

탄성 구조물의 안정성을 고려한 형상최적설계

A Study on Shape Optimum Design for Stability of Elastic Structures

양 옥 진*

최 주 호†

Yang, Wook-Jin

Choi, Joo-Ho

(논문접수일 : 2006년 1월 3일 ; 심사종료일 : 2007년 1월 22일)

요 지

본 연구에서는 설계민감도 해석기법을 사용하여 구조물의 안정성, 즉 좌굴을 고려한 형상 최적설계를 수행하였다. 형상 변수를 고려한 설계민감도 해석을 수행하기 위해 전미분 개념을 도입하고, 이를 이용하여 연속체기반의 변분방정식을 미분하여 민감도공식을 유도하였다. 기존의 유한차분법과 비교할 때 설계민감도 해석법의 장점은 설계변수의 갯수에 상관없이 매우 적은 해석횟수를 가지고도 민감도를 더 정확하게 계산할 수 있으며, 해석결과만을 이용하여 민감도계산을 수행하므로 상용 해석 소프트웨어를 활용할 수 있다는 것이다. 한편 좌굴문제를 다룰 때는 일반적으로 보나 셸 같은 구조요소를 이용하지만 본 연구에서는 솔리드 요소를 이용한 연속체 모델로 고려하였는데 그 이유는 연속체 모델을 이용하면 뚝뚝한 형상 뿐만 아니라 보나 셸 같은 슬림(slim) 한 모델을 모두 해석할 수 있기 때문이다. 설계민감도를 활용하여 여러가지 좌굴문제에 대해 형상 설계민감도 계산 및 최적설계를 수행하였다. 그 결과 실행함수가 매우 빠르게 수렴하는 것을 확인할 수 있었고, 설계변수가 많아지고 해석시간이 길어질수록 더 효율적인 것을 알 수 있었다.

핵심용어 : 형상 설계민감도 해석, 좌굴하중, 안정성문제, 형상 최적설계

Abstract

This paper addresses a method for shape optimization of a continuous elastic body considering stability, i.e., buckling behavior. The sensitivity formula for critical load is analytically derived and expressed in terms of shape variation, based on the continuum formulation of the stability problem. Unlike the conventional finite difference method (FDM), this method is efficient in that only a couple of analyses are required regardless of the number of design parameters. Commercial software such as ANSYS can be employed since the method requires only the result of the analysis in computation of the sensitivity. Though the buckling problem is more efficiently solved by structural elements such as a beam and shell, elastic solids have been chosen for the buckling analysis because solid elements can generally be used for any kind of structure whether it is thick or thin. Sensitivity is then computed by using the mathematical package MATLAB with the initial stress and buckling analysis of ANSYS. Several problems are chosen in order to illustrate the efficiency of the presented method. They are applied to the shape optimization problems to minimize weight under allowed critical loads and to maximize critical loads under same volume.

Keywords : shape design sensitivity analysis, buckling load, stability problem, shape optimization

1. 서 론

근래에 들어서 기계 구조물이나 건축 및 항공 분야에 이르기 까지 좌굴(buckling)과 같은 안정성(stability)문제는 설계 변경을 위해 중요한 요인으로 작용되고 있다. 이는 설계 변수의 변화에 따른 시스템 응답의 변화를 예측하고 수치적 최적화 기법을 사용하여 설계의 최적화를 수행할 수 있다.

좌굴, 즉 안정성을 고려한 문제에서는 구조물의 통상적인 정적 응력해석을 수행한 후 이를 토대로 추가해석을 실시하므로, 이를 고려하여 최적화를 할 경우는 기존의 구조 최적화보다 더 복잡한 측면이 있다. 설계변수에 대한 응답값의 변화 즉 민감도(sensitivity)를 구하는 방법은 여러 가지가 있으나, 설계변수를 증분 시켜 응답을 구한 후 차분을 계산하는 유한차분법(Finite Difference Method, FDM)이 적용

† 책임저자, 정회원 · 한국항공대학교 항공우주 및 기계공학부 교수
Tel: 02-300-0117 ; Fax: 02-3158-2191
E-mail: jhchoi@hau.ac.kr

* 한국항공대학교 대학원

• 이 논문에 대한 토론을 2007년 4월 31일까지 본 학회에 보내주시면 2007년 6월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

의 편리함 때문에 가장 널리 쓰이고 있다. 하지만 이 방법은 설계변수 갯수가 증가하고, 응답값을 얻어내는 해석 시간이 길어질수록 더 많은 시간과 비용을 요구하게 된다. 또한 수치미분을 이용한 오차가 발생하게 되어 바람직하지 못하다. 반면에 본 연구에서 수행한 설계 민감도 해석(Design Sensitivity Analysis, DSA) 방법은 구조해석 문제를 해석적으로 미분하여 이로부터 민감도 공식을 만들고, 이것을 계산하는 방법으로서 정확할 뿐만 아니라 계산시간도 매우 적게 걸리는 효과적인 방법으로 알려져 있다(Haftka, 1992 ; Choi, 2005).

