx$의 적분에서 분모의 근호안을 완전제곱식으로 고쳐서 적분하면

$\int \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}dx = \int \frac{2}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}dx = \arcsin(2x-1) + C$이다.

한편, 분모를 $\sqrt{1-x}\sqrt{x}$로 인수분해해서 $u = \sqrt{x}$로 치환하여 적분하면

$\int \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}dx = 2\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du = 2\arcsin(\sqrt{x}) + C$이다.

치환에 따라 다른 결과가 나오는 예를 들면, $\int \cosh x \sinh x dx = \frac{1}{2}\cosh^2 x + C$와

$\int \cosh x \sinh x dx = \frac{1}{2}\sinh^2 x + C$이다.

그러나 다음은 더 미묘한 결과를 보인다.

$$\int \csc x dx = \int \csc x \frac{\cot x + \csc x}{\cot x + \csc x}dx = \int \frac{\csc x \cot x + \csc^2 x}{\cot x + \csc x}dx$$

$= -\ln|\csc x + \cot x| + C \; ((k-1)\pi < x < k\pi)$이고,

$$\int \csc x dx = \int \csc x \frac{\csc x - \cot x}{\csc x - \cot x}dx = \int \frac{\csc^2 x - \csc x \cot x}{\csc x - \cot x}dx$$

$= \ln|\csc x - \cot x| + C \; ((k-1)\pi < x < k\pi,\ k$는 정수)이다.

$\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$인 반면 피적분함수를 $\sec x = \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}$로 고치고 $u = \sin x$라 치환하면 부분분수분해적분에 의해

$$\int \sec x dx = \int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}dx = \frac{1}{2}(\ln|1+u| - \ln|1-u|)$$

$= \frac{1}{2}(\ln|1+\sin x| - \ln|1-\sin x|) + C$이다. 두식에서 상수 C는 실제로 같다.

7) 같은 적분에 대해 결과가 일치하지 않는 적분 모으기

$\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$를 구하는데 풀이 방법에 따라 다른 결과를 가져온다.

부분적분을 이용하면 $u=x$, $dv=(x+1)^{-\frac{1}{2}}dx$ 놓고 구하면

$\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx = 2x(x+1)^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + C$이고, 한편 $t=x+1$이다. 치환하면

$\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx = \frac{2}{3}x(x+1)^{\frac{3}{2}} - 2(x+1)^{\frac{1}{2}} + C$이다.

7. 급수의 재배열에 따라 오류가 나타날 수 있는 경우

1) 급수에서 오류에 의해 $1=\frac{1}{2}$이다.

$$\frac{1}{1+t} = \frac{1}{1-t^2} - t\frac{1}{1-t^4} - t^3\frac{1}{1-t^4} = 1-t-t^3+t^2-t^5-t^7+t^4-t^9-t^{11}+\cdots \ (|t|<1)$$

양변을 0과 x 사이에서 적분하면

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^6}{6} - \frac{x^8}{8} + \cdots \ (|x|<1)$$이다.

x가 1에 가까이 갈 때 $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots$를 얻는다. 급수에서 항을 그룹으로 묶으면

$$(1-\frac{1}{2}) - \frac{1}{4} + (\frac{1}{3} - \frac{1}{6}) - \frac{1}{8} + \cdots = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots$$

$$= \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots) = \frac{1}{2}\ln 2$$

에서 $\ln 2 = \frac{1}{2}\ln 2$를 얻는다 따라서 $1=\frac{1}{2}$이다.

조건수렴급수의 재배열은 다른 합에 수렴할 수 있다.

2) 수렴하고 발산하는 급수

무한급수 $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \ln(1-\frac{1}{n})$은 교대급수 판정법에 의해 수렴함을 알 수 있다.

한편, $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \ln(1-\frac{1}{n}) = \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \ln(\frac{n-1}{n}) = \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n[\ln(n-1) - \ln n]$

$$= (\ln 1 - \ln 2) - (\ln 2 - \ln 3) + (\ln 3 - \ln 4) - (\ln 4 - \ln 5) + \cdots$$
$$= -2\ln 2 + 2\ln 3 - 2\ln 4 + 2\ln 5 - 2\ln 6 + \cdots = \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}(2\ln n)$$

에서 n 째 항이 0에 가까이가지 않으므로 발산한다.

교대급수의 조작으로 수렴과 발산하는 경우를 또 알아본다.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \cdots$$
$$= 1 + (\frac{1}{2} - 1) + (1 - \frac{2}{3}) + (\frac{3}{4} - 1) + \cdots + (\frac{2n-1}{2n}) + (1 - \frac{2n}{2n+1}) + \cdots$$
$$= 1 + \frac{1}{2} + (-1+1) - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + (-1+1) - \cdots + \frac{2n-1}{2n} + (-1+1) - \frac{2n}{2n+1} - \cdots$$
$$= 1 + (\frac{1}{2} - \frac{2}{3}) + (\frac{3}{4} - \frac{4}{5}) + \cdots + (\frac{2n-1}{2n} - \frac{2n}{2n+1}) + \cdots$$
$$= 1 + (-\frac{1}{6}) + (-\frac{1}{20}) + \cdots + (\frac{4n^2 - 1 - 4n^2}{4n^2 + 2n}) + \cdots$$
$$= 1 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n(2n+1)}$$

은 절대수렴한다.

