

3차원 지반-구조물 상호작용해석을 위한 입방형 무한요소

Cuboidal Infinite Elements for Soil-Structure-Interaction Analysis in Multi-Layered Half-Space

서 춘 교† 윤 정 방* 김 재 민**
Seo, Choon-Gyo Yun, Chung-Bang Kim, Jae-Min
(논문접수일 : 2005년 5월 30일 ; 심사종료일 : 2007년 1월 9일)

요 지

본 논문은 다중 적층지반상의 지반-구조물 상호작용 해석을 위한 3차원 무한요소를 소개한다. 본 무한요소는 Cartesian 좌표계에서 정식화되었으며, 수평, 수평모서리, 수직, 수직 모서리 그리고 수평 수직 모서리 무한요소로서 총 5개의 무한요소로서 구성된다. 적용한 형상함수 내부의 파동함수들은 적층지반의 파동문제를 효과적으로 모사하며 다중파동성분을 포함하고 있다. 본 요소의 성능을 검증하기 위하여 주파수영역에서 여러 가지 예제해석을 수행하였다. 균질 및 적층지반상 강체기초와 물린 케이슨 기초의 무차원 동적 거동(compliance & impedance)을 구하였으며, 기연구자들의 값과 비교 검토하였다.

핵심용어 : 무한요소, 파동전달, 지반-구조물 상호작용, 적층지반

Abstract

This paper presents 3D infinite elements for the elastodynamic problem with multi-layered half-space. Five different types of infinite elements are formulated by using approximate expressions of multiple wave components for the wave function in multi-layered soil media. They are horizontal, horizontal-corner, vertical, vertical-corner and vertical-horizontal-corner infinite elements. The elements can effectively be used for simulating wave radiation problems with multiple wave components. Numerical example analyses are presented for rigid disk, square footings and embedded footing on homogeneous and layered half-space. The numerical results show the effectiveness of the proposed infinite elements.

Keywords : infinite element, wave propagation, soil-structure interaction, layered halfspace

1. 서 론

지반-구조물 상호작용(Soil-Structure Interaction: SSI) 해석의 핵심 주제 중 하나는 무한 영역에 대한 모형화가 될 것이다. 고전적 방법으로 유한요소를 이용하여 충분히 원역까지 모형화하고, 잘림경계면(truncated boundary)에 대해서는 고정경계로 처리하는 방법이었다. 그러나 이 방법은 만족할 만한 결과를 얻기 위해서는 상당히 넓은 영역을 모형화 하여야 하므로 자유도수의 증가를 피할 수 없으며, 특히 동적 해석의 경우는 외각경계면에서 내부영역으로 향하는 반사파가 존재하게 되어 실제 물리적 거동과는 상이한 결과를 얻게 된다. 이런

단점을 보완하고 원역에 대한 에너지 방사현상(Energy Radiation)을 표현하는 모사경계와 특수 요소에 대한 여러 가지 방법들이 70년대 이후로 최근까지 연구되고 있다. 대표적인 방법으로 점성경계(White 등, 1977), 전달경계(Tassoulas & Kausel, 1983; 김재관 등, 2000), 경계해방법(Wong & Luco 1974, 1985; Liou, 1989; Chow 1986), 경계요소법(Chen & Penzien, 1986; 김문겸 등, 2000) 및 무한요소법(Bettess, 1977; Medina, 1981; Chow & Smith, 1981; Zhao & Valliappan, 1993; Park & Watanabe, 2003; 윤정방 등, 1991; 1995; 2000; 2001; 2006) 등이 많은 연구자들에 의해 개발되어 왔다. 이 방법들은 지반-구조 상호작용

† 책임저자, 한국과학기술원 건설 및 환경공학과 박사과정
Tel: 042-869-3652 ; Fax: 042-869-8290
E-mail: seosck@kaist.ac.kr

* 정희원 · 한국과학기술원 건설 및 환경공학과 교수

** 정희원 · 전남대학교 공학대학 해양토목공학부 교수

· 이 논문에 대한 토론을 2007년 4월 31일까지 본 학회에 보내주시면 2007년 6월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

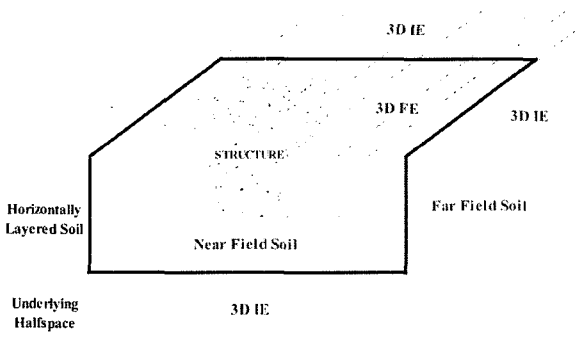


그림 1 3차원 적층지반-구조계의 모형화

용해석을 위한 여러 프로그램들의 핵심 기술이 되었고, 현재 실무분야에도 활용이 되고 있다.

이 연구에서는 지반-구조물 상호작용 해석에서 무한영역으로 에너지 방사현상을 모형화하기 위하여 무한요소법을 적용하였다. 무한요소는 유한요소로 모형화하는 근역 밖의 원역에서 거동을 효과적으로 나타내기 위하여 고안된 특수요소이다. 이 요소는 정식화 과정과 요소행렬의 유도과정이 유한요소와 동일하여 유한요소와 결합하기 쉬운 장점을 가지고 있다. 무한요소가 유한요소와 다른 점은 무한영역의 거동을 나타낼 수 있는 특별한 형상함수가 필요하다는 점과 무한영역에 대한 적절한 적분방법이 필요하다는 사실이다. 따라서 무한요소는 유한요소와 달리 해석하려는 문제에 따라 형상함수가 달라질 수 있으며, 이 연구의 대상인 적층반무한지반에서 동탄성문제는 P-파, S-파 및 표면파를 포함한 다중파동성분에 의한 거동을 형상함수 개발 시 고려하여야 하므로 무한요소 정식화 중에서 가장 복잡하다고 할 수 있다. 한편 물리적 문제에 대한 무한요소의 적용은 침투수나 열전달 등 정적인 문제에 처음 사용이 되었으며(Bettess, 1977; Chow & Smith, 1981), 균질 또는 적층지반의 동탄성 문제에 적용한 무한요소는 2D 문제와 축대칭체 문제를 대상으로 여러 연구자들에 의해 다양하게 개발되어 왔다(Medina, 1981; 윤정방 등 1991; 1993; 2000). 반면 임의의 기초형태를 갖는 대형구조물에 대한 3차원 SSI해석은 컴퓨터의 대형 기억용량과 계산시간이 요구되어 연구가 제한되어 왔지만, 최근 컴퓨터의 연산성능의 급격한 향상으로 이에 대한 연구의 필요성이 대두되었다. 그러나 3차원 동적 무한요소에 대한 연구사례는 탄성 반무한체 지반의 동탄성문제를 해결한 Zhao & Valliappan의 3차원 사상무한요소와 3차원 원통형 적층원역에 대한 확장-축대칭 무한요소를 제안한 Park의 연구결과 밖에 없을 정도로 매우 제한적이었다(Zhao & Valliappan, 1993; Park & Watanabe, 2003).

따라서, 본 연구에서는 그림 1과 같이 임의의 형태를 갖는

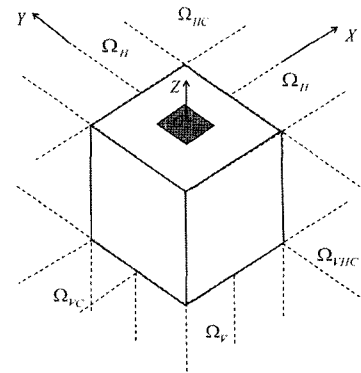


그림 2 3차원 무한영역의 구분

구조물과 근역지반을 입방형으로 굴착된 영역으로 구분하고 유한요소를 이용하여 모형화하였다. 그리고 입방형으로 굴착된 층상반무한 원역지반은 본 연구에서 제안한 3차원 무한요소로서 모형화하였다. 이를 위하여 이 연구에서는 여러 가지 파동성분을 동시에 적용 가능한 형상함수로 구성하였으며, X-Y-Z 수직좌표계에서 정식화하였다. 제안된 3차원 무한요소의 정확성은 반무한 균질지반과 적층지반상에 놓여 있는 원형과 직사각형 강판, 원통형 케이슨기초의 컴플라이언스 및 임피던스 함수를 구하고, 이를 타 연구자들에 의한 값들과 비교함으로써 검증하였다.

