# 해외 선물을 이용한 헷지 시의 환 위험 관리 : 헷지 비율의 단순화 및 헷지 효과성

김 훈 용*


## 요 약

본 논문은 현물 가격이 외화로 표시되고 헷지 수단인 상품 선물이 해외에 상장되어서 선물 가격이 외화로 표시된 경우에, 상품 선물과 통화 선물을 이용하여 현물 가격의 위험과 환 위험을 헷지하는 "이중 헷지"를 연구한다. 일반적으로 최소분산 헷지(minimum-variance hedge)를 하려면, 최적 헷지 비율을 구하기 위해 통계 분석을 하여야 한다. 본 논문은 최소 분산 헷지를 하면서도, 통계 분석을 할 필요가 없는 "단순화"한 최적 헷지 비율을 구한다. 헷지 개시 시점의 현물 가격, 상품 선물 가격, 통화 선물 가격 및 환율만으로 쉽고 간단하게 최적 헷지 비율을 구할 수 있다. 헷지 효과성은 1이다.


## Ⅰ. 서 론

미국 및 몇 개의 국가를 제외한 대부분의 국가들은, 극히 제한된 종류의 선물만을 자국의 선물 거래소에 상장하고 있다. 따라서 이러한 국가의 기업이나 개인이 현물 포지션의 가격 위험을 선물로 헷지하고자 할 경우에, 해외에 상장되어 있는 선물을 거래하여 헷지해야 하는 경우가 많다. 경제의 글로벌화로 헷지를 목적으로 하는 해외 상장 선물의 거래는 더욱 증가될 전망이다.

---

* 동덕여자대학교 경영경제학부 교수

헷지를 하기 위하여 해외에 상장된 선물을 거래할 경우에는, 선물의 가격이 해당 외국의 화폐 단위로 표시되기 때문에 환 위험을 부담하게 된다. 원유를 수입하는 한국의 기업이 원유의 가격 위험을 헷지하기 위하여, 달러화로 가격이 표시되는 원유 선물로 헷지하는 경우를 예로 들자. 현물의 노출량과 선물 거래량을 1대 1로 헷지하는 단순 헷지(naive hedge)를 하는 경우를 예로 들자. 만약 원유를 수입하는 시점과 선물의 만기가 일치한다면 달러화로의 원유 수입 가격을 확정시키는 완전 헷지(perfect hedge)를 할 수 있다. 그러나 원-달러의 환율 변화에 대한 위험 노출은 남아 있게 된다. 본 논문은 해외에 상장된 선물로 헷지할 경우에 동반하는 환 위험을 헷지하는 방법을 연구한다.

김훈용 외(2004)는 현물 포지션의 가격 위험을 해외 상장 선물로 헷지할 경우에, 해외 상장 선물과 더불어 통화 선물을 동시에 거래하여 헷지하는 방법을 연구하였다. 즉 해외 상장 선물과 통화 선물을 동시에 거래하는 "이중 헷지(dual hedge)"를 하는 경우에, 헷지 비율은 한 개의 회귀 분석을 함으로써 추정할 수 있음을 밝혔다. 그리고 보다 간단한 헷지 대안인 해외 상장 선물만으로 헷지하는 "단일 헷지(mono hedge)" - 즉 Ederington(1979)의 최적 헷지(optimal hedge) - 를 하는 방법과 헷지 효과성(ex-ante hedge effectiveness)을 비교하였다. 그 결과"이중 헷지"가 "단일 헷지"보다 헷지 효과성이 우월할 수 있음을 밝혔다.[1)]

김훈용 외(2004)의 "이중 헷지"는 실제로 헷지를 하려면 헷지 비율을 회귀 분석으로 추정해야 하므로, 여러 사람들이 널리 쉽게 활용하기에는 한계가 있다. 본 논문은 이를 해결하고자 한다. 즉 본 논문은 몇 가지 가정을 한 후에, 회귀 분석을 할 필요가 없어서 누구나 쉽게 구할 수 있는 "단순화한" "이중 헷지"의 헷지 비율을 개발한다. 부수적으로 "이중 헷지"가 "단일 헷지"보다 헷지 효과성이 우월한 이유를 파악한다.

Adler와 Dumas(1981)는 투자자의 효용을 극대화하는 틀에서, 투자자의 포트

---

1) 김훈용 외(2004)는 김훈용(2004)의 "삼각 헷지(triangular hedge)" 방법을 해외 선물로 헷지하는 경우에 응용한 것이다. 해외 선물로 헷지하는 경우에는 "삼각 헷지"라는 표현보다는 두 가지 선물로 헷지함을 지칭하는 "이중 헷지"가 더 이해하기 쉬운 표현이므로, 본 논문은 "이중 헷지"라고 표현한다.

폴리오의 구성이 투기 포트폴리오와 헷지 포트폴리오로 분리(seperation) 됨을 보였다. 따라서 본 논문은 일반성의 손실이 없이(without loss of generality), 헷지 포트폴리오의 구성에만  초점을 맞춘다. 즉 헷지한 결과의 현금 흐름의 분산을 최소화하는 최소 분산 헷지(minimum-variance hedge)를 연구하고, 헷지 비율을 단순화한다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 제 Ⅱ장은 “이중 헷지”와 “단일 헷지”의 헷지 비율과 헷지 효과성의 표현을 요약한다. 이는 김훈용 외(2004)와 Ederington (1979)의 결과를 요약한 것이다. 제 Ⅱ장은 현물 가격, 선물 가격 및 환율의 확률 분포에 대한 어떠한 가정도 하지 않고, 헷지 비율과 헷지 효과성의 표현을 구한 것이다. 제 Ⅲ장은 현물 가격, 선물 가격 및 환율의 확률적 과정(stochastic processes)에 대한 가정을 한 후에, 앞의 장에서 구한 “이중 헷지” 및 “단일 헷지”의 헷지 비율을 단순화하고, 헷지 효과성을 파악한다. 제 Ⅳ장은 결과를 요약한다.

# Ⅱ. 헷지 비율 및 헷지 효과성

2 기간(0, $T$) 모형이다. 현재의 시점은 0이다. 자국의 기업(혹은 개인)이 미래 시점 $T$에 현물(재화) 한 단위를 해외 시장에 매도하고자 한다. 매도 가격은 외화로 표시된다. 현물을 기초 자산으로 하는 선물(편의 상 ‘상품 선물’이라 칭한다)이 외국의 선물 거래소에 상장되어 있다. 상품 선물의 가격은 외화로 표시된다. 외화를 기초 자산으로 하는 통화 선물이 상장되어 있다. 통화 선물의 가격은 자국화로 표시되어 거래된다. 본 장은 헷지한 결과의 현금 흐름의 분산을 최소화하는 헷지(minimum-variance hedge) 방법 중에서 두 가지 헷지 전략을 연구한다. 첫째는 상품 선물과 통화 선물을 동시에 거래하여 “이중 헷지(dual hedge)”를 하는 것이다. 둘째는 상품 선물만을 거래하여 “단일 헷지(mono hedge)”를 하는 것이다.

본 장에서는 미래의 현물 가격, 환율, 상품 선물 가격 및 통화 선물 가격의 확

률 분포에 대하여 가정을 하는 바가 없다. 본 장은“이중 헷지”와 “단일 헷지”의 최소 분산 헷지 비율(minimum-variance hedge ratio)과 헷지 효과성(hedge effectiveness)을 구한다. 본 장의 내용은 : “이중 헷지”는 김훈용 외(2004)를 요약하고, “단일 헷지”는 Ederington(1979)의 결과를 요약한 것이다. 다만 본 논문은 최소 분산 헷지의 목적 함수를 현물 가격, 환율, 상품 선물 가격 및 통화 선물 가격의 변화율의 함수로 표현하는 점이 기존의 두 논문과 다르다. 따라서 본 장은 김훈용 외(2004)와 Ederington(1979)을 재구성하고 요약한다.

아래의 제 Ⅲ장은 미래의 현물 가격 및 환율의 확률적 과정(stochastic processes)을 구체화한 후에, 최소 분산 헷지 비율을 단순화하고 헷지 효과성을 비교한다.

## 1. 이중 헷지

시점 $T$의 현물 포지션의 가격 위험을 헷지하기 위하여, 현재 시점 0에 상품 선물과 통화 선물을 동시에 거래함으로써 헷지를 개시한다. 시점 $T$가 되면 시점 0에 거래한 선물 포지션들을 반대 매매(reverse trading)함으로써 헷지를 마감한다. 두 가지 선물의 만기는 $T$ 이후이다.

현물 한 단위 당 상품 선물 $h_1$ 단위와 통화 선물 $h_2$ 단위를 위의 설명과 같이 거래하여 헷지한다. 헷지한 결과인 시점 $T$의 현금 흐름을 자국화로 표현하면 다음과 같다. $h_i, i=1,2$의 값은 시점 0에 해당 선물을 매도(매입)헷지하면 양(음)의 값으로 표현한다.

$$S_{1,T}S_{2,T}+h_1(F_{1,0}-F_{1,T})S_{2,T}+h_2(F_{2,0}-F_{2,T}) \tag{1.1}$$

위의 표현에서

$S_{1,t}=$ 시점 $t$의 현물 가격(외화 표시)

$S_{2,t}=$ 시점 $t$의 현물 환율(즉 자국화로 표현한 외화 한 단위의 가격)

$F_{1,t}=$ 시점 $t$의 상품 선물 가격(외화 표시)

$F_{2,t}=$ 시점 $t$의 통화 선물 가격(자국화 표시)

$t=0, T$

표현 식 (1.1)에서 시점 $T$의 변수들은 리스크를 반영하는 확률 변수(random variable)이고, 시점 0의 변수들은 상수이다. 해외에 상장된 상품 선물을 거래하면 거래 개시 시에는 증거금을 납입하고. 일일 정산이 지속된 후에 최종 정산은 거래 마감 시점인 $T$에 한다. 따라서 상품 선물로 헷지한 거래의 손익을 자국화로 표현하면, 표현 식 (1.1)의 둘째 항인 $h_1(F_{1,0} - F_{1,T})S_{2,T}$ 이다. 표현 식 (1.1)의 셋째 항은 통화 선물로 헷지한 거래의 손익이다.