본 연구에서는 이러한 효과적인 방법을 좌굴을 고려한 설계 문제에 적용하고자 한다. DSA 방법을 적용하여 좌굴을 고려한 최적설계를 수행한 사례는 최근의 몇몇 논문에서 발견되고 있다. Gu 등(2000)과 Boer 등(2000) 그리고 Ozakca 등(2003)의 것이 있는데 이는 좌굴을 고려한 보, 판, 셸(shell) 구조물에 대한 것으로 여기서 사용한 방법은 이산화된 구조해석 방정식을 미분하고 이로부터 민감도 공식을 만들어 계산하는 이산화 접근법(discrete approach)과 강성행렬의 미분계산을 위해 유한차분을 사용하는 준 해석적(semi analytical)방법을 사용하고 있다. 이들의 연구는 민감도 정보를 얻기 위해 처음부터 직접 코드를 만들고 강성행렬 정보를 필요로 하기 때문에 상용 해석 소프트웨어를 사용하는 것이 불가능하다. 또한 형상이 아닌 치수를 설계변수로 고려하였고, 보나 셸 같은 구조요소(structural element)를 대상으로 했기 때문에 CAD 모델로부터 해석모델을 만드는 경우, 솔리드를 변환시켜야 하는 번거로움이 있다.

본 연구에서는 좌굴 문제에 대해, 구조요소가 아닌 연속체 구조물(continuum structure)을 대상으로, 그리고 치수가 아닌 형상을 고려하여, 설계민감도 해석을 수행하는 방법을 개발하였다. 또한 이산화 접근법이 아닌 연속체 접근법을 사용하였는데, 이는 이산화되기 전인 원래의 구조해석 방정식을 해석적으로 미분하고, 이를 토대로 민감도 공식을 유도하는 방법이다. 이 방법은 이산화 접근법에 비해 더 높은 수학적 지식을 필요로 하지만 일단 공식을 얻고 나면 계산과정이 매우 편리하고, 정확도도 더 좋은 장점이 있다. 게다가 해석코드가 어떤 것이든 상관없이 해석결과만을 가지고 민감도를 계산하므로 상용 코드를 사용할 수 있는 이점도 있다. 이러한 장점에도 불구하고 좌굴 문제에서 연속체 접근법을 이용한 DSA 연구사례는 아직 찾아 볼 수 없다.

본 연구에서는 좌굴을 고려한 형상 DSA를 수행하는 방법으로 설계변수의 변화에 따른 임계좌굴하중(critical buckling load)의 변화에 관한 민감도 공식을 유도하였고, 이를 형상변분(shape variation)의 함수로 표현하였다. 한편 좌

굴은 연속체 보다는 보나 셸 같은 구조요소에서 더 중요한 고려 사항이다. 그럼에도 불구하고 본 연구는 연속체를 대상으로 하였는데, 그 이유는 연속체 모델이 뚝뚝한 형상뿐 아니라 보나 셸 같은 슬림(slim) 한 구조요소 모델도 모두 커버할 수 있기 때문이다. 또한 CAD 소프트웨어로부터 수입되는 모델의 경우 보나 구조 요소로 변환 시키지 않고 최적화를 수행함으로써 시간과 비용 면에서 더 효율적일 수 있다. 구조요소에서 다루는 치수, 형상설계는 연속체에서는 모두 형상설계가 되는데, 이는 본문의 예제들을 보면 잘 알 수 있다. 본 연구에서는 고유치 문제로 표현되는 선형 좌굴 해석을 대상으로 하였고, 실제 해석은 상용 해석 소프트웨어인 ANSYS(2003)를 사용하였다. 민감도 계산은 ANSYS에서 얻은 해석결과를 가지고 외부에서 범용 수치 연산 소프트웨어인 MATLAB(2002)을 이용하여 계산하였다. 검증용 예제로 압축하중 하의 곡선보, 박판단면이나 병과 같은 모양의 3차원 기둥문제 등을 대상으로 설계민감도 해석을 수행하였고, 최적화 프로그램인 Visual-DOC (1999)를 이용하여 허용임계좌굴하중 이하에서의 체적을 최소화 하거나, 동일한 체적 하에서 임계좌굴하중을 최대화 하는 문제를 대상으로 하였다. 그 결과 DSA 방법의 효율성, 정확성을 입증하였다.

2. 형상 설계민감도 정식화

형상 설계민감도 이론 과정은 먼저 주어진 문제를 파악하고, 목적함수(object function) 또는 제약조건(constraint condition)을 나타내는 성능함수 및 형상을 나타내는 설계변수를 정의하게 된다. 형상변분은 전미분(material derivative)의 개념을 이용하여 효과적으로 설명된다(Haug, 1985). 이와 관련한 이론 및 민감도 공식의 유도는 이미 선행 연구(Choi, 2006)에서 다룬 바 있으며, 따라서 본 논문에서는 중요한 결과 식만을 수록하였다

2.1 안정성 해석

임의의 연속체에서 정의된 변위 u_i 에 대해 정적 평형을 위한 지배식은 다음과 같이 주어진다.