한편, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \cdots$

$$= 1 + (\frac{1}{2} - 1) + \frac{1}{3} + (\frac{3}{4} - 1) + \frac{1}{5} + \cdots + (\frac{2n-1}{2n} - 1) + \frac{1}{2n+1} + \cdots$$
$$= 1 + \frac{1}{2} + (-1 + \frac{1}{3}) + \frac{3}{4} + (-1 + \frac{1}{5}) + \frac{5}{6} + \cdots + \frac{2n-1}{2n} + (-1 + \frac{1}{2n+1}) + \cdots$$
$$= 1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3}) + \frac{3}{4} - \frac{4}{5} + \cdots + \frac{2n-1}{2n} - \frac{2n}{2n+1} + \cdots = 1 + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{n-1}{n}$$

은 발산한다. 일반으로 $a_n > 0$인 교대급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$은 항 $-a_{2k+1}$을 $(1 - a_{2k+1}) - 1$로 바꾸고 괄호를 다시하여 발산하는 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(1 - a_n)$으로 조작될 수 있다.

동시에 수렴하고 발산하는 급수로 보이는 경우의 또 다른 예를 알아보자.

급수 $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \frac{1}{11} + \cdots$ (a)의 각 항은 수렴하는 급수 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$ (b)의 대응하는 항보다 작으므로 (a)는 수렴하고, (a)의 각 항은 급수 $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \cdots$ (c)의 대응하는 항보다

크다. (c)는 조화급수의 배수이므로 발산한다. 따라서, (a)는 발산한다.

주어진 급수의 다음 항들은 $\frac{1}{14}$, $\frac{1}{17}$, $\frac{1}{20}$, …으로 기하급수의 다음 항 $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{64}$, … 보다 크다. 일부항만 비교하여 잘못을 이끌었다.

8. 정상적인 풀이가 아니지만 정답에 이른 경우

1) 잘못 풀어 정답에 이른 부등식 문제

x에 대한 부등식 $|x|+|x-1|<2$를 좌변의 항을 결합하여 $|2x-1|<2$를 풀어 $-\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$을 얻었다. 답은 실제로 정답이다. 이 요행수가 어떻게 분석되어야 하나?

그런데 a, b, $c(a \leqq b)$일 때 부등식 $|x-a|+|x-b|<c$와 $|2x-(a+b)|<c$는 해집합이 같다.

2) 엉터리로 풀었는데 정답이 된 경우

$e^{x-2}+e^{x+8}=e^{4-x}+e^{3x+2}$를 푸는데 등식$e^a+e^b=e^{ab}$를 이용하여 $(x-2)(x+8)=(4-x)(3x+2)$에서 $0=x^2-x-6=(x-3)(x+2)$와 같이 풀어 $x=-1$, $x=3$을 얻었다. 바른 풀이는 아니지만 정답을 얻었다. 그 이유는?

방정식$b^{f(x)}+b^{g(x)}=b^{u(x)}+b^{v(x)}$는 밑$b(b\neq 0)$에 관계없이 $f(r)=u(r)$, $g(r)=v(r)$, $f(s)=v(s)$, $g(s)=u(s)$이면 $x=r$, $x=s$를 해로 갖는다.

r과 s가 또한 방정식 $f(x)g(x)=u(x)v(x)$를 만족시킨다. 흥미 있는 예를 만들어 보자.

누가 지수를 필요로 하는가?

$4^{x-1}=2^x$은 다음과 동치이다.

$$4(x-1)=2x \Leftrightarrow 4x-4=2x \Leftrightarrow 2x=4 \Leftrightarrow x=2$$

일반으로 $a^c=b^d$, $ac=bd$이면, $b\log a=a\log b$ 또는 $a^b=b^a$이다.

3) 이차방정식을 다음과 같이 풀면

이차방정식 $2-x-x^2=0$을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$4=6-x-x^2=(x+3)(2-x)$$

$x+3=4$이고 $2-x=1$이면 $x=1$. 반면 $x+3=1$이고 $2-x=4$이면 $x=-2$이다. 두 해는 모두 맞는다. 이렇게 풀어도 되는가?

4) 잘못된 풀이가 정답으로

사지선다형 문제에서 잘못된 이유로 정답을 선택하는 위험이 있다. 다음과 같이 문제를 풀었다.

