

$\alpha-\beta$ 추적 필터 이득 산출 연구

A Study of New Filter Gains for the Alpha-beta Tracker

신상진* 오선진* 홍동희* 박진규*
 Sang-Jin, Shin Sun-Jin, Oh Dong-Hee, Hong Jin-Kyu, Park

ABSTRACT

This paper considers new filter gains for the $\alpha-\beta$ tracker which is optimized particularly to minimize the tracking gate size. Optimizing the performance index which is composed of tracking errors due to target maneuver and measurement noise is not different from the existing method to obtain the $\alpha-\beta$ gains. However, holding the probability 0.997 that a target exists in the tracking gate and minimizing the gate size produce the new result not similar to the existing $\alpha-\beta$ gains.

1. 서론

레이더의 표적 추적은 표적위치 측정치로부터 표적의 속도 및 가속도를 추정하여 미래의 표적위치를 예측함으로써 이루어진다. 표적추적필터는 가장 단순한 형태인 $\alpha-\beta$ 필터에서 계산량이 비교적 많이 요구되는 다중모델을 이용한 필터^[1]로 발전되어 왔지만 다수의 표적을 동시에 추적하고 감시영역을 계속하여 스캔해야 하는 교전상황의 경우에는 아직까지 계산이 간단한 $\alpha-\beta$ 를 선호하고 있다.

추적 필터의 성능향상을 위해서는 신호 대 잡음비를 높임과 동시에 표적의 기동에 의한 오차를 최소화 시켜야 한다. [2]에서는 신호 대 잡음비 및 표적운동 변화에 대한 천이응답속도를 최소화 하는 α 와 β 관계식을 구하였다. [3]에서는 tracking index를 정의하여 [2]의 관계식에서 α 값을 구하는 방법을 제시하였

다. [4]에서는 필터 이득에 대한 해석적 방법을 구하여 방정식의 근을 구하는 수치적 방법에서 벗어나 실시간 계산을 가능하게 하였다. [5]에서는 잡음에 대한 smoothing과 표적기동에 대한 천이 응답과 정상상태 오차를 성능지수로 두어 최적화하는 과정을 제시하였다.

추적상황에서 클러터의 영향을 최소화하기 위해 게이트의 크기를 줄이는 것이 필요하지만 이러한 경우 표적이 게이트에 들어올 확률도 작아지게 된다. 본 논문에서는 표적이 게이트에 들어올 확률을 0.997(3 σ)로 유지하면서 추적게이트 크기를 최소화 하는 관점에서 필터이득을 구하게 된다. 추적 게이트의 크기가 작아지면서 클러터 영향이 줄어드는 장점을 갖는 동시에 레이더 신호처리기의 계산량을 줄일 수 있는 장점을 갖는다.

2장에서는 필터이득 산출과정과 산출된 필터이득을 [2]의 필터이득과 비교하게 되며 산출과정에서 자세한 유도식은 부록에 통하여 수록하였다. 3장에서는 2장에서 구한 필터이득을 사용하여 미지의 표적기동 크기에 대하여 시뮬레이션을 수행하고 성능을 평가한다.

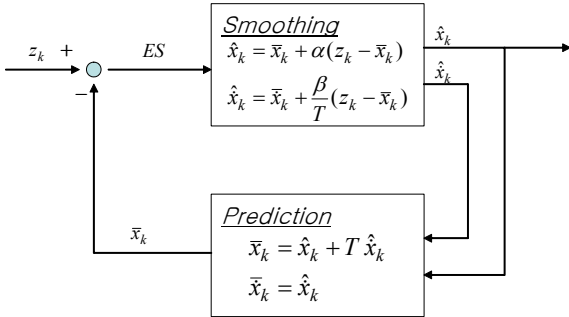
† 2007년 6월 18일 접수~2007년 10월 18일 게재승인

* 국방과학연구소(ADD)

주저자 이메일 : sjshin@add.re.kr

2. 필터 이득 산출

$\alpha - \beta$ 추적 필터의 블럭도를 그림 1에 도시하였다.