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0, \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

가상일의 원리를 적용하면 이 문제는 다음과 같은 가중잔여식(weighted residual statement)으로 변환할 수 있다.

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}(u) \epsilon_{ij}(\bar{u}) dx$$

$$= \int_{\Omega} f_i \bar{u}_i dx + \int_{\Gamma} T_i \bar{u}_i ds, \quad \forall \bar{u}_i \in Z \quad (2)$$

여기서 \bar{u} 는 가중변위(weighted displacement)를 의미하며, Z 는 변위경계조건을 만족하는 변수공간을 나타낸다. 통상의 유한요소해석은 이 식을 기반으로 하고 있으며, 이로부터 변위 u 를 구하고 나면 응력분포 $\sigma(u)$ 는 후처리 과정으로 구해진다. 좌굴문제는 앞서 구해진 결과를 초기응력으로 하여 다음과 같은 방정식과 경계조건을 만족하는 특이값 k 를 구하는 문제가 되는데, 이를 임계치 라고도 부르며, 여기에 하중을 곱하면 임계하중이 된다(Washizu, 1974).

$$\sigma_{ij,j}(w) + k(\sigma_{jk}(u) w_{i,j}),_k = 0 \text{ in } \Omega \quad (3)$$

이 역시 가상일의 원리를 적용하면 다음과 같이 w 에 관한 또 다른 가중잔여식을 얻게 된다.

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}(w) \varepsilon_{ij}(\bar{w}) dx = -k \int_{\Omega} \sigma_{ij}(u) w_{k,j} \bar{w}_{k,j} dx, \quad \forall \bar{w}_i \in Z \quad (4)$$

2.2 안정성 문제의 형상 설계 민감도해석

형상설계민감도해석은 형상 변화에 따른 k 의 변화를 유도, 계산하는 것이다. 형상변화는 유체역학 관점에서 속도장으로 상사할 수 있다는 이론에 의하면 형상변화에 따른 응답의 변화는 전미분으로 정의할 수 있다(Zolesio, 1981). 민감도 공식의 유도는 식 (4)의 전미분에서 출발하는데 자세한 해석적 유도 과정은 선행연구(최주호, 2006)를 참조하기 바라며 최종적으로 다음과 같은 공식을 얻게 된다.

$$\begin{aligned} & \dot{k} \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^{\circ} dx \\ &= \int_{\Gamma} [S_{ij} E_{ij} V_n + 2w_{i,s} (T_i V_s - Q_i V_n)] ds \\ &+ k \int_{\Gamma} \varepsilon_{ij}^{\circ} (2t_i V_j - \sigma_{ij} V_n) ds \\ &+ k \int_{\Gamma} \left[\begin{aligned} & (\varepsilon_{ij} \tilde{\sigma}_{ij}^* - u_{i,s} \tilde{q}_i^* - q_i u_{i,s}^* + f_i u_i^*) V_n \\ & + (u_{i,s} \tilde{t}_i^* + t_i u_{i,s}^*) V_s + t_i u_i^* DV_s \end{aligned} \right] ds \quad (5) \end{aligned}$$

여기서 u^* 는 초기변위 u 의 보조변수를 의미하며, 이는 다음과 같은 가중잔여식의 해로 정의된다.

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}(u^*) \varepsilon_{ij}(\bar{u}^*) dx = \int_{\Omega} \varepsilon_{ij}^{\circ} \sigma_{ij}(\bar{u}^*) dx$$

$$= \int_{\Omega} \sigma_{ij}^{\circ} \varepsilon_{ij}(\bar{u}^*) dx, \quad \forall \bar{u}^* \in Z \quad (6)$$

이것은 기본변위 u 에 관해 해석했던 정적 문제에서 단지 경계조건이 균질적(homogeneous)인 것으로 바뀌고 초기변형률 ε_{ij}° 가 주어진 문제를 해석하는 것이 된다. 식 (6)에서 위첨자 (*)로 표시된 변수는 예를 들어 $\tilde{\sigma}_{ij}$ 경우 다음과 같이 표현된다.

$$\tilde{\sigma}_{ij}^* = \sigma_{ij}^* - \sigma_{ij}^{\circ} \quad (7)$$

또한 식 (6)에서는 표기의 단순화를 위해 소문자는 초기 정적문제의 해를, 소문자에 위첨자 *가 표기된 것은 보조변수의 해를, 그리고 대문자는 좌굴문제의 해로 정의하여 구별하였다. 표현식 중에서 s 는 경계에서 접선방향 미분을 뜻하며, T_i, Q_i 는 각각 경계에서의 단위면적당 법선력, 접선력으로서 다음과 같이 정의된다.

$$T_i = S_{ij} n_j, \quad Q_i = S_{ij} s_j \quad (8)$$

식 (5)에서 V 는 설계속도장으로서 형상의 변화율을 뜻하는데, 설계 파라미터의 미소변화에 따라 경계형상이 얼마나 변화하는 지를 나타내는 벡터이다. V_n, V_s 는 경계에서 법선 및 접선 방향 성분을 의미하며,

$$DV_s = V_{k,s} S_k = V_n H + V_{s,s} \quad (9)$$

이다. 한편 3차원 문제의 경우 식 (5)는 경계적분이 라인이 아니라 표면이 되는데, 이때는 경계 표면에서 접선방향이 서로 수직한 두 방향으로 정의되며, 이들을 각각 α, β 라 하면, 접선방향 설계속도 벡터는 V_{α} 및 V_{β} 된다. 이에 대한 자세한 표현식은 지면의 한계로 인해 생략하였다.

