

# 적응적 쉘유한요소를 이용한 박스형 구조물의 좌굴해석

## Buckling Analysis of Box-typed Structures using Adaptive Shell Finite Elements

송 명 관\*      김 선 훈†

Song, Myung-Kwan      Kim, Sun-Hoon

(논문접수일 : 2007년 2월 27일 ; 심사종료일 : 2007년 5월 8일)

### 요 지

본 논문에서는 적응적 h-유한요소 세분화에 의한 박스형 절판 구조물의 선형좌굴 유한요소해석법을 제안한다. 면내회전 자유도를 갖는 변절점 평판쉘유한요소를 사용하여 유한요소의 거동을 개선하고 6자유도를 갖는 다른 유한요소와의 자유도의 연결을 용이하게 한다. 이와 같이 개발된 평판쉘유한요소에 의하여 박스형 절판구조물의 정확한 구조해석이 가능한데, 변절점유한요소를 정식화함으로써 적응적 h-유한요소 세분화시에 발생하는 다른 패턴의 사각형 유한요소 세분화망의 연결을 용이하게 해결한다. 오차평가에 대한 개선된 응력장을 얻기 위하여 상위수렴 조각회복법을 적용한다. 이와 같이 상위수렴 조각회복법에 의한 개선된 응력장에 의하여 구성된 유한요소 세분화망을 이용하여 좌굴하중과 좌굴모드를 자동적으로 구할 수 있도록 한다.

**핵심용어** : 적응적 유한요소, 좌굴모드, 박스형 구조물, 좌굴하중, 상위수렴조각회복법

### Abstract

The finite element linear buckling analysis of folded plate structures using adaptive h-refinement methods is presented in this paper. The variable-node flat shell element used in this study possesses the drilling D.O.F. which, in addition to improvement of the element behavior, permits an easy connection to other elements with six degrees of freedom per node. The Box-typed structures can be analyzed using these developed flat shell elements. By introducing the variable-node elements some difficulties associated with connecting the different layer patterns, which are common in the adaptive h-refinement on quadrilateral mesh, can be overcome. To obtain better stress field for the error estimation, the super-convergent patch recovery is used. The convergent buckling modes and the critical loads associated with these modes can be obtained.

**Keywords** : adaptive finite element method, buckling mode, box-typed structure, critical load, super-convergent patch recovery.

### 1. 서 론

판(plate)의 결합으로 이루어진 절판구조물 등과 같은 박스구조물의 역학적인 거동에 대한 수치해석에 있어서 주로 유한요소해석에 의존하고 있으며, 주로 쉘유한요소 또는 입체유한요소에 의한 유한요소모델을 사용하게 된다. 그러나, 일반적으로 회전자유도를 고려하지 않아 5개의 자유도(D.O.F.)를 갖는 쉘유한요소를 사용하여 해석할 경우에는 판이 접하는 부분에서 연직방향 회전(drilling D.O.F.)의

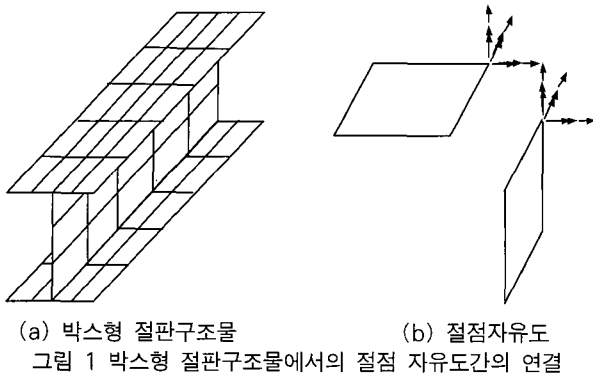
강성과 그 영향을 정확하게 판단하지 못함으로 인하여 해석 결과가 정확하지 않거나, 정확한 해석을 위해서는 요소 세분화 및 특수한 방법을 요구하게 되고, 입체유한요소를 사용하여 해석할 경우에는 상당한 수의 요소수로 세분화해야 하는 과정을 거쳐야 하므로 효율성을 잃게 된다. 따라서, 이러한 단점들을 극복하고 정확한 유한요소해석 결과를 얻기 위해서는 판의 연직방향 회전에 대한 적절한 강성 평가와 그 영향들이 고려된 새로운 쉘요소를 사용하여야 한다. 뿐만 아니라, 유한요소해석에 의한 실제적인 구조 해석시에 나타나는