[그림 1] $\alpha - \beta$ 추적필터의 블럭도

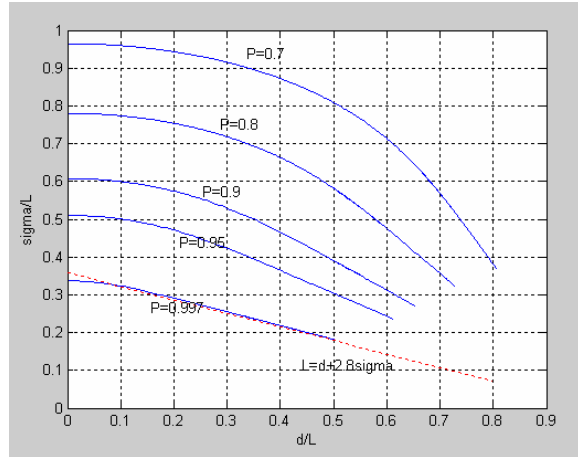
그림 1에 사용된 변수들에 대한 설명은 다음과 같다.

- \hat{x}_k : 표적위치 추정치
- $\dot{\hat{x}}_k$: 표적속도 추정치
- \bar{x}_k : 표적위치 예측치
- $\dot{\bar{x}}_k$: 표적속도 예측치
- z_k : 표적위치 측정값
- T : sampling time interval

z_k 는 표적의 실제 위치에 측정 노이즈가 더해진 형태로서 이때 측정노이즈는 평균이 0이고 분산이 σ_v^2 인 화이트 가우시안 분포를 갖는다. 본 논문에서는 표적의 실제 위치와 표적위치의 예측치(\bar{x}_k)의 차를 추적오차(x_e)로 정의하고 추적오차의 평균은 d 이고 분산은 σ_e^2 인 가우시안 분포를 갖는다고 가정한다. x_e 가 게이트 크기 $2L$ 안에 들어올 확률 $P(-L < x_e < +L)$ 은 다음과 같다.

$$P(-L < x_e < +L) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_e}} \int_0^{L-d} e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sigma_e^2}} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_e}} \int_0^{L+d} e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sigma_e^2}} dx \quad (1)$$

게이트에 들어올 확률 P 와 σ_e , L , d 와의 관계는 그림 2로 나타낼 수 있다.



[그림 2] 확률 P 와 σ_e , L , d 와의 관계와 선형 그래프

그림 2에서 $P=0.997$ 일 때 결과를 선형 그래프를 사용하여 curve fitting을 하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{d}{L} + 2.8 \frac{\sigma_e}{L} = 1 \quad (2)$$

위 결과에 대한 그래프는 그림 2에 적색 점선으로 도시하였다. 식 (2)를 다음과 같이 표현한다.

$$L = d + 2.8\sigma_e \quad (3)$$

식 (3)은 추적오차가 게이트에 들어올 확률이 0.997일 때 성립되는 식이다. $\alpha - \beta$ 추적필터 이득산출의 기준은 추적오차가 게이트에 들어올 확률을 유지함과 동시에 게이트 크기인 L 을 최소화 하는 필터 이득을 구하는 것으로 하여 다음과 같은 수식으로 나타낼 수 있다.

$$\min_{\alpha, \beta} \{L(\alpha, \beta)\} = \min_{\alpha, \beta} \{d(\beta) + 2.8\sigma_e(\alpha, \beta)\} \quad (4)$$

식 (4)의 d 와 σ_e 는 다음과 같이 필터이득 부분과 필터 이득과 관계없는 부분의 곱으로 표현한다.

$$d(\beta) = A_T T^2 \delta(\beta) \quad (5)$$

$$\sigma_e(\alpha, \beta) = \sigma_v \lambda(\alpha, \beta) \quad (6)$$

식 (5)과 식 (6)을 이용하여 식 (4)을 다음과 같이 표현한다.

$$\min_{\alpha, \beta} \left[2.8\sigma_v \left(\frac{A_T T^2}{2.8\sigma_v} \delta(\beta) + \lambda(\alpha, \beta) \right) \right] \quad (7)$$

식 (7)에서 σ_v 는 α , β 와 관계가 없으므로 식 (7)의 최적 해는 다음 식을 만족한다.

$$\min_{\alpha, \beta} \left(\frac{A_T T^2}{2.8\sigma_v} \delta(\beta) + \lambda(\alpha, \beta) \right) \quad (8)$$

위 식에서 δ 는 transient 상태에서 overshoot이 작다고 가정하고 $\max_t \delta(t)$ 의 값이 steady state 상태의 δ 값과 거의 같다고 가정한다. δ 의 steady state 값을 final value theorem^[6]으로 구하면 다음과 같은 결과식을 얻을 수 있다. 자세한 과정은 APPENDIX A에 수록하였다.