이중 헤지는 식 (1.1)로 표현된 헤지 결과(hedged position)의 현금 흐름의 분산(variance)을 최소화하는 최적 헤지 비율(optimal hedge ratio) $(h_1^*,\ h_2^*)$을 구하는 최적화 문제(optimization problem)이다. 즉, 다음과 같다.

$$\underset{(h_1,\ h_2)}{Minimize}\ var[S_{1,T}S_{2,T} + h_1(F_{1,0} - F_{1,T})S_{2,T} + h_2(F_{2,0} - F_{2,T})] \tag{1.2}$$

최적화 문제 식 (1.2)의 중괄호 속에 표현된 헤지 결과(hedged position)의 현금 흐름에서 상수인 $S_{1,0}S_{2,0}$를 빼고 $S_{1,0}S_{2,0}$로 나눈 후에, 둘째 항의 분모와 분자에 $F_{1,0}S_{2,0}$를 곱하고, 셋째 항의 분모와 분자에 $F_0^X$를 곱하면 다음의 표현을 얻는다.

$$\underset{(h_1,\ h_2)}{Minvar}\left[\frac{(S_{1,T}S_{2,T} - S_{1,0}S_{2,0})}{S_{1,0}S_{2,0}} - \frac{F_{1,0}S_{2,0}}{S_{1,0}S_{2,0}}\,h_1\frac{(F_{1,T} - F_{1,0})}{F_{1,0}}\frac{S_{2,T}}{S_{2,0}} - \frac{F_{2,0}}{S_{1,0}S_{2,0}}\,h_2\frac{(F_{2,T} - F_{2,0})}{F_{2,0}}\right] \tag{1.3}$$

최적화 문제 식 (1.3)을 0부터 $T$ 기간의 현물 가격, 환율, 상품 선물 가격 및 통화 선물 가격의 변화율의 함수로 표현하기 위하여 다음을 정의한다.

$$s \equiv \frac{S_{1,T}S_{2,T} - S_{1,0}S_{2,0}}{S_{1,0}S_{2,0}} = \text{자국화로 표현한 현물 가격의 변화율} \tag{1.4}$$

$$s_1 \equiv \frac{S_{1,T} - S_{1,0}}{S_{1,0}} = \text{외화로 표현한 현물 가격의 변화율} \tag{1.5}$$

$$s_2 \equiv \frac{S_{2,T} - S_{2,0}}{S_{2,0}} = \text{환율의 변화율} \tag{1.6}$$

$$\hat{f_1} \equiv \frac{F_{1,T} - F_{1,0}}{F_{1,0}} = \text{외화로 표현한 상품 선물 가격의 변화율} \tag{1.7}$$

$$f_2 \equiv \frac{F_{2,T} - F_{2,0}}{F_{2,0}} = \text{자국화로 표현한 통화 선물 가격의 변화율} \tag{1.8}$$

최적화 문제인 표현 식 (1.3)에 위의 정의를 적용하고, 둘째 항의 $\frac{S_{2,T}}{S_{2,0}}$을 $1+s_2$로 대체하여, 표현 식 (1.3)을 다음과 같이 다시 쓴다.

$$\underset{(h_1,\ h_2)}{Minimize}\ var\left[s - \frac{F_{1,0}}{S_{1,0}}\, h_1\, \hat{f_1}(1+s_2) - \frac{F_{2,0}}{S_{1,0}S_{2,0}}\, h_2\, f_2\right] \tag{1.9}$$

표현 식 (1.9)의 둘째 항의 $\hat{f_1}(1+s_2)$는 자국화로 표현한 상품 선물 가격의 변화율이다. 이를 $f_1$이라 정의한다. $f_1$을 보다 정확하게 표현하자면 자국화로 측정한 상품 선물 롱 포지션의 수익률이다.[2)] 그러나 편의상 자국화로 표현한 상품 선물 가격의 변화율이라고 정의 한다

$$f_1 \equiv \hat{f_1}(1+s_2) = \text{자국화로 표현한 상품 선물 가격의 변화율} \tag{1.10}$$

(자국화로 측정한 상품 선물 롱 포지션의 수익률)

정의 식 (1.10)을 적용하여 최적화 문제 식 (1.9)를 다음과 같이 다시 쓴다.

$$\underset{(h_1,\ h_2)}{Minimize}\ var\left[s - \frac{F_{1,0}}{S_{1,0}}\, h_1\, f_1 - \frac{F_{2,0}}{S_{1,0}S_{2,0}}\, h_2\, f_2\right] \tag{1.11}$$

최적화 문제 식 (1.11)은 목적 함수인 분산을 $s, f_1$ 및 $f_2$의 함수로 표현한 것

2) 만약 상품 선물을 환율 $S_{2,0}$에 가격 $F_{1,0}$에 매입하고, 환율 $S_{2,T}$에 가격 $F_{1,T}$에 매도한다면, 자국화로 측정한 상품 선물 롱 포지션의 수익률은 $(f_1+s_2+f_1s_2)$이 된다. 그러나 해외 상장 선물의 거래 제도는 거래 마감 시의 환율 $S_{2,T}$로 정산한다[표현 식 (1.1) 아래에 설명함]. 그러므로 롱 포지션 한 단위의 거래의 손익을 자국화로 표현한 금액은 표현 식 (1.1)과 같이 $(F_{1,0}-F_{1,T})S_{2,T}$ 이다. 롱 포지션의 수익률을 자국화로 측정하면 $\hat{f_1}(1+s_2)$인 것이다.

이다. 즉 자국화로 표현한 현물 포지션, 상품 선물 및 통화 선물의 가격의 변화율인 $(s, f_1, f_2)$을 변수로 하여 표현한 것이다. 즉 $s$의 리스크를 $f_1$과 $f_2$로 헷지하는 것이다. 최적화 문제 식 (1.11)과 식 (1.2)의 해는 동일하다. 최적화 문제 식 (1.11)의 해인 분산을 최소화하는 최적 헷지 비율(optimal hedge ratios, minimum-variance hedge ratios) ($h_1^*$, $h_2^*$)는 다음과 같다(부록 1).

$$\begin{aligned} h_1^* &= \frac{S_{1,0}}{F_{1,0}} \frac{(\rho_{s1} - \rho_{s2}\rho_{12})}{(1-\rho_{12}^2)} \frac{\sigma_s}{\sigma_1} \\ h_2^* &= \frac{S_{1,0}\,S_{2,0}}{F_{2,0}} \frac{(\rho_{s2} - \rho_{s1}\rho_{12})}{(1-\rho_{12}^2)} \frac{\sigma_s}{\sigma_2} \end{aligned} \tag{1.12}$$

위의 식에서

$$\begin{aligned} &\sigma_s \equiv s\text{의 표준 편차} \\ &\sigma_k \equiv f_k\text{의 표준 편차} \\ &\rho_{sk} \equiv s\text{와 } f_k\text{간의 상관 계수} \\ &\rho_{12} \equiv f_1\text{과 } f_2\text{간의 상관 계수} \\ &k = 1, 2 \end{aligned} \tag{1.13}$$

이다.

식 (1.12)에 구한 최적 헷지 비율을 최적화 문제의 목적 함수인 표현 식 (1.11)의 var[ • ] 속의 헤지 비율 ($h_1$, $h_2$)에 대입하면, 이중 헤지를 할 경우에 부담하게 되는 분산인 $\sigma_D^2$를 구한다. 이는 다음과 같다.

$$\sigma_D^2 = \left(1 - \frac{\rho_{s1}^2 + \rho_{s2}^2 - 2\rho_{s1}\rho_{s2}\rho_{12}}{1-\rho_{12}^2}\right)\sigma_s^2 \tag{1.14}$$

기존의 정의인 헷지 효과성(ex-ante hedge effectiveness)은 헷지를 안 할 때의 분산($\sigma_{nh}^2$)과 헷지를 할 때의 분산($\sigma_h^2$)을 비교할 경우에, 헷지함으로써 분산을 줄일 수 있는 정도를 나타낸다. 즉 헷지 효과성(ex ante hedge effectiveness) $H$는

$$H \equiv \frac{\sigma_{nh}^2 - \sigma_h^2}{\sigma_{nh}^2} \tag{1.15}$$

로 정의되며, $H$는 헷지함으로써 분산을 몇 %를 줄일 수 있는 가를 소수점으로 나타낸 값이다.

이중 헷지의 헷지 효과성 $H_D$는 다음과 같이 구한다. 정의 식 (1.15)의 $\sigma_{nh}^2$에 $\sigma_s^2$를 대입하고, $\sigma_h^2$에는 식 (1.14)에 구한 $\sigma_D^2$를 대입하여 정리한다. 헷지 효과성 $H_D$는 다음과 같다.

$$H_D = \frac{\rho_{s1}^2 + \rho_{s2}^2 - 2\rho_{s1}\rho_{s2}\rho_{12}}{1-\rho_{12}^2} \tag{1.16}$$

이중 헷지의 최적 헷지 비율은 아래의 회귀 분석으로 추정할 수 있으며, 회귀 분석의 결정 계수인 $R^2$가 식 (1.16)에 구한 헤지 효과성 $H_D$이다.