$\dfrac{bx(a^2x^2+2a^2y^2+b^2y^2)+ay(a^2x^2+2b^2x^2+b^2y^2)}{bx+ay}$ 을 간단히 하여라.

$$\frac{bx(a^2x^2+2a^2y^2+b^2y^2)+ay(a^2x^2+2b^2x^2+b^2y^2)}{bx+ay}$$

$$=\frac{bx(ax+by)^2+ay(ax+by)^2}{bx+ay}=\frac{(bx+ay)(ax+by)^2}{bx+ay}=(ax+by)^2$$

이 경우 풀이과정은 틀렸지만 정답을 얻었다. 다음 경우

지수의 3을 약분하여 $\dfrac{(a+b)^3+a^3}{(a+b)^3+b^3}=\dfrac{2a+b}{a+2b}$ 을 얻었다. 이들은 모두 정답이다.

5) 잘못된 삼각등식의 적용으로 얻은 정답

$\sin(u\pm v)=\sin u\pm\sin v$ 에서

$\sin(u+v)\sin(u-v)=(\sin u+\sin v)(\sin u-\sin v)=\sin^2u-\sin^2v$이다.

이 방정식의 처음과 마지막이 같다는 것을 독립적으로 보일 수 있다.

또 $\sin^2A-\sin^2B=\sin(A+B)\sin(A-B)$를 다음과 같이 보인다.

$$\sin^2A-\sin^2B=\sin(A^2-B^2)=\sin[(A+B)(A-B)]=\sin(A+B)\sin(A-B)$$

방정식 $\sin(u+v)=\sin u+\sin v$ 적용에서

$\sin 105^\circ=\sin 45^\circ+\sin 60^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ 이 된다.

6) 잘못된 사인등식을 적용하여 풀기

$\sin(x+\pi)=-\sin x$임을 $\sin(x+\pi)=\sin x+\sin\pi=\sin x-1=(-1)\sin x=-\sin x$라고 푼다.

7) 잘못된 계산으로 로그를 얻는 새로운 방법

$\displaystyle\int\frac{1}{x+1}dx=\int(\frac{1}{x}+\frac{1}{1})dx=\int\frac{1}{x}dx+\int\frac{1}{1}dx=\ln(x)+\ln(1)=\ln(x+1)+C$이다.

8) 잘못된 방법으로 풀었지만 정답

$e^{2x}-e^x-2=0$을 다음과 같이 풀었다.

$$\ln e^{2x}-\ln e^x-\ln 2=0 \Rightarrow 2x-x-\ln 2=0 \Rightarrow x=\ln 2$$

또 $2\ln(x-2)=\ln(x-3)+\ln x$ 의 해를 $\ln(2x-4)=\ln x(x-3)=\ln(x^2-3x)$

$\Rightarrow 2x-4=x^2-3x \Rightarrow 0=x^2-5x+4=(x-4)(x-1)$에서 $x=4(x\neq 1)$이다.

9) 지수를 미분하는 자연스러운 방법

오답 같지만 그렇지 않다. $(\sin x)^{\ln x}$를 미분할 때 로그미분법을 이용하지 않고 대신 $\ln x$가 상수라면 답은$(\ln x)(\sin x)^{\ln x-1}(\cos x)$이고 $\sin x$가 상수라면 $(\sin x)^{\ln x}\ln(\sin x)\cdot\frac{1}{x}$이다. $\ln x$도 $\sin x$도 상수가 아니므로 두 공식을 이용하여 $D(\sin x)^{\ln x}=(\ln x)(\sin x)^{\ln x-1}(\cos x)+(\sin x)^{\ln x}\ln(\sin x)\cdot\frac{1}{x}$이다.

방법은 이상할지 모르나 답은 옳다. $D(f(x))^{g(x)}$의 도함수는 어떻게 구하나? 다변수 연쇄법칙의 x가 많은 식의 도함수 적용(Fred Halpen, 1985)을 참고하면 도움이 된다.

$(f(x))^{g(x)}$의 도함수를 각 함수를 교대로 상수로 보고 미분하여 얻은 두 도함수를 더하여 구할 수 있다. $(f(x),\ g(x))$가 $(\sin x,\ \ln x)$, $(x,\ x)$인 경우 가능하다.

10) 로피탈정리가 잘못 적용되었으나 정답이 나온 경우

$\int_1^\infty (x-1)e^{-x}dx=\int_1^\infty \frac{x-1}{e^x}dx=\int_1^\infty \frac{1}{e^x}dx=\cdots=\frac{1}{e}$에서 두 번째-세 번째 등식에서 로피탈정리를 이용하였다.

11) 곱의 적분을 적분의 곱으로 풀어도 성립하는 예

$$\int\frac{x+2}{x^3}dx=\int(x+2)dx\int x^{-3}dx=\frac{(x+2)^2}{2}\frac{x^{-2}}{-2}+C=-\frac{1}{4}(\frac{x+2}{x})^2+C$$

$\int e^{4x}dx=\int(e^{2x})^2dx=(\int e^{2x}dx)^2=(\frac{e^{2x}}{2})^2+C=\frac{1}{4}e^{4x}+C$이다.

적분의 곱을 취함으로서 곱의 적분을 계산하는 예를 들었다. 이와 같은 예들을 어떻게 찾을 수 있을까?

