Journal of Korean
Data & Information Science Society
2007, Vol. 18, No. 1, pp. 11 ~ 16

Modelling KOSPI200 Data Based on GARCH(1,1) Parameter Change Test[1)]

Siyun Park[2)] · Sangyeol Lee[3)]

Abstract

Since the seminal work of Engle (1982), many researchers and practitioners have developed ARCH-type models to deal with volatility modelling, which, for instance, is crucial to perform the task of derivative pricing, measuring risk, and risk hedging. In this paper, we base the GARCH(1,1) model to analyze the KOSPI200 data, and perform the CUSUM test for detecting parameter changes in the GARCH model. It is shown that the data suffers from a parameter change.

keywords : CUSUM Test, GARCH Model, Parameter Change, Volatility

1. 서문

자산수익률의 변동성은 투자, 유가증권평가, 리스크매니지먼트, 재정정책의 결정 등에 있어 매우 중요한 변수이다. 변동성모형에 대하여는 Engle (1982)이 자기회귀 조건부 이분산 (Autoregressive Conditional Heteroskedastic : ARCH) 모형을 제안한 이후, ARCH-류 모형에 대한 수많은 이론적, 실증적 연구가 있어왔는데, 이는 ARCH-류 모형이 금융시장에서 관측되는 재정 경제시계열자료의 변동성의 특징을 잘 설명하기 때문이다. Bollerslev (1986)는 과거시점의 변동성이 현재와 미래시점의 변동성에 영향을 주도록 고려함으로서 Engle (1982)의 ARCH모형에 대한 일반화 자기회귀 조건부 이분산 (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedastic : GARCH)모형을 제안하였는데, 이는 우리가 자기회귀 모형 (Autoregressive Models)에서 자기회귀 이동평균모형 (Autoregressive Moving Average Models)으로의 일반화를 고려하는 것과 유사하다. Bollerslev (1986)의 GARCH(p,q)모형은 다음과 같다:

---

1) 본 연구는 한국과학재단 특정기초사업의 지원을 받아 수행되었음 (grant No. R01-2006 -000 -10545-0).

2) 연수연구원, 151-742 서울특별시 관악구 신림동 산 56-1 서울대학교 자연과학대학 통계학과
Email : siyun.park@gmail.com

3) 교수, 151-742 서울특별시 관악구 신림동 산 56-1 서울대학교 자연과학대학 통계학과

$$X_t = h_t \xi_t, \quad \xi_t \sim iid\ N(0,1) \tag{1.1}$$
$$h_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \beta_i h_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \alpha_j X_{t-j}^2 .$$

단, $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i + \sum_{j=1}^{q} \beta_j < 1$ 일 때 $\{X_t\}$는 정상시계열이다. 이후, GARCH(p,q) 모형은 금융시장의 조건부분산 예측을 위한 모형으로서 널리 사용되어 왔으며, 특히, GARCH (1,1)모형은 최근까지 많은 실증연구의 대상이 되고 있다. (Hansen and Lunde (2005) 참조).

한편, Lee, Tokutsu, and Maekawa (2004)는 다음과 같은 ARCH(∞) 오차를 갖는 일반적인 회귀모형에서 모수 $\boldsymbol{\theta}$의 변화에 대한 검정법을 제안하였다.

$$y_t = \boldsymbol{\beta}' z_t + \epsilon_t, \tag{1.2}$$
$$\epsilon_t = h_t \xi_t,$$
$$h_t^2 = a(\boldsymbol{\theta}) \sum_{j=1}^{\infty} b_j(\boldsymbol{\theta}) \epsilon_{t-j}^2,$$

단, ξ_t 는 평균 0, 분산 1인 서로 독립인 확률변수이고, $\{z_t\}$ 는 p차원 강정상(strictly stationary) 확률과정이며, $a(\boldsymbol{\theta}), b(\boldsymbol{\theta})$는 d차원 실수 공간의 부분집합에서 정의된 음이 아닌 연속 실함수이고, 모든 $\boldsymbol{\theta}$에 대하여, $a(\boldsymbol{\theta}) > 0$, $\sum_{j=1}^{\infty} b_j(\boldsymbol{\theta}) < \infty$이다. 모형 (1.2)는 GARCH($p,q$) 모형을 포함하며, 특별히, $z_t = 0$, $\boldsymbol{\theta} = (\omega, \alpha, \beta)$, $\omega > 0$, $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta < 1$, $a(\boldsymbol{\theta}) = \omega / (1 - \alpha - \beta)$, 그리고, $b_j(\boldsymbol{\theta}) = \alpha \beta^{j-1}$이면 GARCH(1,1) 모형이 된다. Lee, Tokutsu, and Maekawa (2004)는 모수 $\boldsymbol{\theta}$의 변화에 대한 검정법으로서, 잔차들 $\hat{\xi}_t := \hat{\epsilon}_t / \hat{h}_t$의 누적제곱합에 기초하여 다음과 같은 검정통계량 T_n을 제안하였고, B^0가 Brownian bridge일 때, T_n의 극한분포가 $\sup_{0 \leq u \leq 1} |B^0(u)|$이 됨을 증명하였다:

$$T_n := \frac{1}{\sqrt{n}\,\hat{\tau}} max_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_{t=1}^{k} \hat{\xi}_t^2 - (\frac{k}{n}) \sum_{t=1}^{n} \hat{\xi}_t^2 \right| , \tag{1.3}$$

단, $\hat{\tau}^2 = \widehat{Var}(\xi_t^2) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} \hat{\xi}_t^4 - (\frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} \hat{\xi}_t^2)^2$, n은 관측값의 수임.

이들의 연구는 본래 서로 독립인 확률변수들의 분산의 변화에 대한 검정법을 제안한 Inclán and Tiao (1994)의 아이디어에 기초한 것이다. 시계열에서 모수변화에 대한 논문으로는 Lee et al. (2003)과 이에 인용된 논문들을 참조하기 바란다. 이들로부터 보듯이 모수변화 검정에 대한 연구 결과가 세계적으로 상당부분 진행되어 왔으나, 정작 우리나라의 KOSPI200 (Korea Stock Price Index 200)에 대한 사례는 찾아보기 쉽지 않다. 따라서 본 논문에서는 앞서 설명한 Lee, Tokutsu and Maekawa (2004)의 누

적합 검정법을 KOSPI200의 일간 수익률자료에 적용하여 모수변화 검정을 시행하도록 한다. 이때, 이용되는 기저 모형으로는 현장에서 가장 빈번히 쓰이고 있는 GARCH(1,1) 모형을 이용하도록 한다.

2. KOSPI200 수익률 분석

앞서 기술하였듯이, 본 장에서는 GARCH(1,1) 모형에 기초하여 KOSPI200 수익률의 모수변화를 검정하도록 한다. 이를 위하여 차분한 KOSPI200 지수가 다음과 같은 GARCH(1,1) 모형을 따른다고 가정하고

$$\begin{aligned} y_t &= h_t \cdot \xi_t, \quad \xi_t \sim i.i.d.(0,1) \\ h_t^2 &= \omega + \alpha y_{t-1}^2 + \beta h_{t-1}^2 \end{aligned} \tag{2.1}$$

이를 바탕으로 다음과 같은 가설검정을 시도 한다:

$$\begin{aligned} &H_0 : \boldsymbol{\theta} = (\omega, \alpha, \beta) \text{ 는 } t = 1, \cdots n \text{에 대해서 상수이다. vs.} \\ &H_1 : \boldsymbol{\theta} \text{는 어떤 } t \text{시점에서 } \boldsymbol{\theta}' \text{으로 변한다.} \end{aligned} \tag{2.2}$$

이 때, 이에 사용되는 누적합 통계량은 다음과 같다:

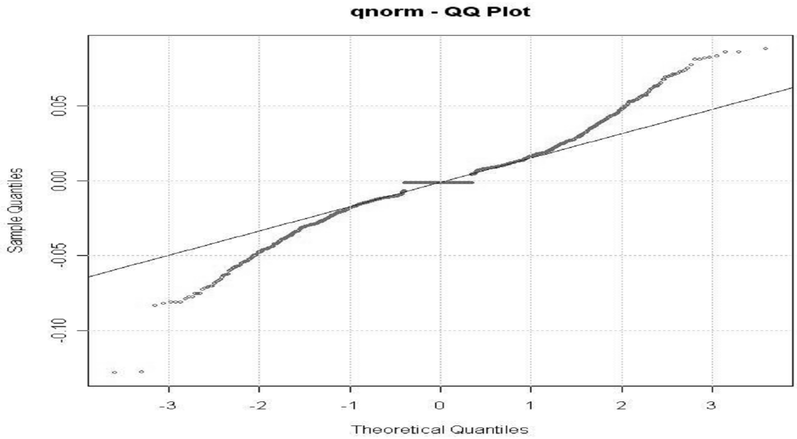
$$\widehat{T}_n := \frac{1}{\sqrt{n}\,\hat{\tau}} max_{1 \le k \le n} \left| \sum_{t=1}^{k} \hat{\xi}_t^2 - (\frac{k}{n}) \sum_{t=1}^{n} \hat{\xi}_t^2 \right|,$$