즉, 현물 가격, 환율, 상품 선물 가격 및 통화 선물 가격의 과거 시계열 데이터를 사용하여, 자국화로 표현한 현물, 상품 선물 및 통화 선물 가격의 변화율 간의 회귀식인

$$s = \gamma_0 + \gamma_1 f_1 + \gamma_2 f_2 + e \tag{1.17}$$

의 기울기 계수(slope coefficient) $\gamma_1$과 $\gamma_2$을 최소 자승법(OLS, ordinary least square)으로 추정하면, 그 추정치는 다음과 같다(부록 2).3)

$$\begin{aligned} \hat{\gamma_1} &= \frac{(\rho_{s1} - \rho_{s2}\rho_{12})}{(1-\rho_{12}^2)}\frac{\sigma_s}{\sigma_1} \\ \hat{\gamma_2} &= \frac{(\rho_{s2} - \rho_{s1}\rho_{12})}{(1-\rho_{12}^2)}\frac{\sigma_s}{\sigma_2} \end{aligned} \tag{1.18}$$

기울기 계수 추정치와 최적 헷지 비율 간의 관계는 위의 식 (1.12)와 같으므로, $\hat{\gamma_1}$에 $\dfrac{S_{1,0}}{F_{1,0}}$를 곱하여 $h_1^*$을 구하고, $\hat{\gamma_2}$에 $\dfrac{S_{1,0}\,S_{2,0}}{F_{2,0}}$를 곱하여 $h_2^*$를 구하면 된다. 즉

3) 부록 2는 김훈용(2004)의 증명을 옮겨 적은 것이다. 김훈용(2004)가 외부에 발간되지 않았으므로, 부록 2에 옮겨 적는다.

$$
\begin{aligned}
h_1^* &= \frac{S_{1,0}}{F_{1,0}} \hat{\gamma_1} \\
h_2^* &= \frac{S_{1,0}\, S_{2,0}}{F_{2,0}} \hat{\gamma_2}
\end{aligned}
\tag{1.19}
$$

인 관계를 이용하여, 최적 헷지 비율 ($h_1^*$, $h_2^*$)을 구한다.

본 절의 주요 결과를 요약하면 다음과 같다. 이중 헷지의 최적 헷지 비율은 표현 식 (1.12)와 같다. 헷지 효과성은 표현 식 (1.16)과 같다. 최적 헷지 비율은 회귀 분석 식 (1.17)의 기울기 계수를 추정한 후에, 관계 식 (1.19)를 이용하여 구할 수 있다.

## 2. 단일 헷지

단일 헷지(mono hedge)는 현물 포지션의 가격 위험을 상품 선물만으로 헷지하는 헷지 전략이다. 본 절의 내용은 Ederington(1979)의 결과를 본 논문의 주제에 맞추어 재구성하고 요약한 것이다. 시점 $T$의 현물 포지션의 가격 위험을 헷지하기 위하여, 현재 시점 0에 상품 선물을 거래함으로써 헷지를 개시한다. 시점 $T$가 되면 시점 0에 거래한 선물 포지션을 반대 매매(reverse trading)함으로써 헷지를 마감한다. 선물의 만기는 $T$ 이후이다.

현물 한 단위 당 상품 선물 $h_M$ 단위를 위의 설명과 같이 거래하여 헷지한다. 헷지한 결과인 시점 $T$의 현금 흐름을 자국화로 표현하면 다음과 같다. $h_M$의 값은 시점 0에 해당 선물을 매도(매입)헷지하면 양(음)의 값으로 표현한다.

상품 선물만으로 헷지한다는 점을 제외하고는, 기본 모형 및 변수의 정의는 위의 절과 동일하다. 수익의 분산을 최소화하는 "단일 헷지"는 헷지 결과의 현금 흐름의 분산을 최소화하는 헷지 비율 $h_M$을 선택하는 최적화 문제(optimization problem)이다. 이는 다음과 같다.

$$
\underset{h_M}{Minimize}\ var[S_{1,T}S_{2,T} + h_M(F_{1,0} - F_{1,T})S_{2,T}] \tag{2.1}
$$

최적화 문제 식 (2.1)의 중괄호 속에 표현된 헤지 결과(hedged position)의 현

금 흐름에서 상수인 $S_{1,0}S_{2,0}$를 빼고 $S_{1,0}S_{2,0}$로 나눈 후에, 둘째 항의 분모와 분자에 $F_{1,0}S_{2,0}$를 곱하면 다음의 표현을 얻는다.

$$\underset{h_M}{Minimize}\ var\left[\frac{(S_{1,T}S_{2,T}-S_{1,0}S_{2,0})}{S_{1,0}S_{2,0}}-\frac{F_{1,0}S_{2,0}}{S_{1,0}S_{2,0}}h_M\frac{(F_{1,T}-F_{1,0})}{F_{1,0}}\frac{S_{2,T}}{S_{2,0}}\right] \tag{2.2}$$

최적화 문제인 표현 식 (2.2)에 위의 정의 식 (1.4)~식 (1.8)를 적용하고, 둘째 항의 $\frac{S_{2,T}}{S_{2,0}}$을 $1+s_2$로 대체하여, 표현 식 (2.2)를 다음과 같이 다시 쓴다.

$$\underset{h_M}{Minimize}\ var\left[s-\frac{F_{1,0}}{S_{1,0}}h_M\hat{f}_1(1+s_2)\right] \tag{2.3}$$

표현 식 (2.3)의 둘째 항의 $\hat{f}_1(1+s_2)$는 자국화로 표현(즉 측정)한 상품 선물 가격의 변화율이다. 위의 절의 정의 식 (1.10)와 같이, 이를 $f_1$이라 정의한다. 최적화 문제 식 (2.3)를 다음과 같이 다시 쓴다.

$$\underset{h_M}{Minimize}\ var\left[s-\frac{F_{1,0}}{S_{1,0}}h_Mf_1\right] \tag{2.4}$$

최적화 문제 식 (2.4)은 목적 함수인 분산을 $s$와 $f_1$의 함수로 표현한 것이다. 즉 자국화로 표현한 현물 포지션 및 상품 선물 가격의 변화율인 $(s,f_1)$을 변수로 하여 표현한 것이다. 즉 $s$의 리스크를 $f_1$로 헷지하는 것이다. 최적화 문제 식 (2.1)과 식 (2.4)의 해는 동일하다. 최적화 문제 식 (2.4)의 해인 분산을 최소화하는 최적 헷지 비율(optimal hedge ratios, minimum-variance hedge ratios) $h_M^*$는 다음과 같다.[4)]

$$\begin{aligned} h_M^* &= \frac{S_{1,0}}{F_{1,0}}\frac{\sigma_{s1}}{\sigma_1^2} \\ &= \frac{S_{1,0}}{F_{1,0}}\rho_{s1}\frac{\sigma_s}{\sigma_1} \end{aligned} \tag{2.5}$$

4) 잘 알려진 Ederington(1979)의 결과이므로 증명을 생략한다.

식 (2.5)에 구한 최적 헷지 비율을 최적화 문제의 목적 함수인 표현 (2.4)의 var[ • ] 속의 헷지 비율 $h_M$에 대입하면, 단일 헤지를 할 경우에 부담하게 되는 분산인 $\sigma_M^2$를 구한다. 이는 다음과 같다.

$$\sigma_M^2 = \left(1 - \rho_{s1}^2\right)\sigma_s^2 \tag{2.6}$$

단일 헷지의 헤지 효과성 $H_M$는 다음과 같이 구한다. 정의 식 (1.15)의 $\sigma_{nh}^2$에 $\sigma_s^2$를 대입하고, $\sigma_h^2$에는 식 (2.6)에 구한 $\sigma_M^2$를 대입하여 정리한다. 헤지 효과성 $H_M$는 다음과 같다.5)

$$H_M = \rho_{s1}^2 \tag{2.7}$$

즉 헷지 효과는 현물 가격과 선물 가격의 변화율 간의 상관 계수가 클수록 좋다.

단일 헷지의 최적 헷지 비율은 아래의 회귀 분석으로 추정할 수 있으며, 회귀 분석의 결정 계수인 $R^2$가 식 (2.7)에 구한 헷지 효과성 $H_M$이다.

즉, 현물 가격, 환율, 상품 선물 가격의 과거 시계열 데이터를 사용하여, 자국화로 표현한 현물 가격의 변화율과 상품 선물 가격의 변화율 간의 회귀식인

$$s = \beta_0 + \beta_1 f_1 + e \tag{2.8}$$

의 기울기 계수 $\beta_1$의 최소 자승(ordinary least square) 추정치 $\widehat{\beta_1}$는 다음과 같다.

$$\widehat{\beta_1} = \frac{\sigma_{s1}}{\sigma_1^2} \tag{2.9}$$

기울기 계수 추정치와 최적 헤지 비율 간의 관계는 위의 식 (2.5)와 같으므로, $\widehat{\beta_1}$에 $\dfrac{S_{1,0}}{F_{1,0}}$를 곱하여 $h_M^*$을 구하면 된다. 즉

$$h_M^* = \frac{S_{1,0}}{F_{1,0}}\widehat{\beta_1} \tag{2.10}$$

인 관계를 이용하여, 최적 헷지 비율 $h_M^*$을 구한다.