12) 인수를 빼고 적분해도 관계없는 경우

$\int_0^\infty \frac{x}{1+x^3}dx=\int_0^\infty \frac{1}{1+x^3}dx$이 성립하는가?

복잡한 인수를 무시해도 적분값이 같은 예를 알아본다.

$$\int_0^2(2x-x^2)xdx=\int_0^2(2x-x^2)dx,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\sin^2\theta-(1-\cos\theta)^2]d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\sin\theta-(1-\cos\theta)]d\theta$$

13) 잘못 풀어도 정답이 나온 경우를 어떻게 설명해야 되는가?

$$\int_{-1}^{2} x^2 dx = [x^2]_{-1}^{2} = 3, \quad \int_{-1}^{2} (x+1)^2 dx = [(x+1)^2]_{-1}^{2} = 9,$$

$\int_{1}^{2}(3x^2+4x)dx = [3x^2+4x]_{1}^{2} = 20-7 = 13$이다.

피적분함수에 대한 원시함수를 구하지 않고 정확한 정적분값을 구하는 경우를 어떻게 설명해야 되는가?

$(3+\frac{3}{8})^{\frac{2}{3}} = 2+\frac{1}{4} = \frac{9}{4}$의 계산이 $(a+\frac{b}{c})^{\frac{m}{n}} = (a+\frac{b}{c})(\frac{m}{n})$으로 되는 것은 $n^{\frac{a}{b}} \cdot m^{\frac{c}{d}} = (nm)^{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}} = (nm)^{\frac{a+c}{b+d}}$를 이용하여 $3^{\frac{2}{3}} \cdot 9^{\frac{7}{6}} = (3 \cdot 9)^{\frac{9}{9}} = 27^1 = 27$인 것은 어떻게 설명해야 되는가?

14) 합의 도함수는 도함수의 합이다

$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = \frac{4n^3-n}{3}$을 갖고 $s(n) = \sum_{k=1}^{n}(2k-1)^3$을 계산할 수 있다.

$\frac{ds(n)}{dn} = \sum_{k=1}^{n}\frac{d}{dk}(2k-1)^3 = 6\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = 8n^3-2n$이다.

따라서 $s(n) = 2n^4-n^2+C$이고, $s(1)=1$이므로 $C=0$이다.

$\therefore\ s(n) = n^2(2n^2-1)$

15) 여러 번 실수가 정답으로 이끈다.

곡선 $x=2y$와 $x=y^2$으로 둘러싸인 부분을 y축 둘레로 회전하여 얻은 입체의 부피는

$\pi\int_{0}^{4}[(y^2)^2-(2y)^2]dy = \pi\left[\frac{y^5}{5}-\frac{4y^3}{3}\right]_0^4 = \frac{4\pi}{(5)(3)}[y^5-y^3]_0^4 \quad = \frac{4\pi}{15}[y^2]_0^4 = \frac{64\pi}{15}$ 이다.

16) 삼각등식의 잘못된 풀이과정이 정답에 이름

$\frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x-\sin x\cos x} = 1+\cot x$를 증명하는데 다음과 같이 두 가지로 증명하였다.

좌변은 $\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x}-\frac{\cos^2 x}{\sin x\cos x} = 1-\frac{\cos x}{\sin x} = 1+\cot x$이다.

한편, 좌변은 $\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x} = 1+\frac{\cos^2 x}{\sin x\cos x} = 1+\frac{\cos x}{\sin x} = 1+\cot x$이다.

17) 잘못된 지수법칙 적용으로 증명

수학적귀납법을 이용하여 모든 $n \geq 0$에 대해 $1+3+8+27+\cdots+3^n = \dfrac{3^{n+1}-1}{2}$을 증명하는데 $n=0$에 대해 등식은 성립, $n=k$에 대해 성립을 가정하고

$$1+3+8+27+\cdots+3^k+3^{k+1} = (1+3+8+27+\cdots+3^k)+3^{k+1} = \frac{3^{k+1}-1}{2}+3^{k+1}$$

$$= \frac{3^k+3^1-1}{2}+3^k+3^1 = \frac{3^k+2}{2}+\frac{6^k+6}{2} = \frac{9^k+8+(1-1)}{2} = \frac{9^k+9-1}{2}$$

$$= \frac{3(3^k+3)-1}{2} = \frac{3(3^{k+1})-1}{2} = \frac{3^{k+2}-1}{2}$$

18) 몫을 미분하는 간단한 방법이 통하는 경우

$f(x)=(1-\dfrac{3}{x})^{-3}$, $g(x)=-x^3$일 때 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$의 도함수를 $f'(x)=-3(1-\dfrac{3}{x})^{-4}\dfrac{3}{x^2}$ $=-9x^2(x-3)^{-4}$이고, $g'(x)=-3x^2$에서 $(\dfrac{f}{g})'(x)=\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=3(x-3)^{-4}$이다. 이 과정에 따라 올바른 답을 얻는 예를 들면 $(f(x),\ g(x))=((1-\dfrac{n}{x})^{-n},\ x^n)$, $(e^{-\frac{x}{2}},\ e^{-x})$와 $(1+\dfrac{1}{x},\ \dfrac{1}{x})$이다.