2. 3차원 무한요소의 모형화 및 기하 사상

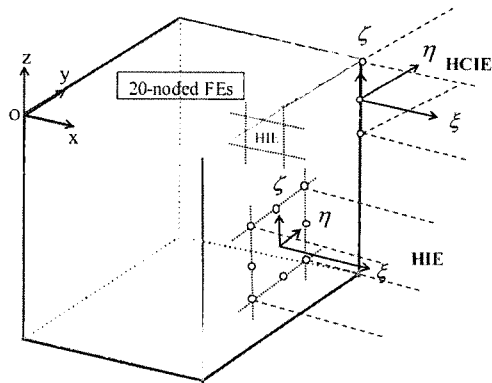
본 연구에서 개발할 무한요소는 3차원 감쇠형 무한요소이며, 그 해당영역과 수치적 모형은 그림 2와 그림 3과 같다. 즉,

표 1 각 무한요소의 사상함수

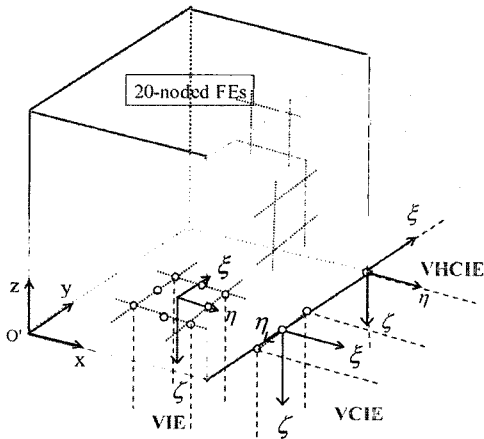
요소구분	x	y	z
HIE	$x_j(1+\xi)$	$\sum_{j=1}^N L_j(\eta, \zeta) y_j$	$\sum_{j=1}^N L_j(\eta, \zeta) z_j$
	$\sum_{j=1}^N L_j(\eta, \zeta) x_j$	$y_j(1+\xi)$	$\sum_{j=1}^N L_j(\eta, \zeta) z_j$
VIE	$\sum_{j=1}^N L_j(\xi, \eta) x_j$	$\sum_{j=1}^N L_j(\xi, \eta) y_j$	$z_j - \zeta$
HCIE	$x_j(1+\xi)$	$y_j(1+\eta)$	$\sum_{j=1}^N L_j(\zeta) z_j$
VCIE	$x_j(1+\xi)$	$\sum_{j=1}^N L_j(\eta) y_j$	$z_j - \zeta$
	$\sum_{j=1}^N L_j(\eta) x_j$	$y_j(1+\xi)$	$z_j - \zeta$
VHCIE	$x_j(1+\xi)$	$y_j(1+\eta)$	$z_j - \zeta$

주: N : 절점의 수 {=8(HIE,VIE), =3(CIE), 20-절점 유한요소 사용시}
 {=4(HIE,VIE), =2(CIE), 8-절점 유한요소 사용시}

L(): Lagrange 다항식



(a) 상부수평영역



(b) 하부반무한영역

그림 3 기하 사상

수평적층지반에 대해서는 수평무한요소(HIE), 수평모서리요소(HCIE), 하부의 반무한 영역에서는 수직무한요소(VIE), 수직모서리요소(VCIE), 수평수직무한요소 (HVCIE)라고 명명하였다. 그리고 본 무한요소의 기하적 사상은 그림 3과 표 1에 자세히 표현되어 있다.

3. 파동함수의 가정

조화하중에 대한 3차원 반무한 매질의 파동전달문제를 풀기 위해서는 지배방정식을 어떤 좌표계에 두느냐에 일차적 선택이 있다. 통상 Navier 파동방정식의 정확해는 원통형 또는 구면좌표계에서 파동의 전달 특성과 기하적 감쇠특성을 잘 나타낸 Bessel Function의 특수형태인 Hankel function으로 알려져 있다. 이 Hankel 함수를 효과적으로 수치 해석에 적용하기 위한 과거 많은 연구자들의 시도와 적용이 있었다. 즉, 연구자들은 파동의 파면형태를 정확히 묘사하기 위하여 원통형 또는 구형 좌표계를 사용한 수치적 모형화 기법을 제안하였고(White *et al.*, 1977; Liou, 1989; Chen & Penzien, 1986; Medina, 1981; 윤정방 등, 1991;

표 2 수직좌표계에서 근사 파동함수

	수평적층영역		하부 반무한영역	
	정해	근사함수	정해	근사함수
표면파	$H_m^{(2)}(kr)$	$\left\{ \begin{aligned} &e^{-(\bar{\alpha}_x + ik_{ax})x}, \\ &e^{-(\bar{\alpha}_y + ik_{ay})y} \end{aligned} \right\}$	$H_m^{(2)}(kr)$	$\left\{ \begin{aligned} &e^{-(\bar{\alpha}_x + ik_{ax})x}, \\ &e^{-(\bar{\alpha}_y + ik_{ay})y}, \\ &e^{-\mu_{bw} z } \end{aligned} \right\}$
압축파	$h_m^{(2)}(kR)$	$\left\{ \begin{aligned} &e^{-(\bar{\beta}_x + ik_{bx})x}, \\ &e^{-(\bar{\beta}_y + ik_{by})y} \end{aligned} \right\}$	$h_m^{(2)}(kR)$	$\left\{ \begin{aligned} &e^{-(\bar{\beta}_x + ik_{bx})x}, \\ &e^{-(\bar{\beta}_y + ik_{by})y}, \\ &e^{-(\bar{\beta}_z + ik_{bz})z} \end{aligned} \right\}$

주: $H_m^{(2)}, h_m^{(2)}$: 제2종 m 차 원통형 및 구형 Hankel 함수

k_{ax}, k_{bx} : 보정파동수,

$\bar{\alpha}_x, \bar{\beta}_x$: 표면파 및 물체파의 기하감쇠계수

a, b : 표면파 및 물체파를 지시하는 아래첨자

μ_{bw} : 하부 반무한영역의 표면파 전달의 영향계수 ($=\sqrt{k_p^2 - k_x^2}$)

1995; 2000), 몇몇 연구자는 수직좌표계에서 평면파의 조합으로 풀기도 하였다(Tassoulas & Kausel, 1983; 김두기 등, 2000). 대부분 원역의 파동과 점근적 거동을 지수함수로 가정을 하였고, 여러 수치기법의 개발과 실제의 물리적 문제에도 적용하였다.

본 연구에서는 3차원 수직좌표계에서의 동적 무한요소의 정식화를 이루고자 하며, 이 무한요소의 형상함수를 구성하는 파동함수는 Yun 등이 제시한 지수함수를 기초로 하였다. 그들은 2차원 또는 원통형 좌표계에서 수치모형화를 이루었고, 적층지반상에서 발생하는 다중적 파동성분의 고려와 함께 효율적 수치적분 방법을 제시하였다(김재민 & 윤정방, 1995).

이 연구에서 적용할 파동함수는 표 2와 같이 정확해로부터 가정한 지수형 근사파동함수로 나타내었다. 이 파동함수들은 수평적층과 하부반무한영역으로 구분하였고, 수직좌표계에서 파동 양상을 나타내기 위하여 각 파동함수는 보정된 파동수 k_x 와 감쇠계수 $\bar{\alpha}_x, \bar{\beta}_x$ 를 가진다. 그림 4(a)와 4(b)는 각각 x-y 평면에서 원통형 파면과 x-y-z 입체상에서 대칭적 구형 파면을 나타낸 것이다. 즉, 원점에서 외부 영역으로 전달되는 파동은 수직 좌표계에서 조망하면, 길어진 파장을 가지면서 파동이 전달 되는 것을 알 수 있다. 이 현상은 저주파일수록 또는 절점 i 와 j 가 축으로부터 멀어질수록 두드러진다. 그림에서 보는 바와 같이 이 연구에서 개발할 무한요소는 수직좌표계의 축방향과 평행을 유지하고, 파동함수 $f_i(k_x \mathbf{x})$ 또한 보정파동수 k_x 를 가지며, 축방향과 나란히 파동전달이 되는 특성을 가진다. 따라서 원의 방정식을

이용하여, 경계면 너머에서 첫 번째 파장의 길이 λ_x 를 아래의 식 (1) 및 식 (2)와 같이 구하였고, 이를 각 방향 별로 보정 파동수 k_x 로 전환하였다.