---

5) 잘 알려진 Ederington(1979)의 결과이므로 증명을 생략한다.

본 절의 주요 결과를 요약하면 다음과 같다. 단일 헷지의 최적 헷지 비율은 표현 식 (2.5)와 같다. 헷지 효과성은 표현 식 (2.7)과 같다. 최적 헷지 비율은 회귀 분석 식 (2.8)의 기울기 계수를 추정한 후에, 관계 식 (2.10)를 이용하여 구할 수 있다.

# Ⅲ. 헷지 비율의 단순화 및 헷지 효과성의 구체화

위의 제 Ⅱ장에서 이중 헷지의 최적 헷지 비율은 표현 식 (1.12)에 구하였고, 헷지 효과성은 표현 식 (1.16)에 구하였다. 단일 헷지의 최적 헷지 비율은 표현 식 (2.5)에 구하였고 헷지 효과성은 표현 식 (2.7)에 구하였다. 위에 구한 최적 헷지 비율 및 헷지 효과성은 다음의 3가지 변수 즉 $(s, f_1, f_2)$들 간의 상관 계수 및 표준 편차의 함수로 표현되어 있다.

변수 $s$는 정의 식 (1.4)에 표현된 바와 같이, 헷지 기간인 0부터 $T$ 기간 동안 자국화로 표현한 현물 가격의 변화율이다. 정의 식 (1.4)를 옮겨 적는다. 즉

$$s \equiv \frac{S_{1,T}S_{2,T} - S_{1,0}S_{2,0}}{S_{1,0}S_{2,0}} \tag{3.1}$$

이다.

변수 $f_1$은 정의 식 (1.10)에 표현된 바와 같이, 0부터 $T$ 기간 동안의 자국화로 표현한 상품 선물 가격의 변화율이다. 보다 정확하게 표현하면, $f_1$은 자국화로 측정한 상품 선물 롱 포지션의 수익률이다.[6] $f_1$을 정의 식 (1.7)과 정의 식 (1.6)을 적용하여 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} f_1 &\equiv \widehat{f_1}(1 + s_2) \\ &= \frac{F_{1,T} - F_{1,0}}{F_{1,0}}\left(1 + \frac{S_{2,T} - S_{2,0}}{S_{2,0}}\right) \end{aligned} \tag{3.2}$$

6) 참조 : 각주 2).

변수 $f_2$는 0부터 $T$ 기간 동안의 자국화로 표현한 통화 선물 가격의 변화율이다. $f_2$는 자국화로 측정한 통화 선물 롱 포지션의 수익률이기도 하다. $f_2$의 정의식 (1.8)을 옮겨 적는다.

$$f_2 \equiv \frac{F_{2,T} - F_{2,0}}{F_{2,0}} \tag{3.3}$$

본 장은 구성은 다음과 같다. 첫 단계로, 회귀분석을 할 필요가 없는 단순화한 최적 헷지 비율을 구하고 헷지 효과성을 파악하기 위하여 아래에 몇 가지 가정을 한다. 둘째 단계로, 가정을 기반으로 하여 최적 헷지 비율과 헷지 효과성의 모수들(parameters)인 변수 $(s, f_1, f_2)$들 간의 상관 계수 및 표준 편차를 구한다. 셋째 단계로, 구한 모수들을 최적 헷지 비율[표현 식 (1.12) 및 식 (2.5)]과 헷지 효과성[표현 식 (1.16) 및 식 (2.7)]의 모수들에 대입하여, 최적 헷지 비율 및 헷지 효과성을 파악한다.

[가정 1] 외화로 표시한 현물 가격 $S_{1,t}$은 기하학적 브라운 운동(geometric Brownian motion) 과정을 따른다. 이는 다음과 같이 구체화 한다(앞 장의 $\rho$ 및 $\sigma$와의 혼동을 피하기 위하여, 본 장의 모수들에는 *를 붙여서 구분한다.).

$$dS_1 = \mu_1^* S_1 dt + \sigma_1^* S_1 dz_1 \tag{3.4}$$

[가정 2] 현물 환율 $S_{2,t}$는 기하학적 브라운 운동(geometric Brownian motion) 과정을 따른다. 이는 다음과 같이 구체화한다.

$$dS_2 = \mu_2^* S_2 dt + \sigma_2^* S_2 dz_2 \tag{3.5}$$

$dz_1$와 $dz_2$간의 상관 계수는 $\rho_{12}^*$이다.

$$\rho_{12}^* \equiv dz_1 \text{와 } dz_2 \text{간의 상관 계수} \tag{3.6}$$

[가정 3] 선물의 만기까지의 기간(0, M)동안 무위험 이자율은 불변이다.

[가정 4] 현물 및 선물 거래의 거래 비용이 없다.

[가정 5] 현물 가격과 상품 선물 가격 간에 보유 비용(cost-of-carry) 모형이 성립하며, 편의 수익(convenience yield)은 0이라 가정한다. 즉 외화로 표현되는 상품 선물 가격 $F_{1,t}$은 다음의 관계가 성립한다.[7)]

$$F_{1,t} = S_t e^{r^*(M-t)} \tag{3.7}$$

위의 식에서

$r^* \equiv$ 연속 복리로 표현한 외국의 무위험 이자율

이다.

상품 선물 가격과 현물 가격간의 관계인 표현 식 (3.7)과 현물 가격의 확률적 과정(stochastic process)에 대한 가정인 표현 식 (3.4)로부터, 이토의 보조 정리(Ito's lemma)를 이용하여 상품 선물 가격에 대한 확률적 과정을 구하면 다음과 같다(부록 3).

$$dF_1 = \left(\mu_1^* - r^*\right)F_1 dt + \sigma_1^* F_1 dz_1 \tag{3.8}$$

표현 식 (3.8)은 현물 가격과 마찬가지로, 상품 선물 가격도 기하학적 브라운 운동(geometric Brownian motion)을 따른다는 사실을 나타낸다.

[가정 6] 현물 환율과 통화 선물 가격 간에 차익 거래의 기회가 없기 위한 조건(no-arbitrage condition)인 보유 비용(cost-of-carry) 모형이 성립한다. 거래 비용이 없다고 가정하였으므로, 보유 비용 모형이 제시하는 통화 선물의 이론 가격과 실제 가격은 동일하다. 현물 환율과 통화 선물 가격 간의 관계는 다음과 같다.

$$F_{2,t} = S_{2,t} e^{(r-r^*)(M-t)} \tag{3.9}$$

위의 식에서

$r \equiv$ 연속 복리로 표현한 자국의 무위험 이자율

7) 편의 수익이 0은 아니지만 확률적이지 않다(nonstochastic)고 가정을 완화하더라도, 제 Ⅲ장에서 구하는 최적 헷지 비율은 변하지 않는다. 왜냐 하면, 최적 헷지 비율의 모수들인 상관 계수와 표준 편차는 변화가 없기 때문이다.

통화 선물 가격과 현물 환율 간의 관계인 표현 식 (3.9)과 현물 환율의 확률적 과정(stochastic process)에 대한 가정인 표현 식 (3.5)으로부터, 이토의 보조 정리(Ito's lemma)를 이용하여 통화 선물 가격에 대한 확률적 과정을 구하면 다음과 같다(부록 4).

$$dF_2 = \left[\mu_2^* - (r - r^*)\right] F_2 dt + \sigma_2^* F_2 dz_2 \tag{3.10}$$

표현 식 (3.10)는 현물 환율과 마찬가지로, 통화 선물 가격도 기하학적 브라운 운동(geometric Brownian motion)을 따른다는 사실을 나타낸다.

자국화로 표현한 현물 가격 $S_{3,t}$는 외화로 표현한 현물 가격 $S_{1,t}$에 현물 환율 $S_{2,t}$을 곱한 관계가 성립한다. 즉

$$S_3 = S_1 S_2 \tag{3.11}$$

자국화로 표현한 현물 가격 $S_3$와 외화로 표현한 현물 가격 $S_1$ 및 현물 환율 $S_2$ 간의 관계인 표현 식 (3.11)과, 외화로 표현한 현물 가격 $S_1$의 확률적 과정인 표현 식 (3.4)와 현물 환율의 확률 적 과정인 표현 식 (3.5)로부터, 이토의 보조 정리(Ito's lemma)를 이용하여 자국화로 표현한 현물 환율 $S_3$에 대한 확률적 과정을 구하면 다음과 같다(부록 5).

$$dS_3 = \left(\mu_1^* + \mu_2^* + \rho_{12}^* \sigma_1^* \sigma_2^*\right) S_3 dt + \sigma_1^* S_3 dz_1 + \sigma_2^* S_3 dz_2 \tag{3.12}$$

지금까지 구한 확률적 과정들인 표현 식 (3.12), 식 (3.5), 식 (3.7) 및 식 (3.9)를 다음과 같이 다시 쓴다.