민감도 공식 (5)를 이용하여 민감도를 계산하기 위해서는 식 (2)로 정의된 초기 정적문제의 해를 구하고, 이 해를 토대로 각각 식 (4)와 식 (6)으로 정의된 좌굴변수 및 보조변수의 해를 구한다. 이 세가지 해와 함께 설계속도장을 구하여 공식에 대입하고 적분하면 민감도를 얻을 수 있다. 앞서 언급한 바와 같이 보조변수의 해를 구할 때에는 처음부터 새로운 문제를 푸는 것이 아니고 기존의 문제에서 경계조건만 바꾸어 해를 구하는 것이므로 초기 정적문제의 해를 구하기 위한 시간 보다 적게 소요되며 이는 약 50~70%의 수준이다.

설계속도장 V 의 계산은 선행연구(최주호, 2006)에서 언급한 바와 같이 설계속도의 계산만을 위한 유한차분법을 이용한다. 설계속도벡터는 임의의 한 설계변수 b_i 의 변화에 따른 경계 상의 점 x 의 변화를 의미하므로 설계속도 벡터는

경계를 표현하는 형상 함수를 알고 있다면 그들을 해석적으로 미분하여 얻을 수 있지만, 계산의 편의를 위해 형상의 변분 계산만을 위한 유한차분을 다음과 같이 행하면 쉽게 구할 수 있다.

$$V'(x) = \frac{\partial x}{\partial b_i} \approx \frac{1}{\Delta b_i} \{x(b + \Delta b_i e_i) - x(b)\} \quad (10)$$

이 경우 초기 형상모델을 생성하고 이로부터 만든 경계의 유한요소만을 가지고 계산하는 것이기 때문에 계산시간의 증가는 거의 없다.

3. 설계 민감도를 이용한 형상최적설계

앞서 유도된 민감도 공식을 바탕으로 설계 민감도를 계산하기 위한 절차는 Fig. 1에 다시 한 번 요약하였다. 설계민감도 값을 유한차분법과 비교 해보면 거의 정확하였고, 약간의 오차가 있는 것은 요소수의 증가를 통하여 세장비를 줄임으로써 해결 되었다(최주호, 2006).

3.1 체적 최소화

설계 민감도 해석을 이용하여 2차원 곡선보, 3차원 기둥 그리고 병모양 기둥에 대한 형상 최적화를 실시하였다. 최적화 프로그램은 Visual-DOC를 이용하였고, 이 세 가지 예제에 대하여 허용된 좌굴하중보다 큰 값을 갖고 체적을 최소화하는 문제로 정의하여 고려하였다.

Minimize volume

subject to $k_{\text{allowed}} \leq k \quad (11)$

k_{allowed} 는 허용좌굴하중으로 이보다 큰 값을 갖는 것을 제한조건으로 하였다.

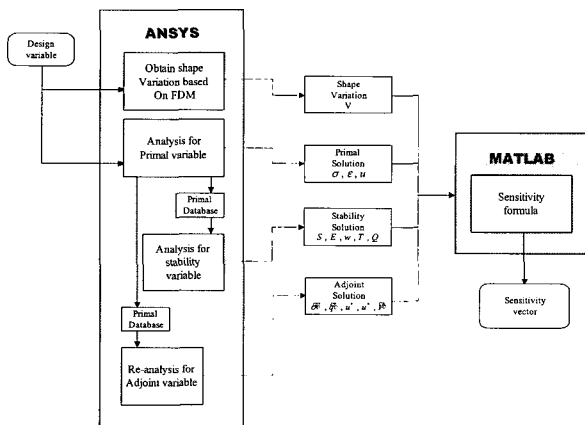


Fig. 1 Overall procedure to calculate sensitivity

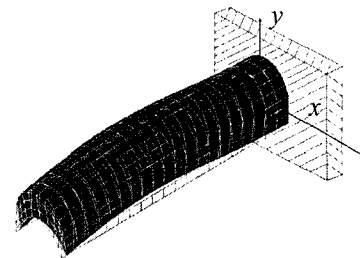


Fig. 2 Buckled shape of straight beam with curved section

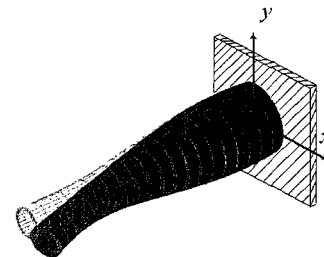
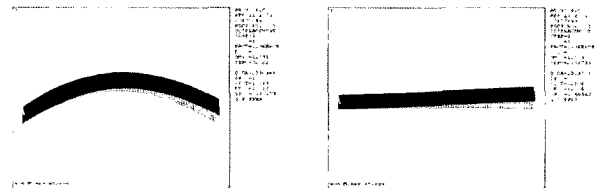