\* 책임저자, 정회원 · 영동대학교 토목환경공학과 부교수, 공학박사  
Tel: 043-740-1171 ; Fax: 043-740-1179

E-mail: kimsh@youngdong.ac.kr

† 정회원 · (주)유신코퍼레이션 구조본부 기술개발실 차장, 공학박사

· 이 논문에 대한 토론을 2007년 8월 31일까지 본 학회에 보내주시면 2007년 10월호에 그 결과를 게재하겠습니다.



셸요소와 다른 회전 자유도를 갖는 요소들 간의 연결 문제를 해결하기 위해서는 연직방향 자유도가 있는 셸요소의 개발과 사용을 필요로 하게 된다(그림 1). 이러한 연구는 최근 유한요소해석 분야에서 활발히 연구되고 있으며, 많은 방법들이 제시되고 있다. 기존의 5개의 자유도를 갖는 셸요소의 한계성을 극복하기 위해서 회전자유도를 갖는 평면응력요소(CLM)와 Mindlin 평판휨요소를 결합하여 개발된 CLS요소(Choi 등, 1996)는 이미 많은 시험예제해석을 통하여 선형탄성영역에서는 정확한 해석결과를 주는 것으로 검증되었다. 특히, 절판 구조물의 선형좌굴해석 시에는 6개의 자유도를 갖는 쉘유한요소를 사용함으로써 위에서 언급한 다른 형태의 요소들이 갖고 있는 문제점들을 극복하면서 정확한 선형좌굴해석이 가능하다.

본 논문에서는 박스형구조물의 좌굴해석을 위하여 회전자유도를 가지는 쉘 유한요소(CLS요소)를 사용하였다. CLS 요소는 회전자유도를 가지는 막요소와 대체전단변형률장을 사용하는 Mindlin 평판휨요소를 조합하여 얻어졌으며, 이미 많은 선형탄성 수치해석에서 효율성이 입증된 바 있다(Choi 등, 1996). 박스형구조물의 좌굴해석의 정확성과 효율성을 높이기 위하여 적응적  $h$ -유한요소 자동 세분화 방법을 적용하였다.

## 2. 선형좌굴해석 정식화 과정

### 2.1 변절점 평면 셸요소

본 연구에서 박스형구조물의 모델링에 사용한 CLS요소는 회전자유도를 가지는 평면요소(Allman, 1988)와 Mindlin 평판휨요소를 조합하여 구성되었으며, 변절점 평면셸 요소의 구성에 필요한 절점번호체계와 요소의 국지좌표계는 그림 2에 나타낸 바와 같다. 이 요소에 대한 자세한 정식화과정은 참조문헌(Choi 등, 1996)에 자세히 소개되어 있다.

### 2.2 응력강성도행렬(stress stiffness matrix)

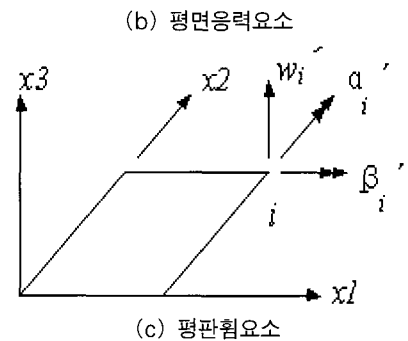
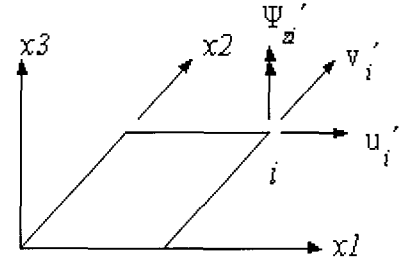
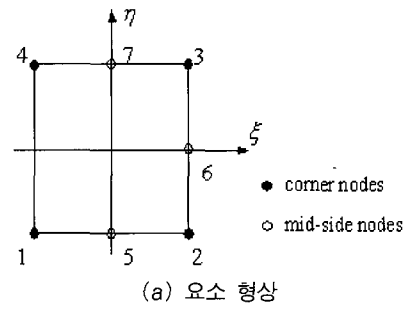