자국화로 표현한 현물 가격 $S_3$의 확률적 과정은, 표현 식 (3.12)을 다음과 같이 다시 쓴다.

$$\frac{dS_3}{S_3} = \left(\mu_1^* + \mu_2^* + \rho_{12}^* \sigma_1^* \sigma_2^*\right) dt + \sigma_1^* dz_1 + \sigma_2^* dz_2 \tag{3.13}$$

현물 환율 $S_2$의 확률적 과정은, 표현 식 (3.5)를 다음과 같이 다시 쓴다.

$$\frac{dS_2}{S_2} = \mu_2^* dt + \sigma_2^* dz_2 \tag{3.14}$$

외화로 표현한 상품 선물 가격 $F_1$에 대한 확률적 과정은, 표현 식 (3.8)를 다음과 같이 다시 쓴다.

$$\frac{dF_1}{F_1} = \left(\mu_1^* - r^*\right)dt + \sigma_1^* dz_1 \tag{3.15}$$

자국화로 표현된 통화 선물 가격 $F_2$에 대한 확률적 과정은, 표현 식 (3.10)를 다음과 같이 다시 쓴다.

$$\frac{dF_2}{F_2} = \left[\mu_2^* - \left(r - r^*\right)\right]dt + \sigma_2^* dz_2 \tag{3.16}$$

표현 식 (3.13)～식 (3.16)에 구한 확률적 과정들을 이용하여, 이중 헷지 및 단일 헷지의 최적 헷지 비율과 헷지 효과성을 구하는 데에 필요한 모수(parameter)들인 3 가지 변수 $(s, f_1, f_2)$들 간의 상관 계수 및 표준 편차를 구하면 된다. 변수 $s, f_1$ 및 $f_2$에 대한 설명은 본 장의 첫 부분에 정리되었으며, 변수들의 정의는 위의 표현 식 (3.1), 식 (3.2) 및 식 (3.3)과 같다.

$s$는 자국화로 표현한 현물 가격의 변화율이며 정의는 표현 식 (3.1)과 같다. $s$에 관한 확률적 과정은 위의 표현 식 (3.13)이다. $f_1$는 자국화로 표현한 상품 선물 가격의 변화율이며, 정확한 표현은 자국화로 측정한 상품 선물 롱 포지션의 수익률이다.[8] 정의는 표현 식 (3.2)와 같다. $\widehat{f_1}$는 외화로 표현한 상품 선물 가격의 변화율이며, $\widehat{f_1}$에 관한 확률적 과정은 위의 표현 식 (3.15)이다. $f_1$과 $\widehat{f_1}$간의 관계는 위의 표현 식 (3.2)와 같다. 이토의 보조 정리(Ito's lemma)에 의해서, $f_1$과 $\widehat{f_1}$ 의 변동성 및 위너 과정은 $\sigma_1^* dz_1$로 서로 같다. $s$와 $f_1$간의 상관 계수와 $s$와 $\widehat{f_1}$간의 상관 계수는 같다. 또한 $f_1$의 표준 편차와 $\widehat{f_1}$의 표준 편차는 같다(부록 6).

$f_2$는 자국화로 표현한 통화 선물 가격의 변화율이며 정의는 표현 식 (3.3)과 같다. $f_2$에 관한 확률적 과정은 위의 표현 식 (3.16)이다.

표현 식 (3.13)～식 (3.16)에 구한 확률적 과정들을 이용하여, 이중 헷지 및 단

---

8) 참조 : 각주 2).

일 헷지의 최적 헷지 비율과 헷지 효과성을 구하는 데에 필요한 모수(parameter)들인 3 가지 변수 즉 $(s, f_1, f_2)$들 간의 상관 계수 및 표준 편차를 구하면 다음과 같다(부록 7).

$$\rho_{r1} = \frac{\left(\sigma_1^* + \rho_{12}^* \sigma_2^*\right)}{\sqrt{\sigma_1^{*2} + \sigma_2^{*2} + 2\rho_{12}^* \sigma_1^* \sigma_2^*}} \tag{3.17}$$

$$\rho_{r2} = \frac{\left(\sigma_2^* + \rho_{12}^* \sigma_1^*\right)}{\sqrt{\sigma_1^{*2} + \sigma_2^{*2} + 2\rho_{12}^* \sigma_1^* \sigma_2^*}} \tag{3.18}$$

표현 식 (3.5), 식 (3.15) 및 식 (3.16)에 의해서

$$\rho_{12} = \rho_{12}{}^* \tag{3.19}$$

이다.

식 (3.12)로부터

$$\sigma_r = \sqrt{\left(\sigma_1^{*2} + \sigma_2^{*2} + 2\rho_{12}^* \sigma_1^* \sigma_2^*\right) T} \tag{3.20}$$

이다.

표현 식 (3.15) 및 식 (3.16)으로부터

$$\sigma_1 = \sigma_1^* \sqrt{T} \tag{3.21}$$

$$\sigma_2 = \widehat{\sigma_2} \sqrt{T} \tag{3.22}$$

이다.

## 1. 이중 헷지

위의 표현 식 (3.17)~식 (3.22)에 구한 모수들을 이중 헷지의 최적 헷지 비율인 표현 식 (1.12)에 대입하고 정리하면, 이중 헷지의 최적 헷지 비율은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} h_1^* &= \frac{S_{1,0}}{F_{1,0}} \\ h_2^* &= \frac{S_{1,0}\, S_{2,0}}{F_{2,0}} \end{aligned} \tag{4.1}$$

이중 헷지의 회귀식 (1.17)을 옮겨 적는다.

$$s = \gamma_0 + \gamma_1 f_1 + \gamma_2 f_2 + e \tag{4.2}$$

위의 표현 식 (3.17)~식 (3.22)에 구한 모수들을 기울기 계수의 추정치 $\hat{\gamma_1}$와 $\hat{\gamma_2}$의 표현 식 (1.18)에 대입하고 정리하면, 추정치 $\hat{\gamma_1}$와 $\hat{\gamma_2}$는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \hat{\gamma_1} &= 1 \\ \hat{\gamma_2} &= 1 \end{aligned} \tag{4.3}$$

위의 표현 식 (3.17)~식 (3.22)에 구한 모수들을 이중 헷지의 헷지 효과성인 표현 식 (1.16)에 대입하고 정리하면, 이중 헷지의 헷지 효과성은 다음과 같다.

$$H_D = 1 \tag{4.4}$$

이중 헷지의 최적 헷지 비율이 표현 식 (4.1)로 단순화되고, 기울기 계수가 표현 식 (4.3)과 같이 (1, 1)이 되는 이유를 설명하면 다음과 같다.

우선, 표현 식 (1.9)와 표현 식 (1.11)을 보자. 이는 이중 헷지의 최적화 문제를 현물 및 선물 가격들의 변화율의 함수로 표현한 것이다. 즉 이중 헷지는 자국화로 표현한 현물 가격의 변화율인 $s$의 리스크를 자국화로 표현한 상품 선물 가격의 변화율인 $\hat{f_1}(1+s_2)(\equiv f_1)$과 자국화로 표현한 통화 선물 가격의 변화율 $f_2$로 헷지하는 것이다.[9] 이를 회귀 식으로 표현한 것이 표현 식 (1.17)이다.

$s$의 리스크는 $\sigma_1^* dz_1$와 $\sigma_2^* dz_2$의 합 인데, $f_1$의 변동성 및 위너 과정은 $\sigma_1^* dz_1$이며 $f_2$의 변동성 및 위너 과정은 $\sigma_2^* dz_2$이다. 따라서 $s$의 리스크 중 $\sigma_1^* dz_1$는 $f_1$으로 완전 헷지가 되며, 헷지를 위한 기울기 계수 $\hat{\gamma_1}=1$이고 $h_1^* = \dfrac{S_{1,0}}{F_{1,0}}$이다. $s$의 리스크 중 $\sigma_2^* dz_2$는 $f_2$로 완전 헷지가 되며, 헷지를 위한 기울기 계수 $\hat{\gamma_2}=1$이고 $h_2^* = \dfrac{S_{1,0}\,S_{2,0}}{F_{2,0}}$이다. 완전 헷지가 되므로 $H_D = 1$이다. 상세한 설명은 다음과 같다.

---

9) $f_1$의 정확한 표현은 자국화로 측정한 상품 선물 롱 포지션의 수익률이다. 정의 식 (1.10)을 참조.

헷지의 대상인 자국화로 표현한 현물 가격 $S_3(=S_1S_2)$의 확률적 과정인 표현 식 (3.13)을 보자. 이토의 보조 정리(Ito's lemma)에 의해서 $\lim_{dt\to 0}\frac{dS_1}{S_1}\frac{dS_2}{S_2}=\rho_{12}^*\sigma_1^*\sigma_2^*dt$ 이며, 확률적이지 않다(nonstochastic).[10] 이는 표현 식 (3.13)의 추세 항(drift term)인 괄호 속에 나타났다. 표현 식 (3.13)에 나타난 바와 같이, 자국화로 표현한 현물 가격 $S_3$의 리스크는 : (1) 외화로 표현한 현물 가격 $S_1$의 예상하지 못한 변동으로 인한 리스크를 나타내는 $\sigma_1^*dz_1$와, (2) 환율 $S_2$의 예상하지 못한 변동으로 인한 리스크를 나타내는 $\sigma_2^*dz_2$의 합이다. $S_3$의 리스크가 단순히 $\sigma_1^*dz_1$와 $\sigma_2^*dz_2$의 합으로 표현된 것은, 이토의 보조 정리에 의해 근사(approximation) 된 것이다.