Fig. 3 Buckled shape of a bottle shaped column under compression



(a) Initial design (b) Optimum design

Fig. 4 Buckled shape of curved beam

3.1.1 곡선보의 형상최적화

초기 설계변수 값은 높이 0.5, 두께 0.1로 각각 지정하였고, 각 변수에 대한 하한값은 0.1과 0.01로 정하였다. 초기 좌굴하중은 2.7E8이고 k_{allowed} 값, 즉 허용좌굴하중값은 2.7E8로 초기 좌굴 하중 값과 같은 값으로 정하였다. 초기 모델에 대한 좌굴 형상과 최적화 형상은 Fig. 4(a),(b)에 각각 나타내었고, DSA와 FDM 방법 모두 높이를 최소화하여 직선보와 같은 형상을 보였다. FDM과 DSA의 최적값 비교는 Table 1에 나타내었고, 같은 값으로 수렴되는 것을 알 수 있다.

Table 1 Optimum value of curved beam

	INITIAL	DSA	FDM
b1	0.5	0.11672192	0.1
b2	0.1	0.08333444	0.081209
volume	0.4	0.316353	0.324836
crit	2.70E+08	2.71E+08	0.7E+08

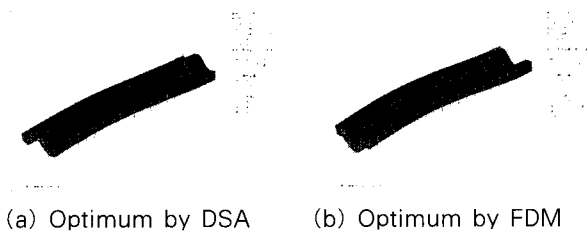


Fig. 5 Buckled shape of curved section at optimum design



Fig. 6 Cross sectional shape of curved section

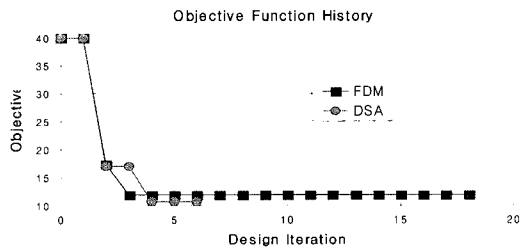


Fig. 7 History of curved section

Table 2 Optimum value of curved section

	INITIAL	DSA	FDM
b1	0.8	7.18E-02	4.13E-02
b2	1.0	6.97E-01	5.63E-01
b3	1.0	4.90E-01	-5.61E-01
b4	0.8	-1.69E-02	4.76E-02
b5	0.5	2.69E-01	2.96E-01
volume	4.00E+01	1.08E+01	1.18E+01
crit	3.00E+09	3.22E+09	4.04E+09

3.1.2 3차원기둥의 형상최적화

3차원기둥의 경우 초기 설계변수 값은 스플라인의 중간 4점 각각 0.8, 0.9797, 0.9797, 0.8이고 두께는 0.5로 지정되었다. $k_{allowed}$ 은 3.0E9으로 주어졌다. 스플라인 설계변수의 상한과 하한은 주어지지 않았고, 두께의 경우 하한값을 0.1로 정하였다. 초기모델에 대한 좌굴형상은 Fig. 2에 나타나 있다. DSA와 FDM 방법으로 구한 최적화 형상은 Fig. 5에 각각 나타내었고, Fig. 6에 초기 단면형상과 함께 DSA, FDM 방법에 의한 최적 단면형상을 각각 나타내었다. 설계변수값은 Table 2에 있다. Fig. 7에는 목적함수의 이력 곡선을 나타냈는데, DSA의 경우 6회 iteration 에 계산시간은 69초인 반면 FDM의 경우 iteration도 훨씬 많고,

Table 3 Optimum value of a bottle shaped column

	INITIAL	DSA	FDM
b1	2.4	1.6828770	1.7239061
b2	1.7	1.7757963	1.6792110
b3	1	1.1962210	1.2046751
volume	21.991	20.189470	20.111341
crit	2.90E+09	2.90165E+09	2.89537E+09

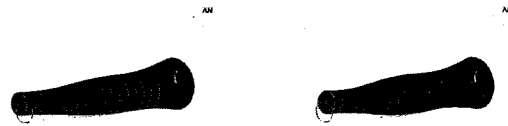


Fig. 8 Optimum design of a bottle shaped column



Fig. 9 A bottle of Coca-Cola

1320초 정도 소요되었다. 한편 최적 형상을 보면 건축분야에 많이 쓰이는 V빔(beam)의 경우와 흡사한 것을 알 수 있다. 안정성을 고려할 경우 빔의 중간 부분이 최적화 결과처럼 V형으로 굴곡짐으로써 상하에서 누르는 압력을 잘 견딜 수 있을 것이라 예상된다.