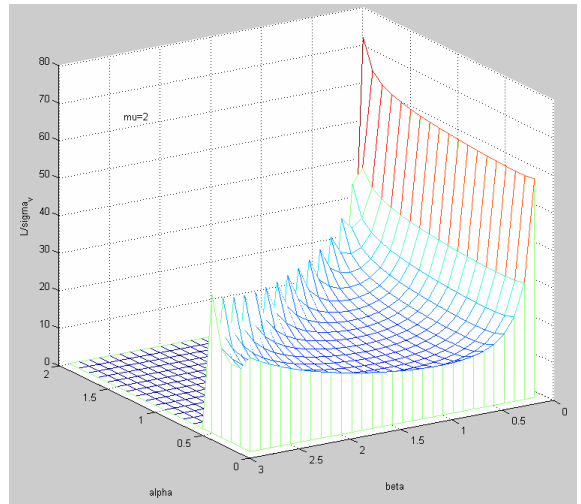
$$\delta = \frac{1}{\beta} \quad (9)$$

식 (8)에서 $\lambda(\alpha, \beta)$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있고 자세한 과정은 APPENDIX B에 수록하였다.

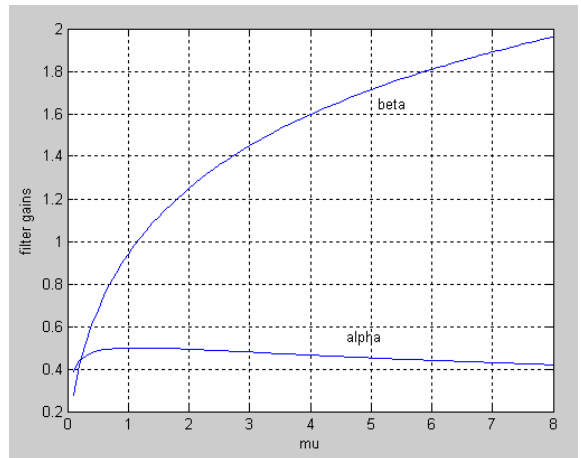
$$\lambda = \sqrt{\frac{2\alpha^2 + \alpha\beta + 2\beta}{\alpha(4 - 2\alpha - \beta)}} \quad (10)$$

식 (8)에서 표적기동과 sampling interval 그리고 측정 노이즈의 표준편차로 구성된 $\frac{A_T T^2}{2.8\sigma_v}$ 을 μ 로 정의한다. 그림 3은 $\mu=2$ 이고 성능지수 L 을 σ_v 로 나눈 값을 3차원 그래프로 나타낸 것이다.

식 (4)를 만족하는 α, β 값은 단 한 개만이 존재하며 수치해석적으로 최적화한 해를 그림 4에 나타냈다. 그림 4는 α 이득과 β 이득의 최적해를 μ 값에 따라 나타낸 것이다.