이중 헷지의 첫째 헷지 수단은 상품 선물을 거래함으로써, 자국화로 표현한 상품 선물 가격의 변화율인 $\hat{f}_1(1+s_2)(\equiv f_1)$로 헷지하는 것이다. 이토의 보조 정리에 의해서 $\hat{f}_1s_2$는 확률적이지 않다(nonstochastic).[11] 따라서 외화로 표현한 상품 선물 가격(의 변화율인 $\hat{f}_1$)와 자국화로 표현한 상품 선물 가격(의 변화율인 $f_1$)은 변동성(volatililty) 및 위너 과정Wiener process)이 서로 동일한 것이다. 즉 $\hat{f}_1$과 $f_1$는 완전 상관 관계이다(perfectly correlated). 외화로 표현한 상품 선물 가격(의 변화율인 $\hat{f}_1$)의 확률적 과정은 표현 식 (3.15)에 구하였다. 즉 외화로 표현한 상품 선물 가격 $F_1$의 변동성 및 위너 과정은 $\sigma_1^*dz_1$이다. 그러므로 자국화로 표현한 상품 선물 가격의 변동성 및 위너 과정도 $\sigma_1^*dz_1$인 것이다. 한편으로는 $\sigma_1^*dz_1$은 식 (3.13)에 표현된 바와 같이 외화로 표현한 현물 가격인 $S_1$의 변동성 및 위너 과정이다. 따라서 외화로 표현한 현물 가격($S_1$)의 변화율($\equiv s_1$)과 자국화로 표현한 상품 선물 가격의 변화율($f_1$)은 완전 상관 관계(perfectly correlated)이며 변동성 또한 $\sigma_1^*$으로 서로 같다.[12]

---

10) 부록 6.
11) 부록 6.
12) 외화로 표현한 현물 가격($S_1$)의 변화율($s_1$)과 자국화로 표현한 상품 선물 가격의 변화율($f_1$)이 완전 상관 관계인 이유는 두 가지이다. 불변 금리를 가정하였기 때문에 외화로 표현한 현물 가격과 외화로 표현한 상품 선물 가격은 완전 상관 관계이

환율과 통화 선물 가격은 표현 식 (3.14)와 식 (3.16)에 구한 바와 같이, $\sigma_2^* dz_2$이 동일하다. 즉 완전 상관 관계이며 변동성 또한 서로 같다.

지금까지의 설명을 정리하면 다음과 같다. $s$의 리스크는 $\sigma_1^* dz_1$와 $\sigma_2^* dz_2$의 합인데, $f_1$의 변동성 및 위너 과정은 $\sigma_1^* dz_1$이며 $f_2$의 변동성 및 위너 과정은 $\sigma_2^* dz_2$이다. 따라서 $s$의 리스크 중 $\sigma_1^* dz_1(\sigma_2^* dz_2)$는 $f_1(f_2)$과 완전 상관 관계이며, 변동성 또한 $\sigma_1^*(\sigma_2^*)$로 서로 같다. 따라서 $\sigma_1^* dz_1(\sigma_2^* dz_2)$를 헷지하기 위한 헷지 비율이자 기울기 계수인 $\hat{\gamma_1} = 1(\hat{\gamma_2} = 1)$이고, 완전 헷지가 이루어진다.

최적 헷지비율과 기울기 계수와의 관계는 표현 식 (1.19)에 구하였다.

$$\begin{aligned} h_1^* &= \frac{S_{1,0}}{F_{1,0}} \hat{\gamma_1} \\ h_2^* &= \frac{S_{1,0} S_{2,0}}{F_{2,0}} \hat{\gamma_2} \end{aligned} \tag{4.5}$$

$\hat{\gamma_1}$와 $\hat{\gamma_2}$가 모두 1이므로, 최적 헷지 비율은 표현 식 (4.1)과 같이 단순하다. 즉 통계 분석이 필요없이 누구나 쉽게 구할 수 있다.

표현 식 (4.1)에 구한 최적 헷지 비율에 대한 설명은 다음과 같다. 이중 헷지의 경우에 $\hat{\gamma_1}$와 $\hat{\gamma_2}$가 모두 1이다. 회귀식 (4.2)로 설명하면 다음과 같다. 만약 환율이 변화가 없고 외화로 표현한 현물 가격이 $k_1$%가 증가하면, $s$와 $f_1$도 $k_1$%가 증가한다. 만약 외화로의 현물 가격이 변화가 없고 환율이 $k_2$%가 증가하면 $s$와 $f_2$도 $k_2$%가 증가한다. 따라서 현재 시점에서의 금액이, 헷지의 대상인 현물 포지션의 금액과 상품 선물 포지션의 금액 및 통화 선물 포지션의 금액이 1:1:1이 되도록 하는 것이 최적이다. 현물 가격과 상품 선물 가격 및 통화 선물 가격이 다르므로 1 : 1 : 1이 되도록 조정한 것이 표현 식 (4.1)에 구한 최적 헷지 비율인 것이다. 현물 포지션이 롱인 본 논문의 예에서, 최적 헷지 비율은 양수이

---

다. 즉 $s_1$과 $\hat{f_1}$은 완전 상관 관계이다. 한편으로는 $\hat{f_1}$과 $f_1$이 완전 상관 관계인데, 그 이유는 본문에 설명한바와 같이 이토의 보조 정리에 의한 근사이다. 따라서 $s_1$과 $f_1$은 완전 상관 관계이다.

다. 상품 선물과 통화 선물을 매도해야 한다.

## 2. 단일 헷지

위의 표현 식 (3.17)~식 (3.22)에 구한 모수들을 단일 헷지의 최적 헷지 비율인 표현 식 (2.5)에 대입하고 정리하면, 단일 헷지의 최적 헷지 비율 $h_M^*$은 다음과 같다.

$$h_M^* = \frac{S_{1,0}}{F_{1,0}}(1+\rho_{12}^*\frac{\sigma_2^*}{\sigma_1^*}) \tag{5.1}$$

단일 헷지의 회귀식 (2.8)을 옮겨 적는다.

$$s = \beta_0 + \beta_1 f_1 + e \tag{5.2}$$

위의 표현 식 (3.17)~식 (3.22)에 구한 모수들을 기울기 계수의 추정치 $\widehat{\beta_1}$의 표현 식 (2.9)에 대입하고 정리하면, 추정치 $\widehat{\beta_1}$는 다음과 같다.

$$\widehat{\beta_1} = 1 + \rho_{12}^*\frac{\sigma_2^*}{\sigma_1^*} \tag{5.3}$$

위의 표현 식 (3.17)~식 (3.22)에 구한 모수들을 단일 헷지의 헷지 효과성인 표현 식 (2.7)에 대입하고 정리하면, 단일 헷지의 헷지 효과성은 다음과 같다.

$$H_M = \frac{\sigma_1^{*2} + \rho_{12}^{*2}\sigma_2^{*2} + 2\rho_{12}^*\sigma_1^*\sigma_2^*}{\sigma_1^{*2} + \sigma_2^{*2} + 2\rho_{12}^*\sigma_1^*\sigma_2^*} \tag{5.4}$$

위의 절에서 설명한 바와 같이 자국화로 표현한 현물 가격의 변화율인 $s$의 리스크는 $\sigma_1^* dz_1$와 $\sigma_2^* dz_2$의 합이다. 이를 $s \equiv s_1 + s_2$로 표현하자. 단일 헷지는 외화로 표현한 현물 가격의 리스크 $s_1$과 환율의 리스크 $s_2$ 모두를 $f_1$으로 헷지하는 것이다. $f_1$의 변동성 및 위너 과정은 $\sigma_1^* dz_1$이다. $s_1$과 $f_1$은 변동성 $\sigma_1^*$과 위너 과정 $dz_1$이 서로 같다. 따라서 $s_1$을 $f_1$으로 헷지하기 위한 헷지 비율은 1이며, 헷지 효과성은 1이다. $s_2$의 리스크는 $\sigma_2^* dz_2$이다. $s_2$를 $f_1$으로 헷지하기 위한 헷

지 비율은 $\rho_{12}^{*}\frac{\sigma_2^{*}}{\sigma_1^{*}}$이다. 헷지 효과성은 $\rho_{12}^{*}$의 절대값이 클수록 좋다. 표현 식 (5.3)에 구한 헷지 비율이자 기울기 계수는 $s_1$을 헷지하는 비율 1과 $s_2$를 헷지하는 비율 $\rho_{12}^{*}\frac{\sigma_2^{*}}{\sigma_1^{*}}$을 합한 것이다. $f_1$이 1% 변화하면 $s$는 $(1+\rho_{12}^{*}\frac{\sigma_2^{*}}{\sigma_1^{*}})$% 변화하는 관계이므로, 최적 헷지 비율은 표현 식 (5.1)이 된다.[13)]

헷지 효과성은 환율과 자국화로 표현한 상품선물 가격간의 상관 계수의 절대값이 클수록 좋다. 상관 계수의 절대값이 1이면 단일 헷지도 완전 헷지가 이루어진다. 상관 계수의 절대값이 1보다 작으면 완전 헷지가 이루어지지는 않는다.

단일 헷지의 최적 헷지 비율은 단순화가 되지 않는다. 여전히 통계 분석이 필요하다.

# Ⅳ. 결 론

본 논문은 현물 가격이 외화로 표시되고 헷지 수단인 상품 선물이 해외에 상장되어서 가격이 외화로 표시된 경우에, 상품 선물과 통화 선물을 이용하여 현물 가격의 위험과 환 위험을 헷지하는 “이중 헷지” 전략을 연구하였다.

일반적으로 헷지 결과의 현금 흐름의 분산을 최소화하는 최소 분산 헷지(minimum-variance hedge)를 하려면, 최적 헷지 비율을 구하기 위하여 회귀 분석 등의 통계 분석을 하여야 한다. 이는 비용이 발생하며, 누구나 쉽게 최소 분산 헷지을 활용하기에 장애 요인이 된다.