이 연구에서 적용할 파동함수는 표 2와 같이 정확해로부터 가정한 지수형 근사파동함수로 나타내었다. 이 파동함수들은 수평적층과 하부반무한영역으로 구분하였고, 수직좌표계에서 파동 양상을 나타내기 위하여 각 파동함수는 보정된 파동수 k_x 와 감쇠계수 $\bar{\alpha}_x, \bar{\beta}_x$ 를 가진다. 그림 4(a)와 4(b)는 각각 x-y 평면에서 원통형 파면과 x-y-z 입체상에서 대칭적 구형 파면을 나타낸 것이다. 즉, 원점에서 외부 영역으로 전달되는 파동은 수직 좌표계에서 조망하면, 길어진 파장을 가지면서 파동이 전달 되는 것을 알 수 있다. 이 현상은 저주파일수록 또는 절점 i 와 j 가 축으로부터 멀어질수록 두드러진다. 그림에서 보는 바와 같이 이 연구에서 개발할 무한요소는 수직좌표계의 축방향과 평행을 유지하고, 파동함수 $f_i(k_x \mathbf{x})$ 또한 보정파동수 k_x 를 가지며, 축방향과 나란히 파동전달이 되는 특성을 가진다. 따라서 원의 방정식을 이용하여, 경계면 너머에서 첫 번째 파장의 길이 λ_x 를 아래의 식 (1) 및 식 (2)와 같이 구하였고, 이를 각 방향 별로 보정 파동수 k_x 로 전환하였다.

$$\lambda_x = \sqrt{(n+1)^2 \lambda^2 - (y_j)^2} - \sqrt{n^2 \lambda^2 - (y_j)^2} \quad \text{수평적층 영역}$$

$$\lambda_y = \sqrt{(n+1)^2 \lambda^2 - (x_i)^2} - \sqrt{n^2 \lambda^2 - (x_i)^2} \quad (1)$$

$$\lambda_z = \sqrt{(n+1)^2 \lambda^2 - (r_j)^2} - \sqrt{n^2 \lambda^2 - (r_j)^2} \quad \text{하부반무한 영역}$$

$$(2)$$

여기서, $\lambda (= 2\pi/k)$ 와 k 는 입의 파동의 파장과 파동수를 나타낸다. x_i, x_j, y_i 그리고 y_j 는 경계면상의 입의 점의 좌표값이며, $r_j (= \sqrt{(x_j)^2 + (y_j)^2})$ 는 하부 바닥 경계면상의 입의 점의 반지름을 의미한다. 따라서 보정파동수는 k_x 는 아래와 같이 각 방향과 지반영역별로 나타낼 수 있다. 식 (1)과 (2)를 이용하여 원래의 파동수를 보정하는 계수 θ_x 를 구할 수 있고, 이를 파동함수에 적용하였다.

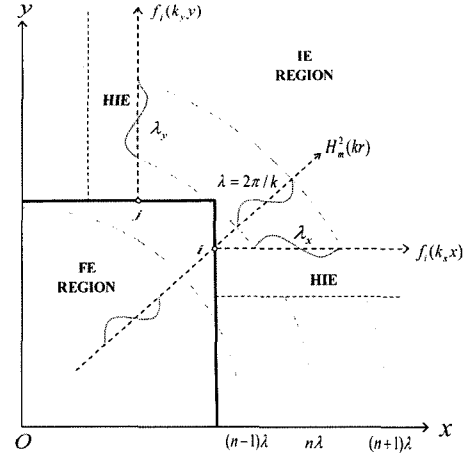
$$k_x = k(\lambda/\lambda_x) = \theta_x k, \quad k_y = k(\lambda/\lambda_y) = \theta_y k \quad \text{상부적층영역}$$

$$k_z = k(\lambda/\lambda_z) = \theta_z k \quad \text{하부반무한 영역} \quad (3)$$

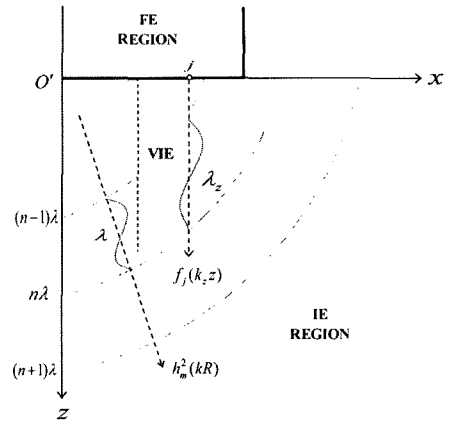
또한, 기하감쇠계수 $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ 는 아래와 같이 정의된다.

$$\bar{\alpha}_x = \theta_x \alpha, \quad \bar{\beta}_x = \theta_x \beta \quad \text{상부적층영역}$$

$$\bar{\beta}_z = \theta_z \beta \quad \text{하부반무한영역} \quad (4)$$



(a) 수평적층영역상에서 보정파동함수

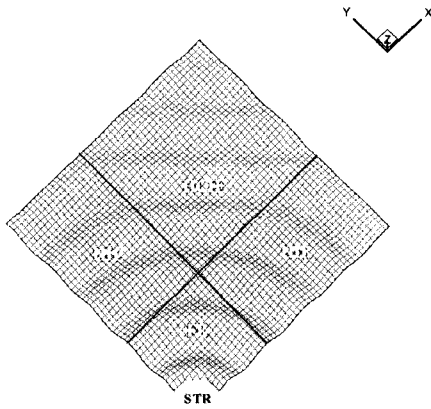


(b) 반무한영역에서 보정파동함수

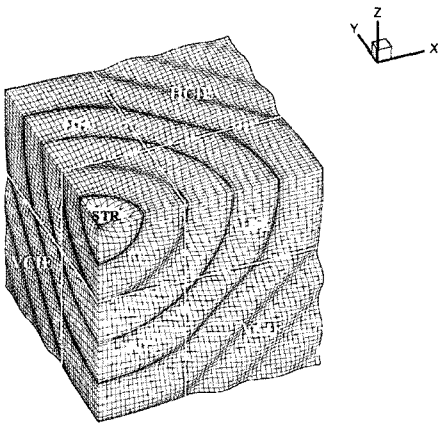
그림 4 수직좌표계에서 파동함수

식 (4)는 수직좌표계에서 늘어난 파동길이에 대하여 같은 감쇠량을 유지해야 한다는 의미이다. 따라서 표 2에서 제안한 파동함수는 상기의 과정에서 정의된 보정파동수와 댐핑계수를 사용하며, 향후 3차원 무한요소의 형상함수에도 적용된다.

그림 5는 위의 보정효과를 잘 보여준 예이다. 원형강판의 Boussinesq 문제(수직 하중)에 대하여 파동이 원역으로 전달되는 형상을 나타내었다. 그림 5(a)는 표면파가 가지는 원통 파형을 나타내며, 5(b)는 물체파의 구면 파형을 모사한 것이라 할 수 있다. 수평과 수직영역은 여러 요소들의 중첩으로 인해 원형의 파형을 나타내지만, 모서리영역들에서는 직선의 파형을 가지는 것을 알 수 있다. 그리고 제한한 보정 파동수의 수치적 효과를 알아보기 위하여 뒤 장에서 전형적 문제에 대해서 수치실험을 수행하였다.



(a) 수평영역에서 표면파의 전달 형상



(b) 균질지반내의 물체파의 전달형상

그림 5 파동수의 보정 및 다섯 가지 무한요소를 이용한 파동의 전달 형상

4. 각 무한요소의 형상함수 및 변위장

무한요소의 변위장은 다음과 같이 일반좌표계에서 정의한다.

$$\mathbf{u}(x, y, z; \omega) = \mathbf{N}_p(x, y, z; \omega) \mathbf{p}(\omega) \quad (5)$$

식 (5)는 각 무한요소에 대하여 다음과 같이 구체화 할 수 있다.

$$\mathbf{u}(x, y, z; \omega) = \sum_{j=1}^{N_N} \sum_{l=1}^{N_{N_1}} \mathbf{N}_{jl}(x, y, z; \omega) \mathbf{p}_{jl}(\omega) \quad (6)$$

for Ω_H and Ω_V

$$\mathbf{u}(x, y, z; \omega) = \sum_{j=1}^{N_N} \sum_{l=1}^{N_{N_2}} \sum_{m=1}^{N_{N_3}} \mathbf{N}_{jlm}(x, y, z; \omega) \mathbf{p}_{jlm}(\omega) \quad (7)$$

for Ω_{HC} and Ω_{VC}

$$\mathbf{u}(x, y, z; \omega) = \sum_{l=1}^{N_{N_1}} \sum_{m=1}^{N_{N_2}} \sum_{n=1}^{N_{N_3}} \mathbf{N}_{lmn}(x, y, z; \omega) \mathbf{p}_{lmn}(\omega)$$

for Ω_{HVC} (8)

여기서 N_N 은 요소의 절점수를 나타내며, N_{N_i} 는 i -번째 무한방향으로 전달되는 파동함수의 개수를 나타낸다. 그리고 $\mathbf{p}_{jlm}(\omega)$ 는 형상함수 \mathbf{N}_{jlm} 에 대응하는 일반좌표벡터이며, 각 형상함수 \mathbf{N}_{jl} , \mathbf{N}_{jlm} 그리고 \mathbf{N}_{lmn} 은 다음과 같이 국부좌표계에서 각 요소에 따라 달리 정의된다.