19) 합의 곱과 곱의 합은 같다

$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{7})^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty}(-\frac{1}{5})^k = \sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{7}\cdot\frac{-1}{5})^k = \frac{35}{36}$이고,

$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{4}{5})^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-5\ln 5)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}(\frac{4^k}{5}\cdot\frac{(-5\ln 5)^k}{k!})$ 이다.

물론 일반으로 $\sum a_k \cdot \sum b_k = \sum a_k b_k$는 아니다. $\sum a_k \cdot \sum b_k = \sum a_k b_k$인 수렴하는 급수 $\sum b_k$를 항상 찾을 수 있는가?

9. 이중적분에서 잘못이 나타날 수 있는 경우

1) 이중적분의 값과 적분순서 바꾸기 주의?

$\displaystyle\int_0^6\int_0^{\sqrt{5-x}} 4y\,dy\,dx = \int_0^6 (10-2x)\,dx = 60-36=24$이다. 적분의 순서를 바꾸면 어떻게

될까? 어려움이 다음 예에 숨어있다. $\int_0^2\int_0^{\sqrt{3-x^2}} 6ydydx = \int_0^2 (9-3x^2)dx = 10$과 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sqrt{2-3\cos\theta}} 2rdrd\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(2-3\cos\theta)d\theta = \pi - 3$이다.

2) 이중적분이 잘못된 풀이가 정답을 이끈 경우

$$\int_0^2\int_0^2 (16-x^2-2y^2)dxdy = \left[16xy - \frac{x^3y}{3} - 2x\frac{y^3}{3}\right]_{x=y=0}^{x=y=2} = 64 - \frac{16}{3} - \frac{32}{3} = 48.$$

다음 풀이는 잘못된 가정이 있지만 정답을 얻는다.

$$I = \int_0^1\int_0^1 (x^2+y^2)dxdy = \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 y^2 dy = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=1} + \left[\frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Fubini의 정리의 적용에서 특별한 경우는 $\int_a^b\int_c^d f(x)g(y)dxdy = \int_a^b f(x)dx + \int_c^d g(y)dy$이다.

3) 정확한 적분구간을 찾아내지 못해 $\ln 4 = \frac{6}{5}$을 이끌어 낸다.

곡선 $y = \frac{x}{x^2+1}$과 $5y = x$로 둘러싸인 넓이를 이중적분으로 계산하면,

$A_1 = 2\int_0^2\int_{\frac{x}{5}}^{\frac{x}{x^2+1}} dydx = \ln 5 - \frac{4}{5}$이다. 그러나 x에 대해 우선 적분하면,

$A_2 = 2\lim_{\epsilon\to 0}\int_\epsilon^{\frac{2}{5}}\int_{\frac{1-\sqrt{1-4y^2}}{2y}}^{5y} dxdy = \frac{2}{5} - \ln\frac{4}{5}$이다.

따라서, $\ln 5 - \frac{4}{5} = \frac{2}{5} - \ln\frac{4}{5}$ 또는 $\ln 4 = \frac{6}{5}$이다.

그래프의 확인이 필요하다. $x=1$, $y=\frac{1}{2}$에서, $y=\frac{x}{x^2+1}$는 최소값을 갖는 것에 유의한다.b A_2는 $y=\frac{x}{x^2+1}$와 $y=-\frac{2}{5}$로 둘러싸인 부분뿐만 아니라 $y=\frac{x}{x^2+1}$와 $y=\frac{2}{5}$로 둘러싸인 부분을 무시하여 잘못된 답을 만든다. 따라서, 정답은 $A_1 = \ln 5 - \frac{4}{5}$이다.

III. 결 론

여기서 제시된 학습자료가 도움을 주고 중요한 이유는 첫째, 자주 초보 학생들은 프린트나 칠판에 제시된 어느 증명을 의심 없이 받아들이고 적용한다. 잘못 적용하는 예제나 흔히 겪는 실수들을 통해 수학에 대한 비판적인 접근을 가르치는 것은 교수의 역할의 필요하고 중요한 부분이다.

둘째, 미적분에서 잘못된 풀이의 적용 예제가 많이 제시되고 논의되었다. 시험이나 문제풀이 질문을 통해 이들을 다시 확인하거나 유사문제를 숙제로 내어 확인하게 하고 실수를 예방하게 하는 것도 한 방법이 될 것이다. 수준별로 실수의 형태도 다양하지만 여기서는 대학수학을 이해하고 따라오는 학생 중심으로 논의하여 도움을 주려고 하였다.