본 논문은 최소 분산 헷지를 하면서도 최적 헷지 비율을 구하기 위하여 통계 분석을 할 필요가 없는 “단순화한” 최적 헷지 비율을 구하였다. 즉 본 논문의

13) $h_M^{*}$의 $\frac{S_{1,0}}{F_{1,0}}$항은 현재 시점에서 헷지 대상인 현물 포지션 한 단위와 헷지 수단인 상품 선물 포지션 한 단위의 금액의 크기(scale)가 다르므로 이를 조정하기 위한 항이다.

최적 헷지 비율은 헷지 개시 시점의 현물 가격, 상품 선물 가격, 통화 선물 가격 및 환율만으로 누구나 쉽게 구할 수 있다.

헷지 효과성은 1인 완전 헷지가 이루어 진다. 2가지 리스크를 2가지 헷지 수단으로 헷지하기 때문에 완전 헷지가 이루어지는 것이다. 완전 헷지가 이루어진다는 결과는 본 논문이 최적 헷지 비율을 단순화하기 위하여 이용한 이토의 보조 정리(Ito's lemma)가 근사(approximation)라는 점과 불변 금리 등 일련의 가정에 기반한 것으므로 진실과는 괴리가 있을 것이다.

"이중 헷지"의 대안으로 상품 선물 만으로 헷지하는 "단일 헷지"를 연구하였다. 환율과 상품 선물 가격 간의 상관 계수의 절대값이 클수록 "단일 헷지"의 헷지 효과성은 좋다. 상관 계수의 절대값이 1보다 작으면 완전 헷지는 이루어지지 않는다.

# 참 고 문 헌


김훈용, "두 가지 통화 선물을 이용한 최적 헤지 : 삼각 교차 헤지(Triangular Cross-Hedge)", 산업연구, 동덕여자대학교, 2004.

김훈용・김가공, "해외 상장 선물 거래의 환 위험 관리", 산업 연구, 동덕여자대학교, 2004.

Adler, M. and B. Dumas, "International Portfolio Choice and Corporate Finance : A Synthesis," *Journal of Finance*, 38, 1983, 925-984.

Ederington, L., "The hedging performance of the new futures markets," *Journal of Finance*, 34, 1979, 157-170.

Hull, J., *Options, Futures, and Other Derivatives*, 5th edition, Prntice-Hall, 2003.

Johnston, J. and J. Dinardo, *Econometric Methods*, 4th edition, McGraw-Hill, 1997.

## 부록 1

최적화 문제 식 (1.9)를 옮겨 적는다.

$$\underset{(h_1,\ h_2)}{Minimize}\ var\left[s - \frac{F_{1,0}}{S_{1,0}}h_1 f_1 - \frac{F_{2,0}}{S_{1,0}S_{2,0}}h_2 f_2\right] \tag{A1.1}$$

표현을 간결하게 하기 위하여 다음을 정의하자.

$$\begin{aligned} b_1 &\equiv \frac{F_{1,0}}{S_{1,0}}h_1 \\ b_2 &\equiv \frac{F_{2,0}}{S_{1,0}S_{2,0}}h_2 \end{aligned} \tag{A1.2}$$

정의 식 (A1.2)를 적용하여 최적화 문제 식 (A1.1)을 다음과 같이 다시 쓴다.

$$\underset{(b_1,\ b_2)}{Minimize}\ var\left[s - b_1 f_1 - b_2 f_2\right]$$

최적화 문제를 다음과 같이 다시 쓴다.

$$\underset{(b_1, b_2)}{Minimize}\ \sigma_s^2 + b_1^2\sigma_1^2 + b_2^2\sigma_2^2 - 2b_1\sigma_{s1} - 2b_2\sigma_{s2} + 2b_1b_2\sigma_{12} \tag{A1.3}$$

목적 함수의 $b_1$ 및 $b_2$에 대한 편미분 값이 0이 되는 조건(first-order conditions)은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \delta()/\delta b_1 &= 2b_1\sigma_1^2 - 2\sigma_{s1} + 2b_2\sigma_{12} = 0 \\ \delta()/\delta b_2 &= 2b_2\sigma_2^2 - 2\sigma_{s2} + 2b_1\sigma_{12} = 0 \end{aligned} \tag{A1.4}$$

식 (A1.4)의 두 방정식을 동시에 풀면, 해 $(b_1^*,\ b_2^*)$은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} b_1^* &= \frac{\sigma_{s1}\sigma_2^2 - \sigma_{12}\sigma_{s2}}{\sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_{12}^2} \\ b_2^* &= \frac{\sigma_{s2}\sigma_1^2 - \sigma_{12}\sigma_{s1}}{\sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_{12}^2} \end{aligned} \tag{A1.5}$$

$\sigma_{xy}=\rho_{xy}\sigma_x\sigma_y$인 관계($\rho_{xy}$는 상관 계수)를 이용하여, 표현 식 (A1.5)를 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} b_1^* &= \frac{(\rho_{s1}-\rho_{s2}\rho_{12})}{(1-\rho_{12}^2)}\frac{\sigma_s}{\sigma_1} \\ b_2^* &= \frac{(\rho_{s2}-\rho_{s1}\rho_{12})}{(1-\rho_{12}^2)}\frac{\sigma_s}{\sigma_2} \end{aligned} \tag{A1.6}$$

정의 식 (A1.2)에 의해서

$$\begin{aligned} h_1^* &= \frac{S_{1,0}}{F_{1,0}}b_1^* \\ h_2^* &= \frac{S_{1,0}\,S_{2,0}}{F_{2,0}}b_2^* \end{aligned} \tag{A1.7}$$

이다.

식 (A1.6)에 구한 ($b_1^*$, $b_2^*$)을 관계 식 (A1.7)의 ($b_1^*$, $b_2^*$)에 대입하면, 본문의 식 (1.12)에 표현된 최적 헷지 비율을 얻는다. Q. E. D.

## 부록 2

본문의 식 (1.17)에 표현된 회귀식인

$$s=\gamma_0+\gamma_1 f_1+\gamma_2 f_2+e \tag{A2.1}$$

의 기울기 계수(slope coefficient) $\gamma_1$과 $\gamma_2$을 최소 자승법(OLS, ordinary least square)으로 추정하면, 그 추정치가 본문의 식 (1.18)을 복사한 다음과 같음을 보이고자 한다[식 (1.18)과 식 (A2.2)는 동일함].

$$\begin{aligned} \hat{\gamma_1} &= \frac{(\rho_{s1}-\rho_{s2}\rho_{12})}{(1-\rho_{12}^2)}\frac{\sigma_s}{\sigma_1} \\ \hat{\gamma_2} &= \frac{(\rho_{s2}-\rho_{s1}\rho_{12})}{(1-\rho_{12}^2)}\frac{\sigma_s}{\sigma_2} \end{aligned} \tag{A2.2}$$

이를 위하여, 이미 잘 알려진 최소 자승 회귀 분석의 몇 가지 결과를 요약한다.[14)]

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \cdots + \beta_k X_{kt} + u_t \qquad t = 1, \cdots, n \tag{A2.3}$$

위 식은 $k-1$개의 설명 변수를 갖는 회귀 분석 모형이다. 이를 행렬로 표현하면 다음과 같다.

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{u} \tag{A2.4}$$

위 식에서

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1 & X_{21} \ldots X_{k1} \\ 1 & X_{22} \cdots X_{k2} \\ \vdots & \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ 1 & X_{2n} \cdots X_{kn} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{\beta}$의 추정치를 $\boldsymbol{b}$로 표현하면, 식 (A2.4)로부터 잔차의 벡터 $\boldsymbol{e}$는

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{Xb} \tag{A2.5}$$

로 표현된다. 잔차제곱의 합을 최소화하는 조건(first order condition)인 $\delta(\boldsymbol{e}'\boldsymbol{e})/\delta\boldsymbol{b} = 0$으로부터 정규 방정식(normal equation)

$$(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})\boldsymbol{b} = \boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} \tag{A2.6}$$

를 구한다. 식 (A2.5)의 $\boldsymbol{y}$를 $\boldsymbol{Xb}+\boldsymbol{e}$로 대체하면

$$\boldsymbol{X}'\boldsymbol{e} = \boldsymbol{0} \tag{A2.7}$$

을 얻는다. 이로부터

$$\overline{e} = \overline{Y} - b_1 - b_2\overline{X_2} - \cdots - b_k\overline{X_k} = 0 \tag{A2.8}$$

을 얻으며 이를 다시 쓰면 다음의 관계를 얻는다.

$$\overline{Y} = b_1 + b_2\overline{X_2} + b_3\overline{X_3} + \cdots + b_k\overline{X_k} \tag{A2.9}$$

최소 자승식

$$Y_t = b_1 + b_2 X_{2t} + b_3 X_{3t} + \cdots + b_k X_{kt} + e_t \qquad t = 1, \cdots, n$$

에서 식 (A2.9)를 빼면, 표본 평균으로부터의 편차(deviation)인 소문자 변수로 표현된

14) Johnston and DiNardo(1997), 제 Ⅲ장.

$$y_t = b_2 x_{2t} + b_3 x_{3t} + \cdots\ b_k x_{kt} + e_t \qquad t = 1, \cdots, n \tag{A2.10}$$

을 얻는다. 본 논문의 경우 설명 변수가 2개이므로 식 (A2.10)은

$$y = b_2 x_2 + b_3 x_3 + e \tag{A2.11}$$

로 표현되며, 정규 방정식(normal equation)

$$\begin{bmatrix} \Sigma x_2^2 & \Sigma x_2 x_3 \\ \Sigma x_2 x_3 & \Sigma x_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma y x_2 \\ \Sigma y x_3 \end{bmatrix}$$

으로부터 $b_2$와 $b_3$의 해를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} b_2 &= \frac{\Sigma y x_2 \Sigma x_3^2 - \Sigma x_2 x_3 \Sigma y x_3}{\Sigma x_2^2 \Sigma x_3^2 - (\Sigma x_2 x_3)^2} = \frac{\sigma_{y2}\sigma_3^2 - \sigma_{23}\sigma_{y3}}{\sigma_2^2\sigma_3^2 - \sigma_{23}^2} \\ b_3 &= \frac{\Sigma y x_3 \Sigma x_2^2 - \Sigma x_2 x_3 \Sigma y x_2}{\Sigma x_2^2 \Sigma x_3^2 - (\Sigma x_2 x_3)^2} = \frac{\sigma_{y3}\sigma_2^2 - \sigma_{23}\sigma_{y2}}{\sigma_2^2\sigma_3^2 - \sigma_{23}^2} \end{aligned} \tag{A2.12}$$

식 (A2.1)과 식 (A2.3)을 비교하면 $f_1$은 $x_2$에, $f_2$는 $x_3$에 상응함을 알 수 있다. 즉 표현 식 (A2.12)는 본 논문의 경우에 다음과 같다.