$$N_{jl}(x, y, z; \omega) = \begin{cases} L_j(\eta, \zeta) f_l(\xi; \omega) & : \text{HIE} \\ L_j(\xi, \eta) h_l(\zeta; \omega) & : \text{VIE} \end{cases} \quad (9)$$

$$N_{jlm}(x, y, z; \omega) = \begin{cases} L_j(\zeta) f_l(\xi; \omega) g_m(\eta; \omega) & : \text{HCIE} \\ L_j(\eta) f_l(\xi; \omega) h_m(\zeta; \omega) & : \text{VCIE} \end{cases} \quad (10)$$

$$N_{lmn}(x, y, z; \omega) = f_l(\xi; \omega) g_m(\eta; \omega) h_n(\zeta; \omega) : \text{VHCIE} \quad (11)$$

위의 식에서 f_l , g_l 그리고 h_l 은 각 무한방향 별 파동함수이며 아래와 같다.

$$f_l(\xi, \omega) \in \left\{ e^{-\theta_x^j(\beta+ik_x)x_j} \xi, e^{-\theta_y^j(\beta+ik_y)y_j} \xi, \left\{ e^{-\theta_z^j(\alpha+ik_z)x_j} \xi \right\}_{a=1}^{N_s} \right\} \quad (12)$$

$$g_l(\eta, \omega) \in \left\{ e^{-\theta_x^j(\beta+ik_x)y_j} \eta, e^{-\theta_y^j(\beta+ik_y)y_j} \eta, \left\{ e^{-\theta_z^j(\alpha+ik_z)y_j} \eta \right\}_{a=1}^{N_s} \right\} \quad (13)$$

$$h_l(\zeta, \omega) \in \left\{ e^{-\theta_x^j(\beta+ik_x)\zeta}, e^{-\theta_y^j(\beta+ik_y)\zeta}, \left\{ e^{-\mu_{sa}\zeta}, e^{-\mu_{pa}\zeta} \right\}_{a=1}^{N_s} \right\} \quad (14)$$

여기서, θ_x^j , θ_y^j 그리고 θ_z^j 는 절점 j 에 해당하는 보정파동계수이다. k_x 와 k_y 는 전달파와 압축파의 파동수를 나타내며, $\{k_a\}_{a=1}^{N_s}$ 는 적층 영역에서 다중적으로 나타나는 표면파의 파동수이다(Liou, 1989; 윤정방 등, 1991; 1995). α 와 β 는 양의 실수 값을 가지는 기하감쇠계수이며, 이 계수들은 향후 수치 실험을 통하여 결정하였다. 한편, 식 (5)에서 미지벡터 \mathbf{p} 는 특별한 물리적 의미를 가지지 않은 매개변수이므로, 이를 직접 전체 동적 강성행렬을 조합할 수 없다. 따라서 3차원 변위형상함수를 절점변위 \mathbf{u}^d (vertex or nodal mode displacement), 모서리변위 \mathbf{u}^e (edge mode displacement), 평면변위 \mathbf{u}^f (face mode displacement) 그리고 내부변위 \mathbf{u}^i (internal or bubble mode displacement)로 조합 할 수 있으며, 이때 물리적 일반좌표계의 매개변수 \mathbf{q} 로 다시 나타낼 수 있다.

표 3 각 모드별 형상함수

	절점 모드 $\mathbf{u}^{(d)}$	모서리 모드 $\mathbf{u}^{(e)}$	면 모드 $\mathbf{u}^{(f)}$	내부 모드 $\mathbf{u}^{(i)}$
HIE	$\sum_{j=1}^N L_j f_j \mathbf{d}_{j1}$	$\sum_{j=1}^{N/2} \sum_{l=2}^{N_h} L_{(2j-1)} \phi_l \mathbf{e}_{(2j-1)l}$	$\sum_{j=1}^{N/2} \sum_{l=2}^{N_h} L_{(2j)} \phi_l \mathbf{f}_{(2j)l}$	
VIE	$\sum_{j=1}^N L_j h_j \mathbf{d}_{j1}$	$\sum_{j=1}^{N/2} \sum_{l=2}^{N_v} L_{(2j-1)} \psi_l \mathbf{e}_{(2j-1)l}$	$\sum_{j=1}^{N/2} \sum_{l=2}^{N_v} L_{(2j)} \psi_l \mathbf{f}_{(2j)l}$	
HCIE	$\sum_{j=1}^N L_j f_j g_j \mathbf{d}_{j11}$	$\sum_{j=1}^{N-1} \sum_{l=2}^{N_h} L_{(2j-1)} \phi_l g_l \mathbf{e}_{(2j-1)1l}$ + $\sum_{j=1}^{N-1} \sum_{m=2}^{N_h} L_{(2j-1)} \phi_l g_m \mathbf{e}_{(2j-1)1m}$	$\sum_{j=1}^{N-1} \sum_{l=2}^{N_h} \sum_{m=2}^{N_h} L_{(2j-1)} \phi_l \varphi_m \mathbf{f}_{(2j-1)lm}$ + $\sum_{m=2}^{N_h} L_2 f_1 \varphi_m \mathbf{f}_{21m}$ + $\sum_{l=2}^{N_h} L_2 \phi_l g_l \mathbf{f}_{21l}$	$\sum_{l=2}^{N_h} \sum_{m=2}^{N_h} L_2 \phi_l \varphi_m \mathbf{i}_{2lm}$
VCIE	$\sum_{j=1}^N L_j f_j h_j \mathbf{d}_{j11}$	$\sum_{j=1}^{N-1} \sum_{l=2}^{N_h} L_{(2j-1)} \phi_l h_l \mathbf{e}_{(2j-1)1l}$ + $\sum_{j=1}^{N-1} \sum_{m=2}^{N_v} L_{(2j-1)} f_1 \psi_m \mathbf{e}_{(2j-1)1m}$	$\sum_{j=1}^{N-1} \sum_{l=2}^{N_h} \sum_{m=2}^{N_v} L_{(2j-1)} \phi_l \psi_m \mathbf{f}_{(2j-1)lm}$ + $\sum_{l=2}^{N_h} L_2 \phi_l h_l \mathbf{f}_{21l}$ + $\sum_{m=2}^{N_v} L_2 f_1 \psi_m \mathbf{f}_{21m}$	$\sum_{l=2}^{N_h} \sum_{m=2}^{N_v} L_2 \phi_l \psi_m \mathbf{i}_{2lm}$
HVCIE	$f_1 g_1 h_1 \mathbf{d}_{111}$	$\sum_{l=2}^{N_h} \phi_l g_l h_l \mathbf{e}_{11l}$ + $\sum_{m=2}^{N_h} f_1 \varphi_m h_l \mathbf{e}_{11m}$ + $\sum_{n=2}^{N_v} f_1 g_1 \psi_n \mathbf{e}_{11n}$	$\sum_{l=2}^{N_h} \sum_{m=2}^{N_h} \phi_l \varphi_m h_l \mathbf{f}_{1m}$ + $\sum_{l=2}^{N_h} \sum_{n=2}^{N_v} \phi_l g_l \psi_n \mathbf{f}_{1n}$ + $\sum_{m=2}^{N_h} \sum_{n=2}^{N_v} f_1 \varphi_m \psi_n \mathbf{f}_{1mn}$	$\sum_{l=2}^{N_h} \sum_{m=2}^{N_h} \sum_{n=2}^{N_v} \phi_l \varphi_m \psi_n \mathbf{i}_{1lmn}$

Notes: N_h : 수평파동성분의 개수; N_v : 수직파동성분의 개수; $\phi_l(\xi; \omega) = f_l(\xi; \omega) - f_1(\xi; \omega)$, $\varphi_m(\eta; \omega) = g_m(\eta; \omega) - g_1(\eta; \omega)$, $\psi_n(\zeta; \omega) = h_n(\zeta; \omega) - h_1(\zeta; \omega)$

$$\{\mathbf{u}(\mathbf{x}; \omega)\} = \{\mathbf{u}^d(\mathbf{x}; \omega)\} + \{\mathbf{u}^e(\mathbf{x}; \omega)\} + \{\mathbf{u}^f(\mathbf{x}; \omega)\} + \{\mathbf{u}^i(\mathbf{x}; \omega)\}$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}; \omega) = \mathbf{N}_q(\mathbf{x}; \omega) \mathbf{q}(\omega) \quad (15)$$

여기서,

$$\mathbf{N}_q(\mathbf{x}; \omega) = [\mathbf{N}_d, \mathbf{N}_e, \mathbf{N}_f, \mathbf{N}_i], \quad \mathbf{q} = \langle \mathbf{d}^T, \mathbf{e}^T, \mathbf{f}^T, \mathbf{i}^T \rangle^T \quad (16)$$