[그림 3] $\mu=2$ 이고 α, β 에 대한 L/σ_v 곡선

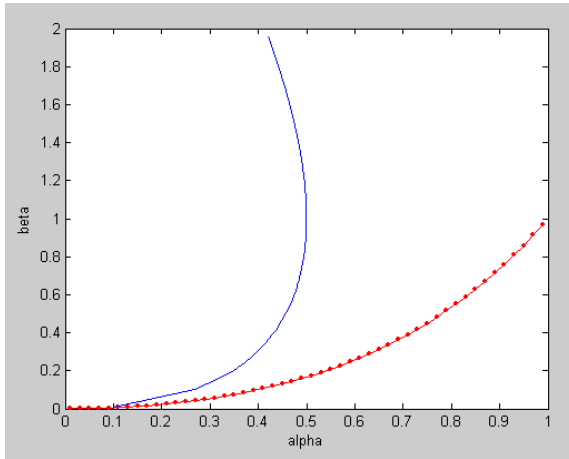


[그림 4] μ 값에 대한 α, β 이득

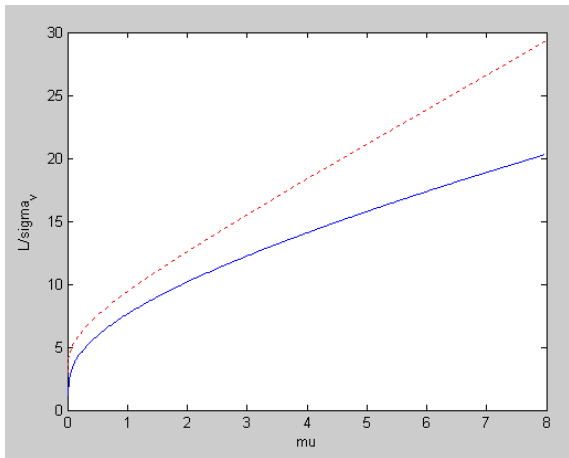
그림 5는 [2]의 필터 이득과 본 논문의 필터 이득 결과를 비교한 것이다. [2]의 최적 해에서 α 이득과 β 이득 최적해 결과는 $\beta = \alpha^2 / (2 - \alpha)$ 으로써 점선으로 표시되어 있다. 본 논문의 결과를 α 에 대한 β 이득 결과는 실선으로 표시되어 있다. [2]의 결과는 α 에 따라 β 이득이 증가하는 단조함수를 갖는 반면에 본 논문의 결과는 α 에 따라 β 값이 급격히 증가하고 단조함수 특성이 보이지 않는 것을 알 수 있다.

그림 6은 [2]의 결과와 본 논문의 결과를 사용하여 게이트 크기를 비교한 것이다. [2]의 결과는 α 와

이득관계식만 주어져 있으므로 [3]의 tracking index 사용하면 본 논문의 μ 값을 대신하여 게이트 크기를 비교할 수 있다. 그림 6로부터 본 논문에서 구한 필터 이득을 사용하면 게이트 크기가 [2]의 게이트 크기보다 항상 작음을 볼 수 있다. 이렇게 작은 게이트를 사용하면 레이더 신호처리의 계산량이 작아질 뿐 아니라 클러터에 대한 영향도 작아지게 되는 장점을 갖는다.



[그림 5] α 에 따른 β 그래프



[그림 6] μ 값에 대한 L/σ_v 비교

3. 시뮬레이션

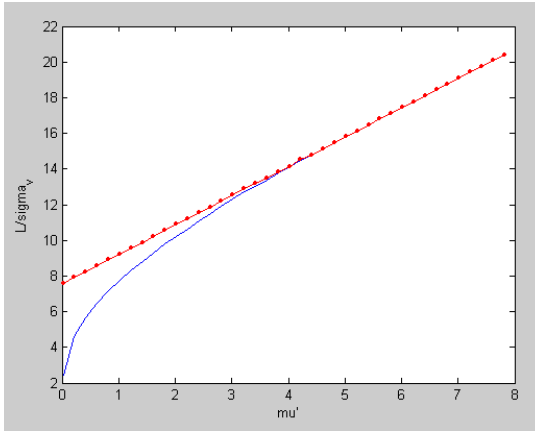
본 논문의 시뮬레이션에 사용되는 α, β 값은 2장에서 구한 최적해를 이용한다. α, β 필터 이득은 μ 를 정의역으로 하고 있다. μ 값에서 표적의 기동은 실제 환경에서 알 수 없는 변수이므로 본 논문에서 추적 필터의 성능분석은 미지에 표적기동에 대해 추적 필터의 성능을 관찰하다. 표적의 기동이 $4g$ 이하에서만 존재한다고 가정하고 필터 이득은 그림 6에서 다음과 같은 식으로 구한다.