셋째, 대학수학 수준에서 상상하기 어려운 실수, 어이없는 실수, 자연스런 실수의 예는 $2^{-3} = \frac{1}{6}$, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a+b}$, $\ln(a+b) = \ln a + \ln b$, $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha + \sin\beta$, $(fg)' = f'g'$, $\int \frac{1}{x}dx = \ln x + C$를 이용하여 $\int \frac{1}{x^3}dx = \ln x^3 + C$라고 답하는 경우 등이다. 이런 실수를 하는 학생이 많은 것이 현재 대학수학 수업의 현실이다. 그러나 실수라고 간과하지 말고 깊이 있게 들여다보면 성립하는 경우가 있고 흥미 있는 예제도 찾아볼 수 있다. $(fg)' = f'g'$의 경우 곱의 도함수는 도함수의 곱이라고 잘못 생각하는 학생도 있다. 물론 대부분의 학생은 정확한 곱의 법칙을 알고 있을 것이다. 그러나 잘못된 곱의 법칙이 성립하는 경우도 있다. f 또는 g가 0인 경우 또는 f와 g가 상수인 경우(Lewis G. Maharam & Edward P. Shaughenessy, 1976)$(fg)' = f'g + fg' = f'g'$이다. 잘못된 곱의 법칙이 성립하는 4쌍의 예를 알아보면 다음과 같다.

$$f(x) = \sin x + \cos x, g(x) = \sqrt{e^x \csc x},\ f(x) = xe^x,\ g(x) = e^{\frac{x^2}{2}+x},$$
$$f(x) = e^{-\cot\frac{x}{2}},\ g(x) = \sec x + \tan x, f(x) = \sinh x,\ g(x) = e^{\frac{e^{2x}+2x}{4}}$$

또 일반으로 성립하는 경우는 주어진 g에 대해 $f = Ce^{\int \frac{g'dx}{g'-g}}$이다. 더 많은 예를 논문(Andrejs Dunkels & Lars-Erik Persson, 1980)에서 찾을 수 있다. 이런 경우 발견된 실수를 통해 흥미 있고 교훈적인 의미를 얻고 수학을 가깝게 하려는 것이다.

넷째, 실질적인 문제를 풀기 위해 수학의 이론적인 지식에 익숙해야 한다. 실수를 지적하고 구체적인 사례를 들어 설명하는 것은 학생들이 이해하고 있는 수학이론을 깊이 있고 확실하게 하는데 도움을 준다. 학습지도의 효과적인 방법의 하나가 될 수 있다. 또 시험은 학습과정의 필수적인 부분이고 학생들도 인정하는 부분이다. 여기서 제시된 예들이 학생들이 치른 시험이나 문제풀이, 숙제, 수업경험에서 얻은 자료들이다. 학생들이 평소에 눈여겨보지 못한 부분이 발견되고 여과되는 과정을 잘 이용하고 수학학습에 도움을 주는 자료개발의 보물창고를 수학의 어떤 주제의 이해를 증대시키는데 참

고해야 한다. 시험문제 유형도 개발하고 엉터리로 접근한 과정이 정답처리 되는 것을 막도록 하며 수업에서 강조할 주제를 선별하고 실수에 대한 주의를 환기시키는데 이용되어야 한다.

다섯째, 적분 결과가 같은 경우 이들을 과제로 내어주어 자료를 모아 새로운 내용을 얻는 것도 흥미 있는 학습방법이 될 것이다. 이를테면 $\int \tan x \sec^2 x dx$를 구하는데 $u = \sec x$로 치환하면 $\int \tan x \sec^2 x dx = \frac{\sec^2 x}{2} + C$이고, $u = \tan x$로 치환하면 $\int \tan x \sec^2 x dx = \frac{\tan^2 x}{2} + C$이다. 여기서 삼각등식 $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$의 새로운 증명을 얻을 수 있다. 또 $\frac{d}{dx}(\sin^{-1}(\frac{2x}{1+x^2})) = \frac{2}{1+x^2}$에서 등식 $\sin^{-1}(\frac{2x}{1+x^2}) = 2\tan^{-1}x$가 따라 나오고 $u = \frac{2x}{1+x^2}$이라 치환하면 $\int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{2}sin^{-1}(\frac{2x}{1+x^2}) + C$가 된다. 적분상수의 차이 때문에 잘못이라고 여겨지는 것도 생각을 다시 하여 활용하는 예를 다양하게 만들어 볼 수 있다. 적분의 예를 다른 주제로 옮겨 잘못을 활용하여 새로운 결과나 또 다른 접근방법을 찾아내게 할 수도 있다.

여섯째, 새로운 내용을 처음 가르치거나 새로운 주제를 도입할 때 실수하기 쉬운 내용을 정리하여 미리 학생들에게 과제로 내어주고 그 문제를 해결하는 동안 많은 흥미 있는 질문으로 이끌도록 준비를 하여 학생들에게 동기부여를 한다. 예를 들면 함수의 역함수와 함수의 역이 언제 같은가 ($f^{-1}(x) = \frac{1}{f(x)}$)?(Robert Anschuetz II & H. Sherwood, 1996) 이를 통해 원래 의도하지 않은 부수적인 결과를 얻을 수 있다.