이 관계에 대한 자세한 기술은 표 3에 나타내었다. 벡터 \mathbf{q} 는 절점(\mathbf{d}), 모서리(\mathbf{e}), 평면(\mathbf{f}) 그리고 내부변위모드(\mathbf{i}) 로서 다중모드의 합으로 구성되어 있음을 알 수 있다. 그리고 각 모드별 형상함수들의 예는 표 3과 그림 6에 나타내었다. 결국 두 개의 일반좌표벡터 $\mathbf{p}(\omega)$ 와 $\mathbf{q}(\omega)$ 의 관계는 다음과 같이 정의된다(김재민 & 윤정방, 1995).

$$\mathbf{p}(\omega) = \mathbf{T}_{pq} \mathbf{q}(\omega) \quad (17)$$

여기서, \mathbf{T}_{pq} 는 식 (5)와 식 (15)로부터 유도할 수 있으며 변환행렬이라고 한다. 따라서 두 일반 좌표계의 형상함수 관계도 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{N}_q(x, y, z; \omega) = \mathbf{N}_p(x, y, z; \omega) \mathbf{T}_{pq} \quad (18)$$

5. 요소행렬 및 운동방정식

무한요소의 요소행렬계산은 유한요소의 계산과정과 유사하며, 요소행렬은 다음과 같다.

$$\mathbf{K}_{qq}^{(e)} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_q^T \mathbf{D} \mathbf{B}_q d\Omega, \quad \mathbf{M}_{qq}^{(e)} = \int_{\Omega} \mathbf{N}_q^T \rho \mathbf{N}_q d\Omega \quad (19)$$

여기서, $d\Omega = dx dy dz$; \mathbf{D} 는 재료탄성행렬이고, \mathbf{B}_q 는 변형을 행렬이다. 이 식의 적분은 유한방향에 대해서는 통상의 Gauss-Legendre 적분법, 무한방향의 경우 Gauss-Laguerre 적분법을 사용한다. 본 연구에서는 수치적분을 일반좌표계에서 적용한 효과적 방법을 이용하였다(김재민 & 윤정방, 1995). 그리고 변환행렬을 곱하여 물리적 의미를 갖는 요소행렬을 구할 수 있다.

$$\mathbf{K}_{pp}^{(e)} = \mathbf{T}_{pq}^T \mathbf{K}_{qq}^{(e)} \mathbf{T}_{pq}, \quad \mathbf{M}_{pp}^{(e)} = \mathbf{T}_{pq}^T \mathbf{M}_{qq}^{(e)} \mathbf{T}_{pq} \quad (20)$$

여기서, \mathbf{T}_{pq} 는 식 (17)에서 정의된 변환행렬이다. \mathbf{K}_{pp} 와 \mathbf{M}_{pp} 는 매개변수 $\mathbf{p}(\omega)$ 와 관련한 요소 행렬이며, 이 행렬을 구할 때에는 하나의 파동성분만을 포함하므로 비교적 적은 적분점으로 적분 가능하다. 최종적으로 주파수영역에서 강제진

동해석의 운동방정식이 다음과 같이 나타낼 수 있으며, 본 연구에서 개발한 무한요소의 검증예제를 수행하였다.

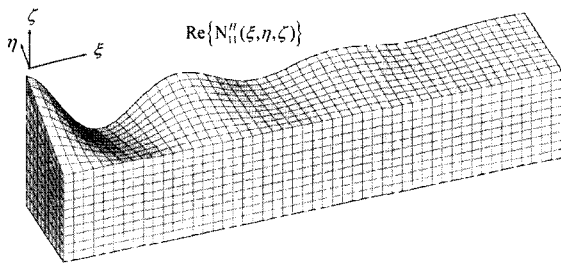
$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_m(\omega) & \mathbf{S}_m(\omega) \\ \mathbf{S}_{in}(\omega) & \mathbf{S}_{ii}(\omega) + \mathbf{S}_{ii}^f(\omega) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_n(\omega) \\ \mathbf{U}_i(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_n(\omega) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (21)$$

$$\mathbf{S}^{(e)}(\omega) = (1 + i2\beta_d^{(e)})\mathbf{K}^{(e)}(\omega) - \omega^2\mathbf{M}^{(e)}(\omega)$$

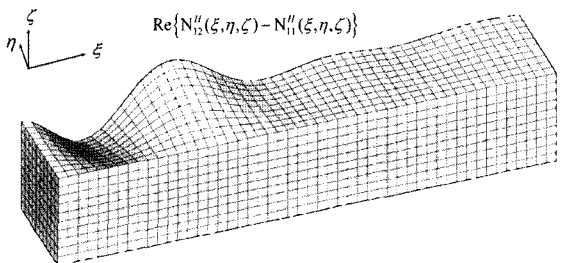
여기서, $\mathbf{U}(\omega)$ 과 $\mathbf{F}(\omega)$ 는 변위 및 하중벡터이다; $\mathbf{S}(\omega)$ 은 동적 강성행렬을 의미하고, β_d 는 히스테리틱 댐핑이다; f 는 원역의 지반을 의미한다; 아래첨자 n 은 근역의 구조물과 지반의 자유도 그리고 i 는 경계면에서 자유도를 나타낸다.

6. 수치 실험 및 예제해석

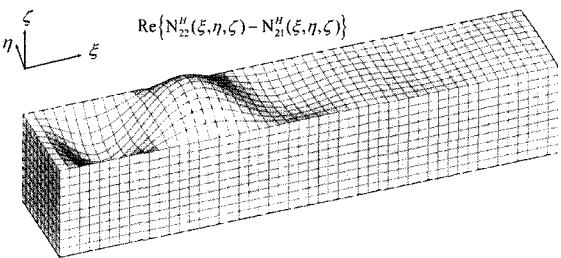
본 장에서는 앞서 언급한 수치실험과 여러 가지 형상의 예제 기초의 응답함수를 구하여, 제안한 무한요소의 타당성과 성능을 검토하였다. 그림 7과 8은 예제의 기하 및 재료적 정의 그리고 수치적 모형을 나타낸 것이다.



(a) 절점모드

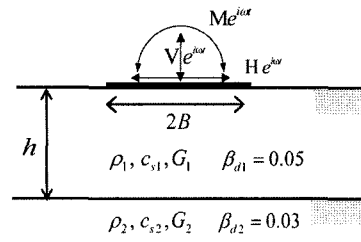


(b) 모서리모드

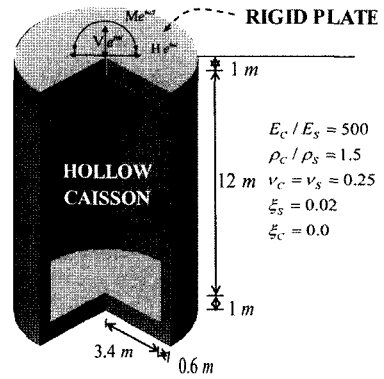


(c) 면모드

그림 6 8절점 수평무한요소의 형상함수의 예(실수부)

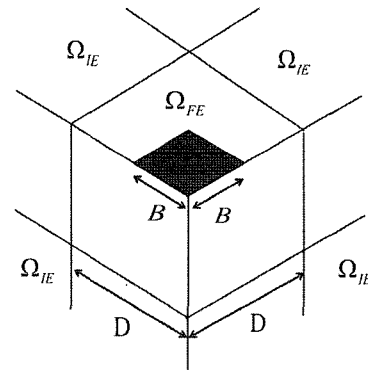


(a) 수평적층지반상의 강체기초

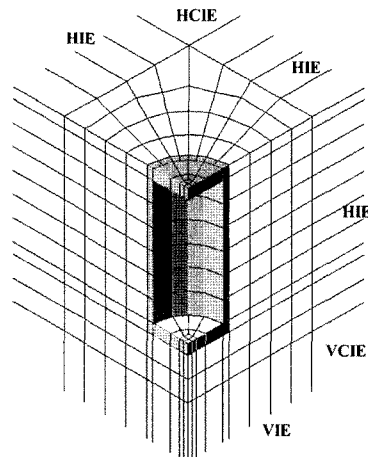


(b) 문힌 케이슨 기초

그림 7 수치예제의 재료적 및 기하적 정의



(a) 정사각형 기초



(b) 문힌 케이슨 기초

그림 8 예제의 수치모형화

6.1 수치실험

먼저 수직 좌표계의 파동함수에 적용한 보정파동수의 효과를 알아보았다. 이 수치실험에서 선택한 예제는 균질지반상의 정사각형 강판의 수직 및 수평 거동을 구한 전형적 예이다. 구해진 컴플라이언스 함수($C(a_0)$)는 각각 보정파동수(\bar{k})와 원래의 파동수(k) 모두를 사용하였다. 그림 9(a)와 (b)는 기연 구자(Chow, 1986)의 값($C_R(a_0)$)과 본 연구에서 구한 결과의 상대차이($\|C(a_0) - C_R(a_0)\| / \|C_R(a_0)\|$, $0 \leq a_0 \leq 3$)를 나타내었다. 결과에서 보듯, 보정파동수를 사용하면 인용값과의 차가 더 빨리 줄어드는 것을 알 수 있으며, 파동수의 보정이 해의 정확성에 영향을 주고 수치 모형화에 있어 원역까지 거리를 좁히는 역할을 하고 있음을 알 수 있다.