그림 2 변절점요소의 형상과 국지좌표계에서 절점자유도

Reissner-Mindlin 평판이론을 바탕으로하는 평판휨요소는 연직처짐 변위장과 회전변위장을 별도로 가정하며 변위장을  $C^0$ 연속성만 만족하면 되고 전단변형을 고려할 수 있다. 일반적인 감절점 Mindlin 평판휨 등매개변수요소의 형상은 그림3과 같고 변절점 평판휨요소의 변위장은 식 (1)과 같이 정의된다(김선훈 등, 2005).

$$u_p = \{w', \beta', \alpha'\}^T = \sum_{i=1}^n N_i u_{pi} \quad (1)$$

여기서,  $N_i$ 는 선형형상함수,  $u_{pi}$ 는 절점변위,  $w'$ 는 연직변위,  $n$ 은 절점수,  $\alpha'$ 는  $x_1 - x_3$  평면에서의 회전변위,  $\beta'$ 는  $x_2 - x_3$  평면에서의 회전변위이며, 평판휨요소는  $x_1 - x_2$  평면에서 정의된다.

정확한 전단변형을 행렬을 산정하기 위하여, 본 변절점 평판휨요소에는 대체전단변형률장이 사용된다. 사용된 대체전단변형률은 4절점 요소에 적용할 수 있도록 제시된 Donea의 전단변형률장을 변절점요소에게까지 확장하여 적용한 것이다(Donea 등, 1987).

Green-Lagrangian 변형률 중 평판휨요소에서 정의되는

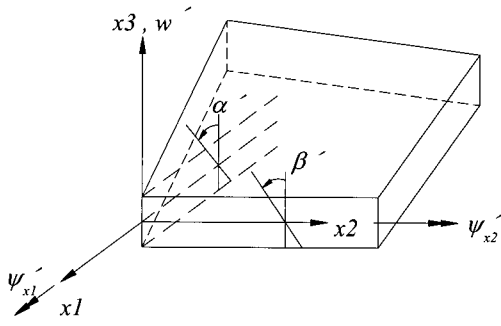


그림 3 Mindlin 평판요소

변형률은 식 (2)와 같이 선형부분과 비선형부분을 나누어진다.

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_m \\ \epsilon_p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \epsilon_m^L \\ \epsilon_p^L \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \epsilon_p^{NL} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2)$$

여기서,  $\epsilon_m^L$ 은 평면응력요소에서 정의되는 선형변형률,  $\epsilon_p^L$ 은 평판휨요소에서 정의되는 선형변형률,  $\epsilon_p^{NL}$ 은 평판휨요소에서 정의되는 비선형변형률이다.  $\epsilon_p^L$ 과  $\epsilon_p^{NL}$ 을 구체적으로 다시 표현하면 다음 식 (3)과 (4)와 같다.

$$\epsilon_p^L = \langle \alpha'_{,x1} \beta'_{,x2} \alpha'_{,x2} - \beta'_{,x1} w'_{,x1} + \alpha' w'_{,x2} - \beta' \rangle^T \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_p^{NL} &= \left\langle \frac{1}{2} (w'_{,x1})^2 \frac{1}{2} (w'_{,x2})^2 w'_{,x1} w'_{,x2} \right\rangle^T \\ &= \frac{1}{2} A_p R_p \end{aligned} \quad (4)$$

여기서,  $A_p = \begin{bmatrix} w'_{x1} & 0 \\ 0 & w'_{x2} \\ w'_{x2} & w'_{x1} \end{bmatrix}$ 이고,  $R_p = \begin{Bmatrix} w'_{x1} \\ w'_{x2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{i,x1} & 0 & 0 \\ N_{i,x2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\begin{Bmatrix} w' \\ \beta' \\ \alpha' \end{Bmatrix} = G_p u_p$ 이며,  $(\cdot)_{,x1}$ 와  $(\cdot)_{,x2}$ 은  $(\cdot)$ 의 x1축과 x2축에 대한 미분을 표시한다.