일곱째, 경험이 해를 얻는데 실수를 줄일 수 있다. 평소에 이런 유형의 문제를 접했다면 큰 혼란없이 정답에 이를 수 있는 것을 당황하여 문제풀이를 그르칠 수 있다. 이를테면 무리방정식에서 무리식을 제거하는 과정은 여분의 해를 얻을 수 있다. 극단적인 예를 소개하면, 방정식 $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1$을 양변을 제곱하여 다음 식을 얻고

$$2x + 11 - 10\sqrt{x-1} + 2\sqrt{(x+3-4\sqrt{x-1})(x+8-6\sqrt{x-1})} = 1$$

또 간단히 하면 $\sqrt{x^2 + 35x - 10(x+5)\sqrt{x-1}} = 5\sqrt{x-1} - (x+5)$이다. 다시 제곱하고 간단히 하면 $x^2 + 10x + 25 = x^2 + 10x + 25$가 된다. 이 식에서 해에 대한 정보를 얻을 수 없다. 왜 이런 일이 일어났는지를 알아보면 방정식은 $|\sqrt{x-1} - 2| + |\sqrt{x-1} - 3| = 1$과 동치이다. $5 \leq x \leq 10$인 모든 x가 방정식을 만족한다. 따라서 해는 무수히 많다.

여덟째, $(0.5) + (0.2)(0.3) = (0.5 + 0.2)(0.5 + 0.3) = (0.7)(0.8) = 0.56$에서 실제로 $a + bc = (a+b)(a+c) \Leftrightarrow a+b+c = 1$ 또는 $a = 0$이다. 이런 예에 대해 어떻게 대처해야 하는가? 엉터리 계산이고 우연하게 맞춘 것이라고 무시할 수도 있고 이 식이 성립하는 근거를 찾아 창의

적인 태도라 칭찬을 할 수도 있다. 오류도 차분히 알아보면 그 이유가 있고 이를 분석하고 체계화하는 과정에서 수학개념을 확인하게 되는 중요한 요소가 있음을 느끼게 한다.

많은 교사들은 학습에서의 오류를 태도가 나쁘다거나 노력이 부족하여 나타나는 나쁜 행실로 취급한다. 학습위기를 적절히 관리하기 위해서 이 두 가지는 명확히 구별되어야 한다. 진정으로 나쁜 태도는 받아주지 않는 것이 적절하다. 그러나 과제오류는 완성해 가는 과정의 특성이며 학습상황의 일부로 간주되어야 한다. 오류는 감추어서도 안되고 자신이 모른다는 사실을 남들에게 감추고 싶은 마음에서 숨겨서도 안 된다. 오히려 오류자체에 관심을 가져야 하며 오류에 대한 이해는 새로운 목표가 된다(리처드스켐프/ 황우형옮김, 2000).

여기서 제시된 이유들이 완전한 설명이 되지 않을 경우도 알아보는 것이 또 다른 학습이 될 수 있다. 부수적인 흥미 이외에 이들 예제들은 미분적분학 개념의 깊은 이해와 감상을 위한 도약대를 제공할 것이다. 이와 같은 방법으로 예제들은 수학적 합리성에 대해 바람직스러운 정확성을 증대시키는데 도움을 주어야한다. 실수의 분석은 수학적 개념을 가르치는데 중요하다. 너무 잘못된 표현이나 증명을 무리하게 제공하면 학생들을 잘못 이끌 수도 있다. 정확한 내용 전달이나 풀이가 주를 이루고 실수에 대한 내용은 양념으로 여기는 것이 학습지도에 유용할 것이다. 그러나 이러한 자료의 개발은 학생들의 수준에 맞추어야 한다. 체계적인 연구가 폭넓게 이루어지고 모두가 쉽게 이용할 수 있도록 자료를 모으는 대학수학 담당자들의 노력이 필요하다. 정상적인 학습내용 전달도 어려운 현실에서 이러한 방법이 효과를 가지려면 배우는 사람과 가르치는 사람 모두 여유가 있게 학습에 임해야 하고 학습에 이르는 길이 바로 가는 길, 돌아가는 길, 잘못된 길 등 여러 가지가 있을 수 있지만 수학학습에 유익하고 수학개념 이해에 도움이 된다면 잘못된 길도 헤매어보고 바른 길로 찾아나갈 수 있어야 한다.

이용할 수 있는 많은 자료를 문헌(Eugene P. Northrop, 1944/ W. Leitzmann, 1953/ D. A. Maxwell, 1961/ V. M. Bradis, V. L. Minkovskii and A. K. Kharcheva, 1963/ Ya. S. Dubov, 1963/ Bryan H. Bunch, 1982/ Barry Cipra, 1989/ Phillip J. Sloan, 1989/ Daniel Fendel & Diane Resek, 1990/ Bruce R. Johnson, 1991/ Jingcheng Tong, 1999)등에서 찾을 수 있고 구체적 활용은 학습주제와 학생들의 능력과 수준에 따라 선택되고 재구성되어 지도되어야 한다.