그림 10(a)와 (b)는 기하감쇠계수 (α, β) 결정을 위한 수치실험을 나타낸 것이다. 이 수치실험에서 감쇠계수는 저주파 영역에서 민감하나, 대부분의 영역에서 큰 영향을 받지 않는 것을 알 수 있다. 모두 5가지 경우의 감쇠계수 쌍에 대하여 수평 및 수직 컴플라이언스 함수를 구하였다. 인용자(Chow,

1986)의 값과 비교하여 가장 안정적 값을 도출한 $\alpha = 0.25$, $\beta = 0.75$ 의 경우를 채택하였다. 이 계수들은 향후 모든 수치 해석해석에서 일관되게 사용되었다.

6.2 예제해석

그림 7에서 나타난 바와 같이 크게 두 종류의 예제해석을 수행하였다. 첫 번째 예제는 균질 및 적층 반무한 지반상의 정사각형 강판 기초의 컴플라이언스 해석이며, 두 번째 예제는 균질지반내의 묻힌 케이스 기초의 임피던스 해석이다. 식 (21)과 같이 주파수 영역에서 지반-구조계의 강제진동해석을 수행할 때, 통상 그 해에 해당하는 구조물의 응답함수(컴플라이언스 및 임피던스)는 무차원화하고 일반화하여 정의된다. 이 함수들은 서로 역수 관계를 가지며 무차원 주파수 $a_0 (= \omega B / c_{s1})$ 에 의해 정의 된다. 먼저 무차원 컴플라이언스 함수는 아래와 같다(Karasudhi, 1991).

$$C_{HH}(a_0) = \frac{G_1 B \Delta_x}{H}, \quad C_{VV}(a_0) = \frac{G_1 B \Delta_z}{V}$$

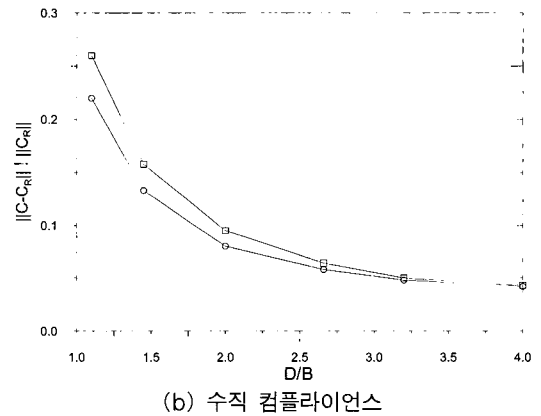
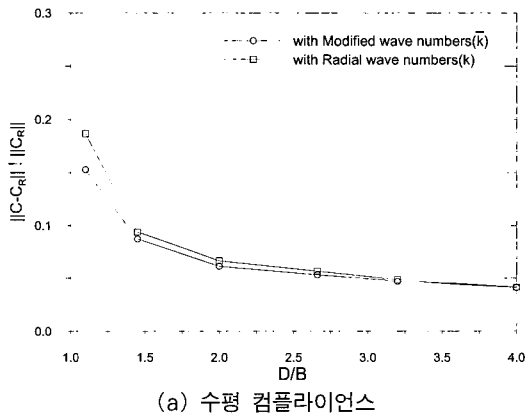


그림 9 파동 보정효과에 대한 비교 수치실험

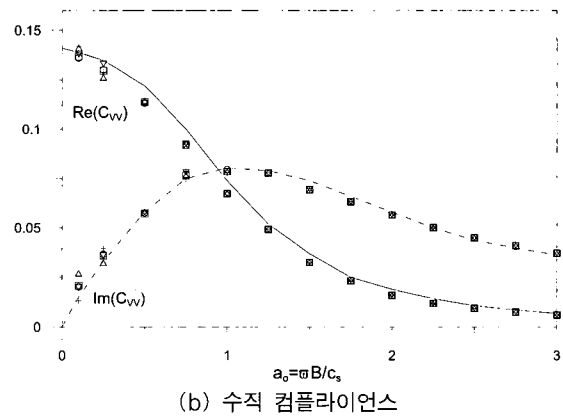
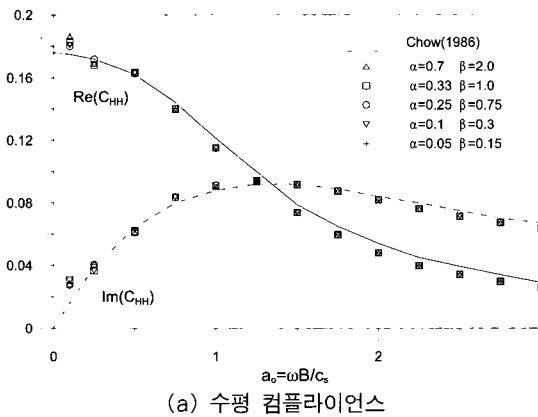


그림 10 기하감쇠계수 결정을 위한 수치실험

$$C_{MM}(a_0) = \frac{G_1 B^3 \theta_y}{M} \quad (22)$$

상기에서, c_{s1} 는 최상층 수평적층의 전단파속도이고, B 는 정사각형 강판기초의 반폭을 의미한다; C_{HH} 와 C_{VV} 는 수평 그리고 수직 무차원 컴플라이언스 함수이며, C_{MM} 과 C_{HM} 은 무차원 락킹 및 커플링 컴플라이언스이다; H , M 그리고 V 는 그림 7(a)에서 알 수 있듯이 각각 수평, 회전 그리고 수직의 방향력을 의미한다; $G_1 (= \rho c_{s1}^2)$ 는 전단 계수이며 Δ 와 θ 는 각 방향의 변위와 회전각이다. 또한 임피던스 함수는 $K_{ij}(\omega) = K_{ij}^{sta}(k_{ij}(\omega) + ia_0 c_{ij}(\omega))$ 로서 정방 행렬로서 정의된다. 여기서, K_{ij}^{sta} 는 임의 형상기초의 정적 강성도이며, k_{ij} 는 무차원 동적 강성계수 그리고 c_{ij} 는 무차원 댐핑계수이다. 본 연구에서는 물론 케이스 기초의 대칭적 특성을 고려하였고 비틀림(torsion) 성분을 제외하였으므로, 아래와 같이 3×3 임피던스 행렬을 이용한 대수방정식 형태로 지반-구조 상호작용계내의 무질량 강체기초에서 발생하는 힘-변위 관계를 정의 할 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} H \\ M \\ V \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{HH}(\omega) & K_{HM}(\omega) & 0 \\ K_{MH}(\omega) & K_{MM}(\omega) & 0 \\ 0 & 0 & K_{VV}(\omega) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_x \\ \theta_y \\ \Delta_z \end{Bmatrix} \quad (23)$$

여기서, K_{HH} 와 K_{VV} 는 수평 그리고 수직 임피던스이며, K_{MM} 과 K_{HM} 은 락킹 및 커플링 임피던스 함수이다.