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{\sigma_{s1}\sigma_2^2 - \sigma_{12}\sigma_{s2}}{\sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_{12}^2} \\ b_2 &= \frac{\sigma_{s2}\sigma_1^2 - \sigma_{12}\sigma_{s1}}{\sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_{12}^2} \end{aligned} \tag{A2.13}$$

$\sigma_{xy} = \rho_{xy}\sigma_x\sigma_y$인 관계($\rho_{xy}$는 상관 계수)를 표현 식 (A2.13)의 공분산 항들에 대입하여 정리하면, 표현 식 (A2.2)를 얻는다. Q. E. D.

## 부록 3

이토의 보조 정리(Ito's lemma)는 다음과 같다. $x$가 $t$의 이토 과정(Ito process)

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz \tag{A3.1}$$

을 따르면, $x$와 $t$의 함수인 $G(x,t)$는 다음의 이토 과정을 따른다.

$$dG = \left( \frac{\delta G}{\delta x} a + \frac{\delta G}{\delta t} + \frac{1}{2} \frac{\delta^2 G}{\delta x^2} b^2 \right) dt + \frac{\delta G}{\delta x} b dz \tag{A3.2}$$

$S$의 확률적 과정 식 (2.1)을 옮겨 적는다.

$$dS = \mu_1^* S dt + \sigma_1^* S dz_1 \tag{A3.3}$$

현물 가격과 선물 가격 간에 차익 거래의 기회가 없기 위한 조건(no-arbitrage condition)인, 선물의 이론 가격을 제시하는 보유 비용(cost-of-carry) 모형 식 (2.5)를 옮겨 적는다.

$$F_{1,t} = S_t e^{\tau^*(M-t)} \tag{A3.4}$$

식 (A3.4)로부터 다음을 구한다.

$$\begin{aligned} &\frac{\delta F_1}{\delta S} = e^{\tau^*(M-t)} \\ &\frac{\delta^2 F_1}{\delta S^2} = 0 \\ &\frac{\delta F_1}{\delta t} = -rSe^{\tau^*(M-t)} \end{aligned} \tag{A3.5}$$

식 (A3.5)에 구한 관계들을 식 (A3.2)에 대입하면 다음과 같다.

$$dF_1 = \left[ e^{\tau^*(M-t)} \mu_1^* S - r^* S e^{\tau^*(M-t)} \right] dt + e^{\tau^*(M-t)} \sigma_1^* S dz_1 \tag{A3.6}$$

관계 식 (A3.4)를 식 (A3.6)에 대입하여 정리하면 다음을 얻는다.

$$dF_1 = \left( \mu_1^* - r^* \right) F_1 dt + \sigma_1^* F_1 dz_1 \tag{A3.7}$$

Q. E. D.

## 부록 4

표현 식 (3.7)과 식 (3.9)를 비교하면 exponential의 지수가 식 (3.7)은 $r^*$이고 (3.9)는 $(r-r^*)$로 다르고 나머지 함수 관계는 동일하다. $r^*$과 $(r-r^*)$는 모두 상수이므로 [부록 3]의 과정과 동일하게 유도하면 되므로 증명을 생략한다.

## 부록 5

일반화된 이토의 보조 정리(generalized version of Ito′s lemma)는 다음과 같다. $x_i$, $i=1,\cdots,n$가 의 이토 과정(Ito process)

$$dx_i = a_i(.,x_i,.,t)dt + b_i(.,x_i,.,t)dz_i \tag{A5.1}$$

$\rho_{ij} \equiv dz_i$와 $dz_j$ 간의 상관 계수

을 따르면, $(x_1,.,x_i,.,x_n,t)$의 함수인 $f(\bullet)$는 다음의 이토 과정을 따른다.

$$df = \left( \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta f}{\delta x_i} a_i + \frac{\delta f}{\delta t} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\delta^2 f}{\delta x_i \delta x_j} b_i b_j \rho_{ij} \right) dt + \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta f}{\delta x_i} b_i dz_i \tag{A5.2}$$

현물 환율의 과정인 표현 식 (3.4)와 식 (3.6)을 옮겨 적는다.

$$\begin{aligned} dS_1 &= \mu_1^* S_1 dt + \sigma_1^* S_1 dz_1 \\ dS_2 &= \mu_2^* S_2 dt + \sigma_2^* S_2 dz_2 \end{aligned} \tag{A5.3}$$

표현 식 (3.11)을 옮겨 적는다.

$$S_3 = S_1 S_2 \tag{A5.4}$$

식 (A5.4)로부터 다음을 구한다.

$$\begin{aligned} &\frac{\delta S_3}{\delta S_1} = S_2 \\ &\frac{\delta S_3}{\delta S_2} = S_1 \\ &\frac{\delta S_3}{\delta t} = 0 \\ &\frac{\delta^2 S_3}{\delta S_1^2} = 0 \\ &\frac{\delta^2 S_3}{\delta S_1 \delta S_2} = 1 \\ &\frac{\delta^2 S_3}{\delta S_2 \delta S_1} = 1 \\ &\frac{\delta^2 S_3}{\delta S_2^2} = 0 \end{aligned} \tag{A5.5}$$

식 (A5.5)에 구한 관계들을 식 (A5.2)에 대입하면 다음을 얻는다.

$$dS_3 = \left(\mu_1^* S_1 S_2 + \mu_2^* S_1 S_2 + \rho_{12}^* \sigma_1^* \sigma_2^* S_1 S_2\right) dt + \sigma_1^* S_1 S_2 dz_1 + \sigma_2^* S_1 S_2 dz_2 \tag{A5.6}$$

관계 식 (A5.4)를 식 (A5.6)에 대입하여 정리하면 식 (3.12)을 얻는다. Q. E. D.

## 부록 6

Hull, J.(2003) p.504를 인용한다.

$$\delta x_i = \mu_i x_i \delta t + \sigma_i x_i \epsilon_i \sqrt{\delta t}$$
$$\delta x_j = \mu_j x_j \delta t + \sigma_j x_j \epsilon_j \sqrt{\delta t}$$

이면

$$\lim_{\delta t \to 0} \delta x_i \delta x_j = b_i b_j \rho_{ij} dt$$

이다

## 부록 7

식 (3.13)~식 (3.16)에 구한 확률적 과정을 이용하여 다음과 같이 파악한다.

$$cov\left(\frac{dS_3}{S_3}, \frac{dF_1}{F_1}\right) = cov\left(\sigma_1^* dz_1 + \sigma_2^* dz_2, \sigma_1^* dz_1\right) = \left(\sigma_1^{*2} + \rho_{12}^* \sigma_1^* \sigma_2^*\right) \delta t \tag{A7.1}$$

$$var\left(\frac{dS_3}{S_3}\right) = var\left(\sigma_1^* dz_1 + \sigma_2^* dz_2\right) = \left(\sigma_1^{*2} + \sigma_2^{*2} + 2\rho_{12}^* \sigma_1^* \sigma_2^*\right) \delta t \, (A5.2)$$

$$\rho_{s1} = \frac{cov\left(\frac{S_{3,T} - S_{3,0}}{S_{3,0}}, \frac{F_{1,T} - F_{1,0}}{F_{1,0}}\right)}{std\left(\frac{S_{3,T} - S_{3,0}}{S_{3,0}}\right) std\left(\frac{F_{1,T} - F_{1,0}}{F_{1,0}}\right)} = \frac{\left(\sigma_1^{*2} + \rho_{12}^* \sigma_1^* \sigma_2^*\right) T}{\sqrt{\left(\sigma_1^{*2} + \sigma_2^{*2} + 2\rho_{12}^* \sigma_1^* \sigma_2^*\right) T} \left(\sigma_1^* \sqrt{T}\right)}$$

$$= \frac{\left(\sigma_1^* + \rho_{12}^* \sigma_2^*\right)}{\sqrt{\sigma_1^{*2} + \sigma_2^{*2} + 2\rho_{12}^* \sigma_1^* \sigma_2^*}} \tag{A5.3}$$

$\rho_{s2}$도 동일한 과정으로 구하면 되므로 생략한다($\rho_{s1}$과 $\rho_{s2}$는 mirror image이다). Q. E. D.