단, $\hat{\xi}_t^2 = y_t^2 / \hat{h}_t^2$, $\hat{h}_t^2 = \hat{\omega} + \hat{\alpha} y_{t-1}^2 + \hat{\beta} \hat{h}_{t-1}^2$, $\hat{\tau}^2 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} \hat{\xi}_t^4 - (\frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} \hat{\xi}_t^2)^2$이며, $\hat{\mu}, \hat{\omega}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}$는 각각 $\mu, \omega, \alpha, \beta$의 조건부 최대우도추정량이다.

1995년 1월 3일부터 2006년 6월까지 3016개의 KOSPI200 일자료를 이용하여 (2.1)의 GARCH(1,1)모형을 적합한다. 적합된 결과는 다음과 같다.

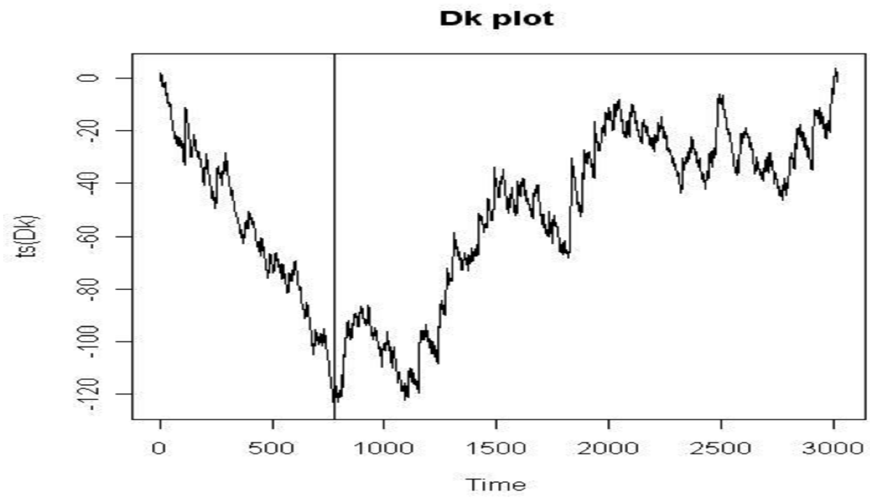
$$\begin{aligned} y_t &= h_t \cdot \xi_t, \\ h_t^2 &= 0.0181 + 0.051 y_{t-1}^2 + 0.944 h_{t-1}^2, \quad t = 1, \cdots, 3016. \end{aligned} \tag{2.3}$$

위의 적합된 식에서 알 수 있듯이 $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 0.995 \simeq 1$으로 IGARCH(1,1)모형이 얻어졌다. 모수에 변화가 있을 때, IGARCH(1,1)모형이 적합됨은 알려진 사실이다. 한편, 다음의 <그림1>은 잔차를 이용한 QQ plot으로 실제 오차항이 정규분포를 따르지 않음을 시사하고 있다.