$$\mu = \frac{4gT^2}{2.8\sigma_v} \tag{11}$$

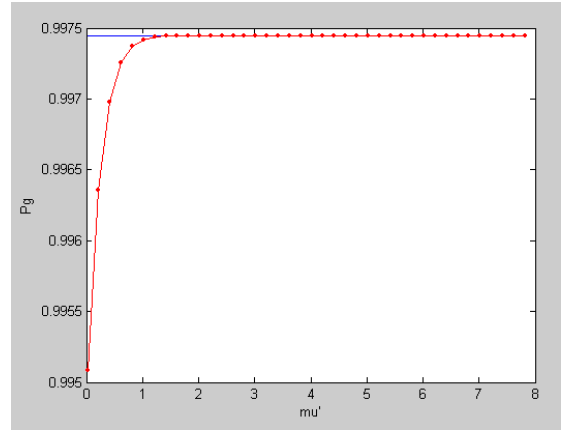
표적의 기동 정보를 정확히 안다는 가정 하에서 필터의 추정성능과 그렇지 못한 경우의 추정성능을 비교하기 위해서 다음과 같이 μ' 을 정의한다.

$$\mu' = \frac{A_T T^2}{2.8\sigma_v} \tag{12}$$

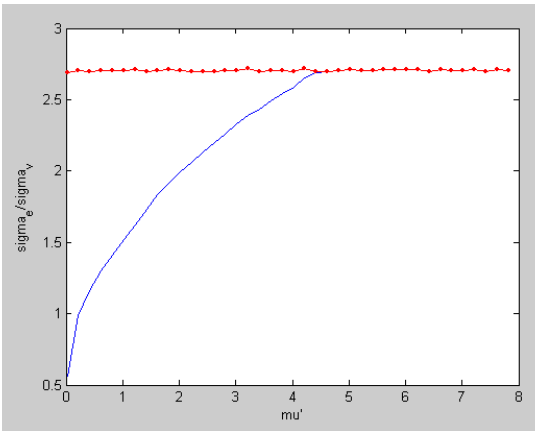
그림 9의 실선은 표적의 기동을 안다는 가정 하에 μ' 에 대해서 L/σ_v 를 나타낸 것이다. 그림 9의 점선은 표적의 기동을 $4g$ 로 했을 때 해당되는 필터 이득을 선택하고 시뮬레이션으로 L 값을 구하여 L/σ_v 를 나타낸 것이다. μ' 이 4 이상일 때 두 결과가 거의 일치하는 모습을 볼 수 있다. 그림 10의 실선은 표적 기동의 크기를 안다는 가정 하에 μ' 에 대해서 λ 값을 나타낸 것이고 점선은 표적의 기동을 $4g$ 로 했을 때 해당되는 필터 이득을 선택하고 시뮬레이션으로 σ_e/σ_v 값을 구한 것이다. 이때 사용된 시뮬레이션 파라미터는 $\sigma_v=0.0178571, T=0.1$ 이다. 그림 11은 같은 경우에 대하여 $d/(A_T T^2)$ 를 구해 비교한 것이다. 그림 12는 이 경우에 게이트에 표적이 들어올 확률을 도시한 것이다. 이러한 시뮬레이션 결과로부터 표적의 기동크기에 대한 정확한 정보가 없을 때에도 본 논문에서 구한 필터이득을 사용하면 추적오차 및 표적이 게이트에 들어올 확률도 만족할 만한 성능을 가질 것으로 판단된다.



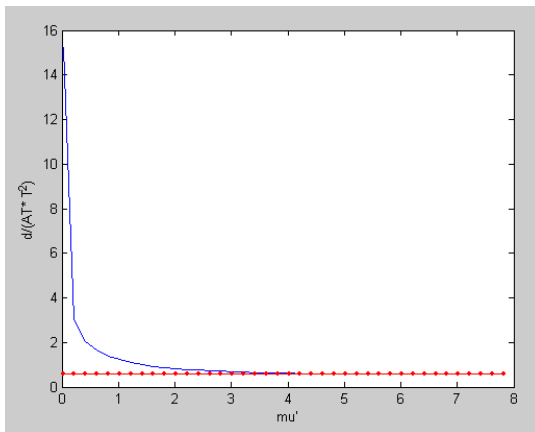
[그림 9] μ' 에 대한 L/σ_v



[그림 12] μ' 에 대한 $P(-L < x_e < +L)$



[그림 10] μ' 에 대한 $\lambda(\sigma_e/\sigma_v)$



[그림 11] μ' 에 대한 $d/(A_T T^2)$ ($\delta(\beta)$)