3.1.3 병모양 기둥의 형상최적화

병 모양의 경우 (x, z) 평면에서의 5점 B-스플라인에서 중간 세 점을 설계변수로 하고, 초기 값은 2.4, 1.7, 1.0, 으로 지정하였다. 두께는 0.1로 고정하였다. 이는 두께방향 요소수의 영향으로 민감도계산에 영향을 미치게 되므로 앞서 말한 것과 같이 요소수를 증가시킴으로써 해결 가능하지만 많은 계산 시간을 초래하게 되어 본 연구에서는 그냥 초기치로 고정하였다. 허용좌굴하중은 2.9E9로 정하였고 초기모델에 대한 좌굴형상은 Fig. 3에 나타나 있다. DSA와 FDM 방법으로 구한 최적화 형상은 Fig. 8에 각각 나타내었다. Table 3에서 볼 수 있듯이 곡선보와 마찬가지로 FDM의 경우 허용좌굴하중에 약간 못 미치는 값을 보였고 DSA의 경우 허용좌굴하중을 만족하면서 체적을 최소화 하는 값을 도출함으로써 정확성을 입증 하였다. Fig. 9는 상용되어지는 코카콜라 회사의 병을 나타낸다. 이는 본 연구의 병모양에서 좌굴을 고려한 최적화 형상 Fig. 8(a)과 유사한 경향이다. 이는 단순 비교 자체는 무리가 있지만, 가운데서 볼록한 형상

을 갖는다는 공통점이 존재 하고 있다.

3.2 좌굴하중 최대화

앞서 제시한 3차원 기둥에 대하여 같은 조건에서 동일한 체적을 가지면서 임계좌굴하중을 최대화 하는 문제로 정의하여 고려하였다.

Maximize Critical Buckling Load

subject to $V = V_{initial}$ (12)

$V_{initial}$ 은 초기체적으로 동일한 값을 갖는 것을 제한조건으로 하였다. 3차원 기둥 모델에 대하여 두께가 0.5와 0.4일 경우 각각에 대해 최적화를 수행 하였고, 이보다 더 얇은 경우도 고려하였다.

3.2.1 두께 0.5를 갖는 3차원 기둥의 형상 최적화

3차원기둥의 경우 초기 설계변수 값을 스플라인의 중간 4 점을 각각 0으로 두어 직선 기둥 형태를 초기모델로 정하고, 두께는 0.5로 지정되었다. 초기 체적을 제한 조건으로 하는 80이고, 스플라인 설계변수의 상한과 하한은 주어지지 않았고, 두께의 경우 하한 값을 0.1로 정하였다. 초기모델에 대한 좌굴형상은 Fig. 10(a)에 나타나 있다. DSA와 FDM 방법으로 구한 최적화 형상은 Fig. 10(b)와 (c)에 각각 나타내었고, Fig. 11을 보면 DSA와 FDM의 목적함수의 이력곡선을 나타냈는데 거의 동일하게 수렴하는 것을 볼 수 있다. 결과 값은 Table. 4에 나타나 있고, 같은 체적 80 하에서 임계좌굴하중이 초기하중 8.96E8에 비해 약 11배 정도 증가한 1.00E10으로 커진 것을 볼 수 있다. 형상은 체적 최소화 결과와 유사한 곡선 형태를 가진 것으로, 안정성을 고려할 경우 굴곡이 짐으로써 상하에서 누르는 압력에 대한 저항이 커짐을 알 수 있다.

3.2.2 두께 0.4를 갖는 3차원 기둥의 형상 최적화

이전과 동일한 조건 하에서 두께만을 0.4로 정하였고, 제한 조건은 초기 체적과 같은 값인 64로 정하였다. 초기모델에 대한 좌굴형상은 Fig. 12(a)에 나타나 있다. DSA와 FDM방법으로 구한 최적화 형상은 Fig. 12(b),(c)에 각각 나타내었고, Fig. 13를 보면 DSA와 FDM의 목적함수의 이력곡선을 나타냈는데 동일하게 수렴하는 것을 볼 수 있다. 최적화 결과 값은 Table. 5에 나타나 있고, 수렴속도 비교를 위해 DSA로 구한 최적해와 FDM으로 구한 최적해로의 수

Table 4 Optimum value of curved section in case of $t = 0.5$

	INITIAL	DSA	FDM
b1	0.0	0.0000	-0.2000
b2	0.0	2.6400	2.6426
b3	0.0	2.6400	2.6400
b4	0.0	-0.2000	-0.2000
volume	80	80.0000	80.0000
crit	8.96E+08	1.00E+10	1.00E+10