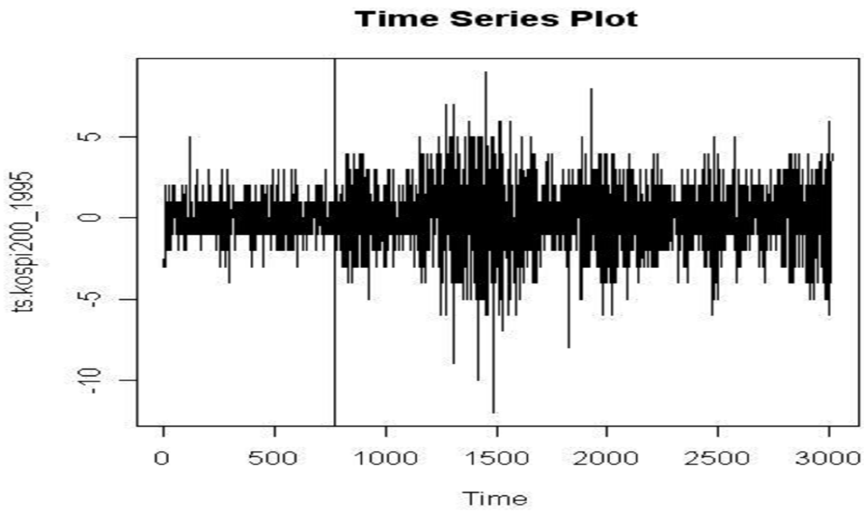


<그림 1> GARCH(1,1)모형 적합한 식 (2.3)에서 얻어진 잔차에 대한 Quantile-Quantile Plot

누적합 검정통계량 $\widehat{T_n}$를 적용한 결과 t=776 (1997년 8월 26일) 에서 모수변화가 있다는것이 유의하다는 결과를 얻었다. 다음은 모수 변화점 탐지를 위한 $D_k = \sum_{t=1}^{k} \hat{\xi}_t^2 - (\frac{k}{n}) \sum_{t=1}^{n} \hat{\xi}_t^2$ 그림으로 (Incl$\acute{a}$n과 Tiao(1994) 참조), 여기서, $|D_k|$가 최대가 되는 지점이 변화점이 된다.



<그림 2> 자료의 시계열 그림



<그림 3> 차분한 자료의 시계열 그림

다음은 $t=1,\cdots 775$ 와 $t=776,\cdots,3016$까지의 두 개의 시계열자료에 대하여 각각 GARCH(1,1)모형을 적용한 결과이다. 두 개 모형에 대해서도 잔차의 정규성검정은 유의하지 않았다.

$$y_t = h_t \cdot \xi_t,$$
$$h_t^2 = 0.121 + 0.1 y_{t-1}^2 + 0.8 h_{t-1}^2, \quad t=1,\cdots,715.$$

$$y_t = h_t \cdot \xi_t,$$
$$h_t^2 = 0.041 + 0.051 y_{t-1}^2 + 0.940 h_{t-1}^2, \quad t=716,\cdots,3016.$$

위의 결과로부터 KOSPI 200자료는 한 번의 모수변화가 있으며 특히 후반부 자료가 오차가 정규분포가 아닌 IGARCH 모형을 따름이 밝혀졌다. IGARCH 모형은 상대적으로 충격이 상당기간 지속되는 자료에 알맞은 모형으로 모수에 변화점이 존재하는 경우에 주로 나타나는 모형이라고 알려져 있는데, 왜 이런 현상이 나타나는지에 대한 보다 상세한 실증분석이 수행되어야 한다고 생각된다. 이는 일반적인 통계학의 범주를 다소 벗어난 주제이므로 본 논문에서 본격적인 연구를 진행할 수 없으나, 본 연구의 결과가 실증적 주가 분석에 기초적인 자료로 활용될 수 있다고 사료된다.

참고문헌

1. Andersen, TG. and Bollerslev, T. (1998). Answering the skeptics : Yes, standard volatility models do provide accurate forecasts. *International Economic Review,* **39**(4), 885-905.
2. Bollerslev, T. (1986). Generalized Autoregressive Heteroskedasticity. *Journal of Econometrics,* **31**, 307-327.
3. Engle, R. F. (1982). Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of UK Inflation. *Econometrica*, **50**, 987-1008.
4. Hansen, P. R. and Lunde, A. (2005). A Forecast Comparison of Volatility Models : Does Anything Beat a GARCH(1,1)? *Journal of Applied Econometrics,* 20, 873-889.
5. Inclán, C. and Tiao, G. (1994). Use of Cumulative Sums of Squares for Retrospective Detection of Changes of Variance, *Journal of the American Statistical Association,* 89, 913-923.
6. Lee, S., Ha, J., Na, O. and Na, S. (2003) The Cusum of Test for parameter Change in Time Series Models, *Scandinavian Journal of Statistics.* **30,** 781-796.
7. Lee, S., Tokutsu, Y., and Maekawa, K. (2004). The Cusum Test for Parameter Change in Regression Models with ARCH Errors. *Journal of Japan Statistical Society* **34**(2), 173-188.
8. Maekawa, K. Lee, S., Tokutsu, Y. and Park, S. (2006). Cusum Test for Parameter Change in GARCH(1,1) Models with Application to Tokyo Stock Data. *Far East Journal of Theoretical Statistic,* **18**(1), 15-23.
9. Poon, SH. and Granger, (2003). Forecasting Volatility in Financial Markets : A Review. *Journal of Economic Literature : Theory and Method,* **29**(2), 478-539.

[2006년 10월 접수, 2006년 12월 채택]