6.2.1 정사각형 표면기초

이 예제의 수치모형은 그림 8(a)에 도시되어 있다. 그림 11은 균질 지반상의 정사각형 강판의 방향 별 무차원 컴플라이언스 함수를 나타내었고, 기연구자들의 수치해석 결과와 비교한 것이다. 여기서 실선과 점선은 본 연구의 컴플라이언스 함수의 실수치와 허수치를 나타낸다. 기존 연구자들 중 Wong & Luco와 Chow는 경계해법(boundary solution method)을 이용하였고, Zhao & Valliappan은 사상형 3차원 무한요소를 이용하여, 각기 해석을 수행하였다(Wong & Luco, 1976; Chow, 1986; Zhao & Valliappan, 1993). 그림 11(a)~(c)에서 확인 할 수 있듯이, 본 연구의 결과는 Chow의 결과와 비슷한 경향을 보이고 있음을 알 수 있으며, 다만 락킹 응답의 경우 연구자들의 값들이 큰 편차를 이루는 것을 알 수가 있다. 이는 본 연구, Chow 그리고 Luco의 해석값은 표면기초와 지반의 경계조건이 느슨한 조건(relaxed condition)하에서 수행이 되었다. 허나 Luco는 여기에 유연도계수가 더 고려되어 응답이 과평가 되었다고 할 수 있다. Zhao는 고정된 조건(bonded condition)하에서 해석을 수행한 결과이다. 통상 정방형 강판의 동적 컴

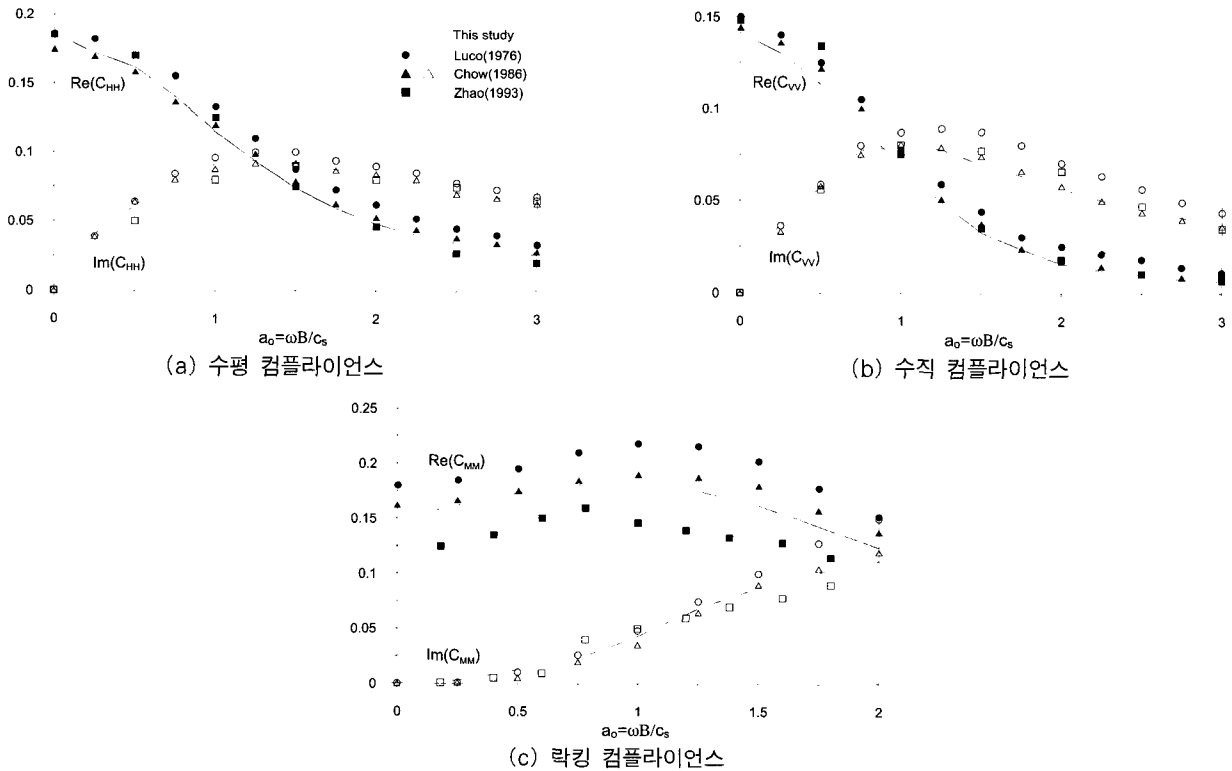


그림 11 균질 지반상의 정방형 강판기초의 컴플라이언스 함수 ($\beta_d = 0.02$)