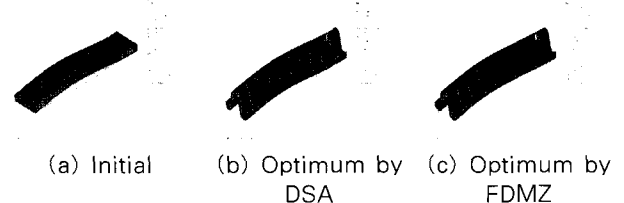


Fig. 10 Buckled shape of curved section in case of $t = 0.5$ at optimum design

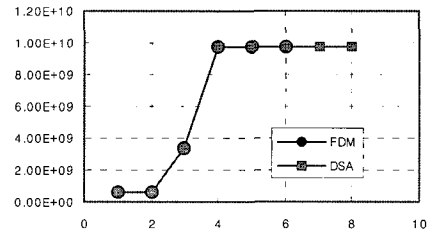


Fig. 11 History of curved section in case of $t = 0.5$

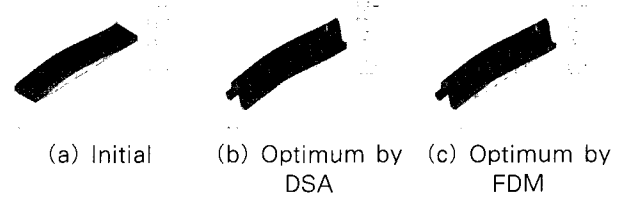


Fig. 12 Buckled shape of curved section in case of $t = 0.4$ at optimum design

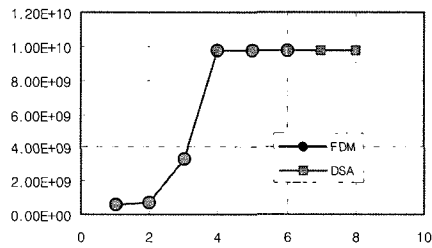


Fig. 13 History of curved section in case of $t = 0.4$

렴결과를 Table. 6에 나타내었다. 둘다 동일한 해로 수렴하였으나 DSA가 FDM에 비해 약 4배 정도 빠르게 수렴하였다. 이는 설계변수가 증가하고 해석 시간이 길어질수록 더욱 차이가 날 것으로 예상 된다.

Table 5 Optimum value of curved section in case of $t = 0.4$

	INITIAL	DSA	FDM
b1	0.0	-0.2000	-0.2000
b2	0.0	2.6400	2.6426
b3	0.0	2.6400	2.6400
b4	0.0	-0.2000	-0.2000
volume	64	64.0000	64.0000
crit	5.78E+08	9.78E+09	9.79E+09

Table 6 Comparison of convergence rate

	DSA	FDM
Computing time	516.72	1922.3
Iteration of best design	3	4
Total analysis calls	8	25

3.2.3 두께가 얇은 3차원 기둥의 형상 최적화

이전과 동일한 조건에서 두께를 0.3, 0.2, 0.1로 각각 줄여보았다. 제한조건은 역시 각각의 초기 체적과 동일한 것으로 정했고, 이때의 좌굴형상은 Fig. 15와 같다. 이때는 Fig. 14에서 보는 것처럼 급격하게 줄어드는 두께 때문에 중복 고유진동수(Repeated eigenvalue) 문제에 봉착하게 되었는데, Table. 7을 보면 각 케이스 별로 DSA와 FDM에 의한 최적화 값에서 1차 모드와 2차 모드의 고유치가 서로 접근하면서 발생하였다. 본 민감도 계산은 1차 모드에 대해서만 계산되기 때문에 이런 케이스에 대해서는 2차 모드에 대한 계산과 다른 제한 조건이 필요할 것으로 예상된다.

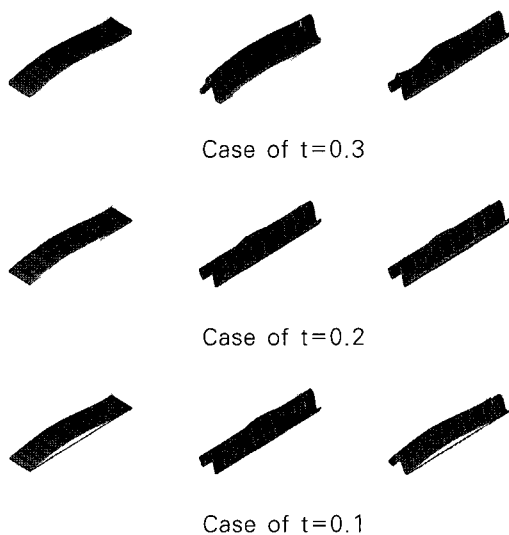


Fig. 14 Buckled shape of curved section in thin case at optimum

Table 7 Mode of critical buckling loads of curved section in thin case at optimum

Thickness		Mode1	Mode2
0.3	Initial	3.28E+08	9.78E+08
	DSA	9.05E+09	9.28E+09
	FDM	8.47E+09	8.49E+09
0.2	Initial	1.47E+08	4.44E+08
	DSA	6.69E+09	6.82E+09
	FDM	6.75E+09	6.74E+09
0.1	Initial	3.70E+07	1.14E+08
	DSA	4.05E+09	4.60E+09
	FDM	5.14E+09	5.21E+09