참 고 문 헌

김병무 (2005). 대학수학에서 실수를 이용한 학습지도, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, **19(1)**, pp.45-55.

리처드스켐프/ 황우형옮김 (2000). 수학학습심리학, 서울; (주)사이언스북스.

Abramovit B.; Berezina M. & Berman A. (2002). Incorrect but Instructives, *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.*, **33**, pp.465-475.

Andrejs Dunkels & Lars-Erik Persson (1980). Creative Teaching by Mistakes, *Two-Year College Mathematics Journal*, **11(5)**, pp.296-300.

Barry Cipra (1989). *Mistakes and how to find them before the teacher does: A calculus supplement(2nd ed.)*, Academic, HBJ, San Diego.

Berezina M. & Berman A. (2000). 'Proof reading' and multiple choice tests, *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.*, **31**, pp.613-619.

Bradis V. M.; Minkovskii V. L. & Kharcheva A. K. (1963), *Lapses in Mathematical Reasoning*, Pergamon, Oxford.

Bruce R. Johnson (1991). New Scheme for Multiple-Choice Tests in Lower-Divison Mathematics *American Mathematical Monthly*, **98(5)**, pp.427-429.

Bryan H. Bunch (1982), *Mathematical Fallicies and Paradox*, Van Nostrand, New York.

Buma Abramovitz & Miryam Berezina (2003). Useful Mistakes, *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.*, **34**, pp.756-764.

Daniel Fendel & Diane Resek (1990), *Foundations of Higher Mathematics : Exploration and Proof*, Addison-Wesley, Reading, MA.

Dubov Ya. S. (1963), *Mistakes in Geometric Proofs*, Heath.

Ed Barbeau (1989-2005), Fallacies, Flaws and Flimflam, *College Mathematics Journal*, **20(1)-36(4)**.

Eugene P. Northrop(1944), *Riddles in Mathematics : A Book of Paradoxes*, Van Nostrand.

Fred Halpen(1985), Using Multivariable Chain Rule, *American Mathematical Monthly*, Vol. **92**, No.**2**,

144-145.

George B. Thomas, Jr. & Ross L. Finney (1992). *Calculus and Analytic Geometry Part I, II*,Addison-Wesley Publishing Company.

Grinstein Lousie S. (1974). Calculus by Mistake, *Two-Year College Mathematics Journal*, **5(4)**, 49-5.

Herb Silverman (1990), Trigonometric Identities through Calculus, *College Mathematics Journal*, **21(5)**, p.403.

Jingcheng Tong (1999). The Mean Value Theorems of Lagrange and Cauchy, *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.*, **30**, pp.456-458.

Leitzmann W. (1953), *Wo Skekt der Fehler?*, Teubner, Stuttgart.

Lewis G. Maharam & Edward P. Shaughenessy(1976), When Does (fg)'=f'g'?, *Two-Year College Mathematics Journal*, **7(1)**, pp.38-39.

Maxwell D. A. (1961), *Fallacies in Mathematics*, Cambridge.

Miller K. W. (1968), A Calculus Fallacy, *Mathematics Magazine*, **41(2)**, pp.90-91.

Peter Hilton (1993). The Tyrany of Tests, *American mathematical Monthly*, **100(4)**, pp.365-369.

Phillip J. Sloan (1989),The significance of the insignificant constants, Mathematics Teacher, **82**, pp.186-188.

Robert Anschuetz II & Sherwood H.(1996). When Is a Function's Inverse Equal to Its Reciprocal?, *College Mathematics Journal*, **27(5)**, pp.388-393.

Walsh J. L.(1927), A Paradox Resulting from Integration by Parts, *American Mathematical Monthly*, **34(2)**, pp.88.

The Significance of Mistakes and Fallacies in Teaching College Mathematics

Kim, Byung Moo

School of General Arts, Chungju National University, Chungju-Shi, Chungbuk 380-702, Korea

E-mail: bmkim6@hanmail.net

When we teach mathematics in college, we find a lot of mistakes, fallacies and flaws in the solution of the students. In this paper, we presented a variety of examples of mistakes and fallacies, including wrong proofs, misinterpreted definitions and the mistaken use of theory. The examples, taken from different classes and subjects, are based on our own experience of teaching mathematics.

As the previous research argued, such mistakes, fallacies and flaws should be considered as natural phenomena in the students' progress and should be analyzed systematically for the more effective education. By providing a wide-ranging examples of mistakes and fallacies, and detailed analyses of them, we emphasized the significance of the analysis of mistakes and fallacies and proposed that more careful attention should be paid on the collection and development of teaching materials in the area of mistake and fallacy analysis. We hope that this study would be a meaningful contribution to the teaching of mathematics in college.

* ZDM Classification : D75

* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D70

* Key Words : Mistakes and Fallacies of Solving Problems, College Mathematics Instruction