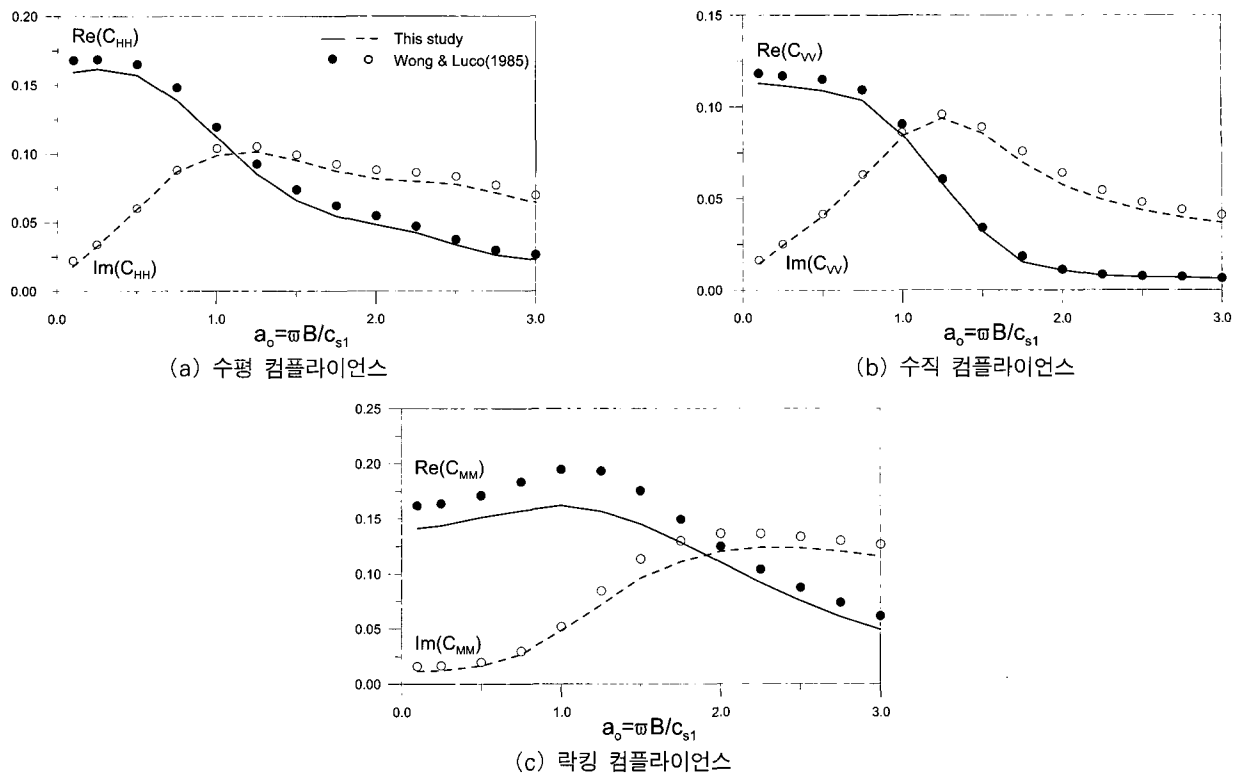


그림 12 적층지반상의 정방형 강판기초의 컴플라이언스 함수

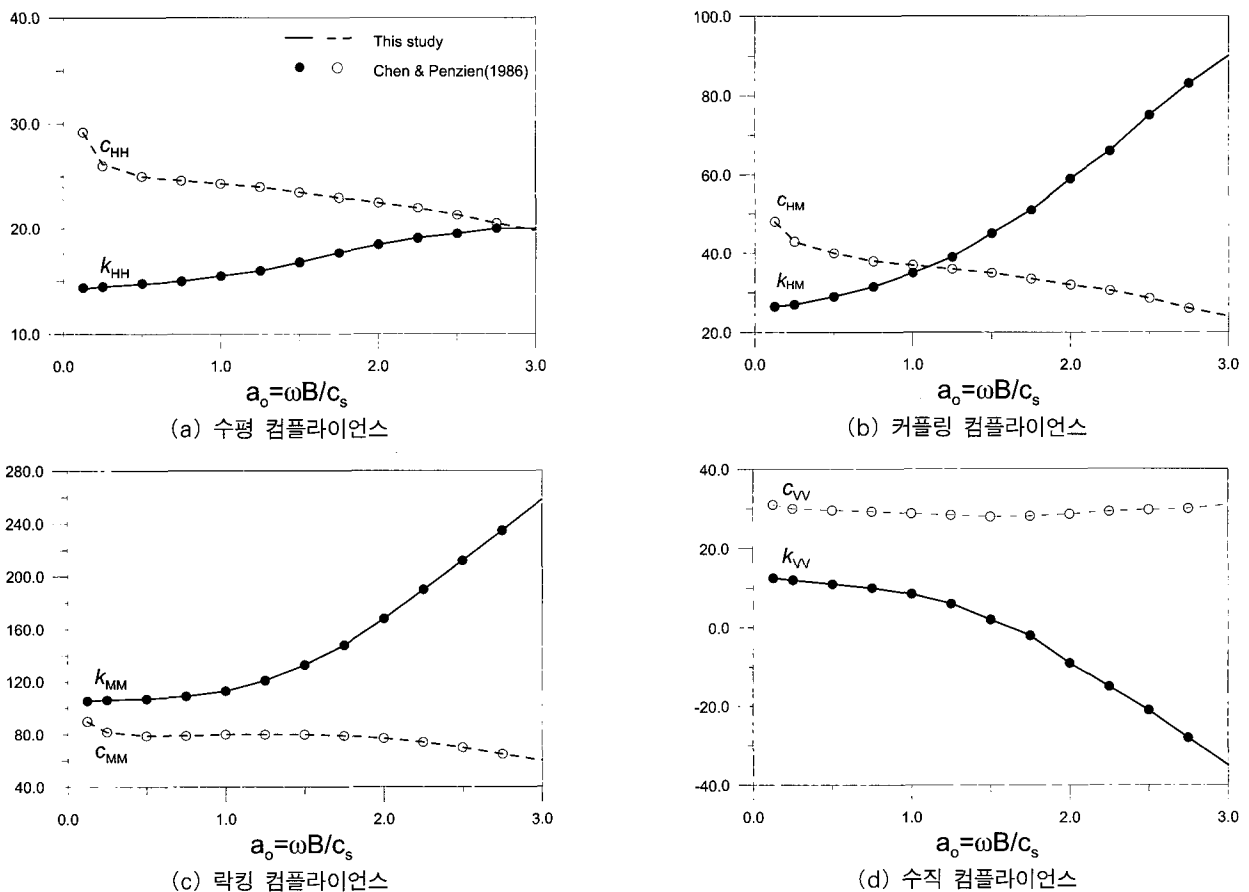


그림 13 물린 케이션 기초상의 원형 강판의 임피던스 함수

플라이언스 응답의 정해는 없으나, 정적 응답($\omega=0$)이라 할 수 있는 $C_{MM}(0)$ 값은 정해가 있다. 즉, 균질 지반상의 정사각형 강판의 정적 락킹 응답이라 할 수 있는 $C_{MM}(0)$ 값에서부터 정해에서 큰 차이가 발생한다는 과거 연구 사례가 있다(Chow, 1986). 반면, 그림 12는 적층지반상의 정사각형 강판기초의 컴플라이언스 함수를 나타낸 것이다. 그림 7(a)을 보듯, 강판의 반폭과 적층 깊이의 비(h/B)가 2.0이며, 두 적층간의 물성비는 단위 질량비(ρ_2/ρ_1)와 전단파 속도비(c_{s2}/c_{s1})가 각각 1.13, 1.25이다. 본 연구의 결과는 Wong & Luco의 결과(Wong & Luco, 1985)와 비교하여 수평과 수직은 비슷한 경향을 보이나, 락킹의 경우 비교적 작게 산정된 경향이 있다. 이는 균질지반에서 발생했던 연속적 현상이라 볼 수 있다.

6.2.2 문헌 케이스 기초

본 연구에서 개발한 3차원 무한요소의 유용성에 대한 검증도 수행되었다. 적용 예제의 형상과 재료물성은 그림 7(b)와 같고 수치 모형은 그림 8(b)에 도시하였다. 이 예제는 실제 교량의 기초구조물이며, 표면기초와 달리 문헌 기초라는 특성상 커플링 효과가 크게 작용한다. 그림 13은 케이스기초의 방향 별 임피던스를 구하여 동적 강성계수(k_{ij})와 댐핑계수(c_{ij})를 나타낸 그래프이며, 이들은 $\nu_s R$ 과 $\nu_s R^3$ 에 의해 무차원화되었다. 그림 13에서 보는 바와 같이, 본 연구의 결과와 경계요소법을 이용한 Chen & Penzien (1986)의 결과가 일치하여 나타남을 알 수 있다.

7. 요약 및 결론

본 연구는 3차원 지반-구조물 상호작용해석을 위한 동적 무한요소를 개발하였으며, 여러 수치예제를 통하여 무한요소의 타당성과 성능에 대하여 검증을 하였다. 외부영역으로 파동전파를 모형화하기 위하여 다섯 종류의 3차원 동적 무한요소를 제시하였다. 형상함수의 파동함수는 탄성파의 전파형상과 정확해를 가정한 지수함수를 사용하였고 다중의 파동성분까지 고려하였다. 그리고 파동함수의 파동수를 파의 종류와 경계면의 위치에 따라 보정계수를 적용하여, 3차원 수직좌표계에서 파동전달을 용이하게 하였다. 이는 해의 수렴속도에 긍정적 영향을 주었으며, 수치 모형화를 하는데 있어 기초변장에 대한 원역까지의 거리를 좁히는데 기여를 하는 것으로 나타났다.

본 무한요소를 검증하기 위하여 균질 및 적층지반에 놓인 정사각형 그리고 문헌 케이스 기초상의 컴플라이언스와 임피던

스를 계산한 후, 기 연구자들의 결과와 비교를 하였다. 제안한 무한요소를 예제해석에 적용했을 때, 기초들의 동적 거동은 비교적 좋은 결과를 얻을 수가 있었다. 이 성과는 향후 지반-구조물의 복잡한 파동문제를 해결하는데 효과적으로 이용될 것이며, 특히 교량의 기초나 불규칙한 기하형상의 기초를 가진 대형구조물에 대하여 지반-구조물 상호작용을 고려한 지진응답해석을 수행하는데 유용하게 이용될 것이라 본다.

감사의 글

본 연구는 한국과학기술원 SISTeC의 지원연구비에 의해 수행되었으며 이에 감사 드립니다.

참고 문헌

- 김두기, 윤정방, 김두훈(2001) 유한요소와 무한요소를 사용한 2차원 지반-구조물계의 시간영역에서의 지진응답해석, *대한토목학회 논문집*, 21(4), pp.425~433.
- 김재민, 윤정방(1995) 다층 반무한지반에서 지반-구조물 상호작용해석을 위한 동적 무한요소, *대한토목학회 논문집*, 15(1), pp.51~62.
- 서준교, 윤정방(2005) 3차원 지반-구조물 상호작용해석을 위한 동적 무한요소, *한국전산구조공학회 학술대회 논문집*, 05 춘계학술발표회 논문집, pp.521~528.
- 양신추, 윤정방(1991) 지반-구조물 상호작용해석을 위한 동적 무한요소, *대한토목학회 논문집*, 11(3), pp.47~58.
- 최준성, 윤정방, 김재민, 이종세(2000) 강제진동 시험자료를 이용한 화력 지반-구조물 상호작용계의 미지계수 추정, *대한토목학회 논문집*, 20(5A), pp.831~841.
- Bettess, P.(1977) Infinite element, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 11, pp.54~64.
- Chen, C.H., Penzien, J.(1986) Dynamic modeling of axisymmetric foundation, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 14, pp.823~840.
- Chow, Y.K.(1986) Simplified analysis of dynamic response of rigid foundations with arbitrary geometries, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 14, pp.643~653.
- Chow, Y.K., Smith, I.M.(1981) Static and Periodic infinite solid elements, *Int. J. Numerical Methods Eng.*, 17, pp.503~526.
- Karasudhi, P.(1991) *Foundations of solid mechanics*, Kluwer Academic Publisher, pp.439.
- Kim, J. K., Koh, H.M., Kwon, K.J., Yi J.S.(2000) A three-dimensional transmitting boundary formulated in Cartesian co-ordinate system for the

- dynamics of non-axisymmetric foundations, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 29, pp.1527~1546.
- Kim, M.K., Lim, Y.M., Rhee J.W.**(2000) Dynamic analysis of layered half planes by coupled finite and boundary elements, *Engineering Structures*, 22, pp.670~680.
- Liou, G.S.**(1989) Analytical solutions for soil-structure interaction in layered media, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 18, pp.667~686.
- Medina, F.**(1981) An axisymmetric infinite element, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 17, pp.1177~1185.
- Park, K.R., Watanabe, E.**(2003) Development of 3 dimensional dynamic infinite elements in layered media, *Proceeding of 16th KKCNN Symposium*, Gyeongju, Korea, pp.385~390.
- Tassoulas, J.L., Kausel, E.**(1983) Elements for the numerical analysis of wave motion in layered media, *Int. J. Numerical Methods Eng.*, 19, pp.1005~1032.
- White, W., Valliappan, S., Lee, I.K.**(1977) Unified boundary for finite dynamic model, *J. Eng. Mech. Div., ASCE*, 103.
- Wong, H.L., Luco, J.E.**(1976) Dynamic response of a rigid foundation of arbitrary shape, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 4, pp.579~587.
- Wong, H.L., Luco, J.E.**(1985) Tables of impedance functions for square foundations on layered media, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 4, pp.64~81.
- Zhao, C., Valliappan, S.**(1993) A Dynamic Infinite Element for Three-Dimensional Infinite Domain Wave Problem, *Int. J. Numerical Methods Eng.*, 36, pp.2567~2580.