따라서, 위의 행렬들의 정의를 이용하여 식 (5)를 적용하여 응력강성도행렬  $[K_\sigma]$ 를 식 (6)과 같이 구성할 수 있다.

$$\begin{aligned} dA_p^T &= \begin{bmatrix} dw'_{x1} & 0 \\ 0 & dw'_{x2} \\ dw'_{x2} & dw'_{x1} \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \sigma_{x1} \\ \sigma_{x2} \\ \tau_{x1x2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{x1} & \tau_{x1x2} \\ \tau_{x1x2} & \sigma_{x2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dw'_{x1} \\ dw'_{x2} \end{Bmatrix} \\ &= S_m G_p du_p \end{aligned} \quad (5)$$

$$[K_\sigma] = \int_V G_p^T S_m G_p dV \quad (6)$$

여기서,  $\sigma_m$ 은 막응력(membrane stress)으로서  $\sigma_{x1}$ ,  $\sigma_{x2}$ ,

$\tau_{x1x2}$ 은 x1-x2 평면에서의 막응력 성분이고,  $d(\cdot)$ 은  $(\cdot)$ 의 미소치, V는 유한요소의 체적을 의미한다.

### 2.3 좌굴해석 정식화

식 (6)을 통하여 응력강성도행렬을 구성하여 좌굴유한요소해석에 적용한다. 따라서, 우선 구조물에 참조하중(reference load)  $[R]_{ref}$ 을 가하여 정적해석을 수행하고, 모든 평판요소에서 발생하는 막응력( $\sigma_m$ )을 계산한다. 이로부터 모든 요소들의 응력강성도행렬을 구성하여 조합(assembly)하면 전체구조물의 응력강성도행렬( $[K_\sigma]_{ref}$ )을 다음과 같이 구성할 수 있다(Bathe, 1996; Cook 등, 1989).

$$[K_\sigma]_{ref} du = \sum_{i=1}^{n+1} \int_{V_i} G_p^i S_m G_p^i dV du_i \quad (7)$$

따라서, 좌굴해석을 위한 평형방정식은 다음과 같이 구성된다.

$$([K] + \lambda_{cr} [K_\sigma]_{ref}) = \lambda_{cr} [R]_{ref} \quad (8)$$

여기서,  $[K]$ 는 전체구조물의 강성행렬,  $\lambda_{cr}$ 은 고유치(eigenvalue),  $\lambda_{cr} [R]_{ref}$ 은 좌굴하중을 의미한다.

식 (8)의 평형방정식의 증분형태는 다음과 같은 고유치문제 형태로 나타낼 수 있다.

$$([K] + \lambda_{cr} [K_\sigma]_{ref}) du = 0 \quad (9)$$

본 연구에서는 식 (9)의 수치해석을 위해 대형 유한요소해석시스템에서 소수의 고유치와 고유벡터의 계산에 적합한 부공간 반복법(subspace iteration method)을 사용하였다. 실제로 p개의 고유치와 고유벡터를 얻기 위해서 부공간 q의 크기는 다음의 조건을 만족해야 한다(Zienkiewicz 등, 1989).

$$q = \min(2p, p + 8) \quad (10)$$

### 3. 적응적 h-유한요소 세분화 방법

구조물 모델링의 효율성과 해석결과의 정확성을 높이기 위하여 본 연구에서는 적응적 h-유한요소세분화 방법이 사용되었다. 또한 응력오차를 줄이기 위하여 유한요소 세분화망은 상위수렴조각회복법(super-convergent patch recovery technique) (Zienkiewicz 등, 1989)를 적용하였다.