4. 결 론

본 연구에서는 탄성체의 임계좌굴하중에 대한 형상설계민감도 해석을 위한 방법을 제시하였다. 좌굴문제를 해석하기 위해 초기 정적 평형문제, 이의 보조변수 문제 및 좌굴문제의 해를 구하였고 이들을 민감도 공식에 넣어서 적분하여 민감도를 계산하였다. 한편 각 설계변수 별로 설계속도벡터를 알고 있어야 하는데 이들은 형상변화에 대해서만 유한차분을 적용하여 간편하게 구할 수 있었다. 다양한 2차원 및 3차원 예제에 대해 민감도를 계산하고 정확도를 검증함으로써 본 방법의 장점과 효용성을 입증하였다. 최적화는 체적을 최소화 하는 것과 임계좌굴하중을 최대화 하는 것을 각각 수행하였고, 그 값들이 유한차분법에 의한 결과와 매우 잘 일치하였다. 임계좌굴하중을 최대화 하는 경우 모델의 두께가 얇은 3차원 모델의 경우 중복 고유치 문제가 발생하면서 2차 좌굴모드를 계산해줘야 하며, 이는 본 논문에서는 고려되지 않았다. 민감도 해석결과를 보면 대체적으로 형상에 대한 민감도 보다는 두께에 대한 민감도가 요소 수에 더욱 민감하게 반응한다는 것을 알 수 있었다. 즉, 두께에 대한 설계변수를 지정할 경우 요소 개수를 증가 시킬수록 우수한 결과를 얻을 수 있음을 알 수 있다. 하지만 이런 경우 해석 시간이 증가하게 되어 효율적인 측면에서는 좋지 않다. 이를 해결하기 위해서는 연속요소 보다는 보나 쉘 같은 구조요소로 모델링 되는 문제로 해결 가능하지만, 해석모델이 CAD 소프트웨어에서 수입되는 경우 대부분의 경우 이는 3-D 솔리드이며, 이를 구조요소로 변화하기 위해서는 또 다른 노력과 시간이 투입되어야 한다. 본 방법을 사용하게 되면 이러한 노력이 필요 없이 탄성체 모델 즉 솔리드 요소가 구조요소 모델도 포함하여 모델링 할 수 있기 때문에 일반적으로 활용이 가능하기 때문이다. 이것은 실용적 면에서도 더 의미가 있다. 물론 이런 경우 3-D 솔리드 모델을 사용하기 때문에 해석을 위한 계산시간 증가라는 어쩔 수 없는 대가는 지불해야 할 것이

다. DSA와 FDM 두 방법의 최적화 수렴속도를 비교한 결과 해석시간이 긴 3차원 문제일수록 그리고 설계변수 갯수가 많을수록 DSA가 훨씬 빠른 수렴성을 나타내었다.

후 기

본 연구는 한국항공대학교 교내 연구비 지원(과제번호 2005-01-007)에 의해 수행되었으며, 이에 감사하는 바입니다.

참고문헌

- 최주호(2006) 탄성 구조물의 안정성을 고려한 형상설계 민감도 해석, 대한기계학회, 30(1), pp.76~83.
- ANSYS(2003) Command Reference Release 8.0, Swanson Analysis System Inc., Houston, PA.
- Choi, J. H., Kwak, B. M.(1988) Boundary integral equation method for shape optimization of elastic structures, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 26, pp.1579~1595.
- Choi, J. H., Won, J. H.(2005) Boundary Method in FEM-Based Shape Design Sensitivity Analysis of Elastostatics Problems, *submitted to Finite Elements in Analysis and Design*.
- Choi, K.K. Kim, N.H.(2005) Structural Sensitivity Analysis and Optimization, *Springer Science + Business Media Inc*, USA.
- de Boer, H., van Keulen, F.(2000) Refined semi-analytical design sensitivities, *International Journal of Solids and Structures*, 37(46/47), pp.6961~6980.
- Gu, Y.X., Zhao, G.Z., Zhang, H.W., Kang, Z. Grandhi, R.V.(2000) Buckling design optimization of complex built-up structures with shape and size variables, *Structural Multidisciplinary Optimization*, 19(3), pp.183~191.
- Haftka, R.T. Gurdal, Z(1992) Elements of Structural Optimization, *Kluwer Academic Publishers: 3rd revised and expanded edition*, USA.
- Haug, E. J., Choi, K. K., Komkov, V.(1985) Design Sensitivity Analysis of Structural Systems, *Academic press*, New York.
- Özakça, M., Taysi, N., Kolcu, F.(2003) Buckling analysis and shape optimization of elastic variable thickness circular and annular plates-II. *Shape optimization, Engineering Structures*, 25(2), pp.193~199.
- The MathWorks Inc,(2002) MATLAB Release 6.5 User Guides, MA, USA
- Visual DOC Theoretical Manual,(1999) Vanderplaats Research & Development Inc.
- Washizu, K.(1974) Variational methods in elasticity and plasticity, (International series of monographs in aeronautics and astronautics. Division I: solid and structural mechanics, v. 9), *Pergamon Press: 2nd edition*, UK.
- Zolesio, J.P.(1981) The material derivative (or speed) method for shape optimization, *in Optimization of distributed parameters structures*, Haug, E.J. and Cea, J., Sijthoff-Noordhoff, Alphen aan den Rijn, pp.1152~1194.