4. 결론

본 논문에서는 추적 게이트를 최소화 하는 과정에서 $\alpha-\beta$ 필터 이득 산출 방법을 제시하였다. 이러한 산출기법은 추적상황에서 클러터의 영향을 최소화 할 수 있고 동시에 레이더 신호처리기에서는 계산량을 줄어드는 장점을 얻을 수 있다. 이렇게 산출된 이득과 기존의 이득을 비교하였으며 산출된 이득은 표적 기동, 측정 노이즈의 분산, sampling 주기에 대한 함수로 구현하여 resource management가 필요한 레이더에 적합하다고 판단되었다.

APPENDIX A. $\delta(\beta)$ 관계식 유도

$\delta(\beta)$ 를 구할 때는 측정잡음과 관계없고 표적 기동만 고려하므로 z_k 의 노이즈 성분이 없다고 가정하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} z_k &= \frac{1}{2} A_T (Tk)^2 & (A-1) \\ &= (A_T T^2) \frac{1}{2} k^2 \\ &= Dg_k \end{aligned}$$

여기서 $D = A_T T^2$ 으로 정의된 것이고 $g_k = \frac{1}{2} k^2$ 으로

정의 된 것이다. 다음과 같은 치환과정을 사용하여 sampling interval T 와 표적의 기동크기 A_T 와 관계 없는 식을 얻게 된다.

$$\hat{y}_k = \frac{\hat{x}_k}{D} \quad (A-2)$$

$$\bar{y}_k = \frac{\bar{x}_k}{D} \quad (A-3)$$

$$\hat{z}_k = \frac{\hat{x}_k}{D} \quad (A-4)$$

$$\bar{z}_k = \frac{\bar{x}_k}{D} \quad (A-5)$$

$$\hat{z}_k = T\hat{y}_k \quad (A-6)$$

$$\bar{z}_k = T\bar{y}_k \quad (A-7)$$

위의 치환과정으로부터 추적필터식은 다음과 같이 표현된다.

$$\bar{y}_{k+1} = \bar{y}_k + (\alpha + \beta) \cdot (g_k - \bar{y}_k) + \bar{z}_k \quad (A-8)$$

$$\bar{z}_{k+1} = \bar{z}_k + \beta(g_k - \bar{y}_k) \quad (A-9)$$

위 식에서 초기 값 $\bar{y}_0 = 0, \bar{z}_0 = 0$ 으로 하여 양변을 z -transform을 하면 다음과 같이 정리될 수 있다.

$$Z(z) = \frac{\beta}{z-1} (G(z) - Y(z)) \quad (A-10)$$

$$Y(z) = \frac{(\alpha + \beta)(z-1) + \beta}{(z-1)^2 + (\alpha + \beta)(z-1) + \beta} G(z) \quad (A-11)$$

여기서 $Z[z] = Z[\bar{z}_k]$ 이고 $Y[z] = Y[\bar{y}_k]$ 이고 $Z[\cdot]$ 는 z -transform을 의미한다. $d = A_T T^2 \delta$ 이고 $d = \text{Lim}_{k \rightarrow \infty} (z_k - \bar{x}_k)$ 으로 간주 되므로 다음 식이 성립한다.

$$d = (A_T T^2) \text{Lim}_{k \rightarrow \infty} (g_k - \bar{y}_k) = D \text{Lim}_{k \rightarrow \infty} (g_k - \bar{y}_k) \quad (A-12)$$

$$\delta = \text{Lim}_{k \rightarrow \infty} (g_k - \bar{y}_k) \quad (A-13)$$

$e_k = g_k - \bar{y}_k$ 으로 하고 e_k 의 z -transform 형태인 $E[z]$ 를 구해 보면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} E(z) &= G(z) - Y(z) \\ &= G(z) \left(1 - \frac{(\alpha + \beta)(z-1) + \beta}{(z-1)^2 + (\alpha + \beta)(z-1) + \beta} \right) \end{aligned} \quad (A-14)$$

e_k 의 steady state 해인 e_∞ 값을 final value theorem^[8]을 적용하여 구하면 다음과 같다.

$$e_\infty = \text{Lim}_{k \rightarrow \infty} e_k = \text{Lim}_{z \rightarrow 1} (z-1)E(z) = \frac{1}{\beta} \quad (A-15)$$

그러므로 $\delta(\beta) = \frac{1}{\beta}$ 임을 알 수 있고 $d = A_T T^2 \frac{1}{\beta}$ 가 된다.