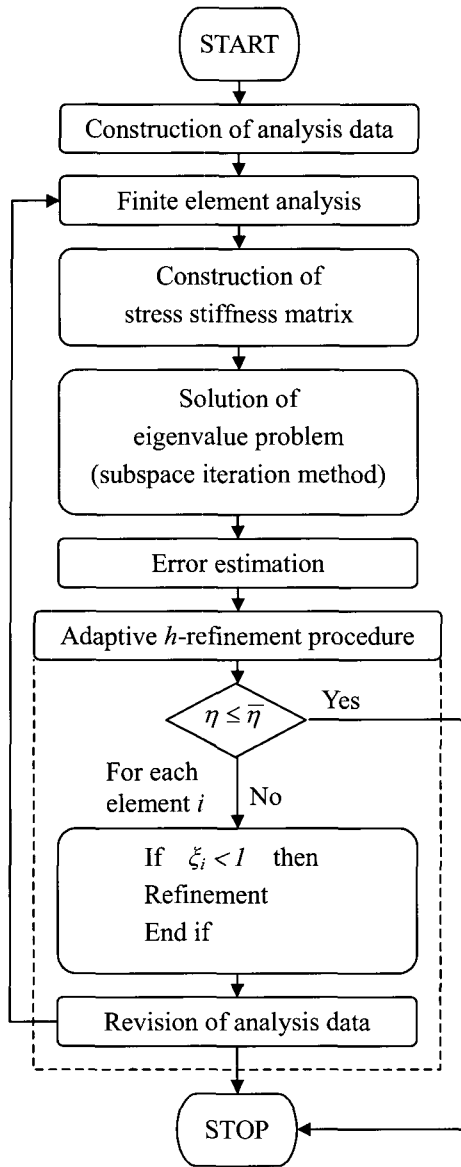


그림 4 적응적 유한요소세분화를 이용한 선형좌굴해석 과정

적응적 유한요소 세분화를 수행하기 위해서는 2가지의 평가기준, 즉, 해석정지기준(stopping criterion)과 세분화기준(refinement criterion)이 필요하다. 평가한 상대오차  $\eta$  (Zienkiewicz 등, 1989)가 규정한 최소오차  $\bar{\eta}$  이내가 되도록 해석을 수행한다(식 (11)).

$$\eta < \bar{\eta} \tag{11}$$

유한요소 세분화기준은 유한요소별로 오차지표  $\xi_i$  (error indicator)를 평가하여(Zienkiewicz 등, 1989)  $\xi_i > 1$ 인 경우에 대해서 해당하는 유한요소 세분화를 수행하게 된다.

본 연구에서 적용하는 상위수렴조각회복법을 적용한 적응적 쉘유한요소세분화를 이용한 선형좌굴해석의 해석 과정을

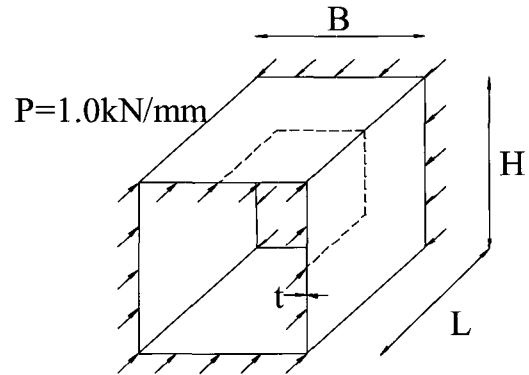


그림 5 정사각형 박스형 구조물

표 1 정사각형 박스형구조물의 좌굴하중 (kN/mm)

해석결과	요소 세분화	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4
Eriksson (1992)	4-node 4 × 8	2.064	3.038	11.036	11.768
	8-node 2 × 4	2.010	3.018	9.595	11.073
	9-node 2 × 4	2.002	2.896	9.429	10.146
Waszczyszyn 등 (1994)	3-node 16 × 32	2.119	2.976	9.000	-
	4-node 4 × 8	2.045	2.905	9.648	-
본 연구	4-node 4 × 8	2.120	3.045	11.125	11.776
	8 × 16	2.100	2.973	9.470	10.133

그림 4에 나타낸다.