APPENDIX B. $\lambda(\alpha, \beta)$ 관계식 유도

식 (B1)과 식 (B2)을 다음과 같이 표현한다.

$$\hat{X}_k = \bar{X}_k + K(z_k - H\bar{X}_k) \quad (B-1)$$

$$\bar{X}_k = \Phi \hat{X}_k \quad (B-2)$$

여기서 state transition matrix Φ 와 \bar{X}_k, \hat{X}_k 와 K, H 는 다음과 같이 정의 된 것이다.

$$\begin{aligned} \Phi &= \begin{pmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{X}_k = \begin{pmatrix} \bar{x}_k \\ \bar{z}_k \end{pmatrix}, \\ \hat{X}_k &= \begin{pmatrix} \hat{x}_k \\ \hat{z}_k \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta/T \end{pmatrix}, \quad H = (1 \ 0) \end{aligned} \quad (B-3)$$

식 (C1)과 식 (C2)를 \bar{X}_k 로 정리하여 식 (C11)을 얻는다.

$$\bar{X}_{k+1} = \Phi(I - KH)\bar{X}_k + \Phi Kz_k \quad (B-4)$$

\bar{X}_k 의 공분산 값을 \bar{P}_k 라 하고 \bar{P}_k 의 steady state 값을 $\bar{P}_\infty = \begin{pmatrix} \bar{p}_{11} & \bar{p}_{12} \\ \bar{p}_{21} & \bar{p}_{22} \end{pmatrix}$ 라고 하면 각 성분들은 다음과 같은 방정식으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{pmatrix} \bar{p}_{11} \\ \bar{p}_{12} \\ \bar{p}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-\alpha-\beta)^2 & 2T(1-\alpha-\beta) & T^2 \\ -(1-\alpha-\beta)\beta/T & 1-\alpha-2\beta & T \\ (\beta/T)^2 & -2\beta/T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{p}_{11} \\ \bar{p}_{12} \\ \bar{p}_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (\alpha+\beta)^2 \\ (\alpha+\beta)\beta/T \\ (\beta/T)^2 \end{pmatrix} \sigma_v^2 \quad (B-5)$$

\bar{x}_k 의 분산 σ_x^2 은 \bar{p}_{11} 과 같고 다음과 같이 나타난다.

$$\sigma_x^2 = \bar{p}_{11} = \frac{2\alpha^2 + \alpha\beta + 2\beta}{\alpha(4 - 2\alpha - \beta)} \sigma_v^2 \quad (B-6)$$

그림 1에서 추적오차 x_e 의 표준 편차인 σ_e 는 위 식에서 σ_x 와 같고 λ 의 값은 다음과 같다.

$$\lambda = \sqrt{\frac{2\alpha^2 + \alpha\beta + 2\beta}{\alpha(4 - 2\alpha - \beta)}} \quad (B-7)$$

참 고 문 헌

- [1] S. Blackman and R. Popoli, "Design and Analysis of modern tracking systems", Artech House, 1999.
- [2] T. R. Benedict and G. W. Bordner, "Synthesis of an optimal set of radar track-while-scan smoothing equations", IRE Transaction on automatic control, pp. 27~32, July, 1962.
- [3] P. R. Kalata, "The tracking index : A generalized parameter for $\alpha-\beta$ and $\alpha-\beta-\gamma$ target trackers", IEEE Transactions on AES, AES-20, 1984
- [4] J. E. Gray and W. Murray, "A derivation of an analytic expression for the tracking index for the alpha-beta-gamma filter", IEEE Transactions on AES, Vol. 29, No. 3, July 1993.
- [5] Dirk Tenne and Tarunraj Singh, "Optimal design of $\alpha-\beta-\gamma$ filters", Proceedings of the American control conference, June, 2000.
- [6] Charles L. Phillips and H. T. Nagle, "Digital Control System Analysis and Design, 3rd Edition", Prentice Hall.