#### 4. 수치해석 예제

##### 4.1 정사각형 박스형구조물

이 예제는 그림 5에서 보는 바와 같으며,  $L=480\text{mm}$ ,  $B=480\text{mm}$ ,  $t=10\text{mm}$ , 탄성계수  $E=210.133\text{kN/mm}^2$ , 포와송비  $\nu=0.316$  등이 사용되었다. 구조물의 대칭성을 이용하여 전체 구조물의 1/8을 모델링하였으며, 4절점 CLS요 소만을 사용하였다. 구조해석을 수행하여 얻어진 한계하중의 크기를 다른 문헌에 나온 결과들(Eriksson, 1992 : Waszczyszyn 등, 1994)과 비교분석해 보았다. 표 1에서 볼 수 있듯이 본 연구에서 수행하여 얻어진 해석결과는 다른 연구 결과들 잘 일치함을 알 수 있었다.

##### 4.2 일축 압축하중을 받는 stiffener가 있는 평판

절판구조물에 대한 첫번째 예제로서 stiffener가 있는 평판에 일축 압축하중을 가하여 선형좌굴해석을 하였다(그림 6). 평판의 물성치는  $E=2 \times 10^8 \text{kN/m}^2$ ,  $\nu=0.3$ ,  $a=b=$

표 2 일축 압축하중을 받는 stiffener가 있는 정사각형 평판의 좌굴하중 (kN/m)

해석결과	Mesh	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4
이론해 (Timoshenko 등, 1961)	-	2892 (2,2)	-	-	-
PQK1+BSB5 (Waszczyszyn 등, 1994)	16×16+16	3347 (2,2)	3594 (1,1)	3667 (3,2)	-
FQK1 (Waszczyszyn 등, 1994)	16×16+16	3258 (2,2)	3736 (3,2)	3997 (2,3)	-
본 연구	16×16+16	3103 (2,2)	3309 (1,1)	3669 (3,2)	3833(2,3)

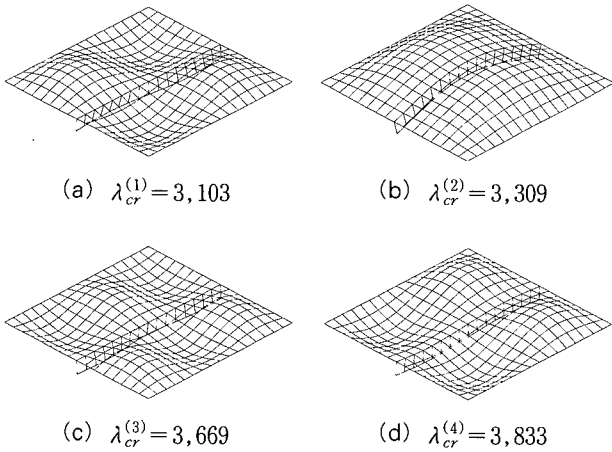


그림 6 일축 압축하중을 받는 stiffener가 있는 정사각형 평판의 좌굴모드

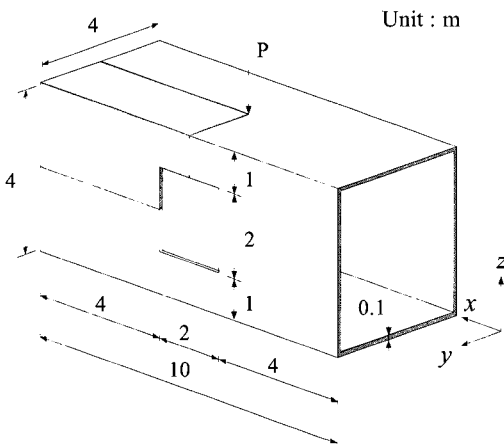


그림 7 개구부를 가지는 박스형구조물

1.0m,  $h=0.01m$ ,  $e=0.06m$ 이다. 선형좌굴해석 결과를 표 2에서와 같이 각 좌굴형상과 임계하중에 대해 이론해(Timoshenko 등, 1961) 및 다른 연구 결과와 비교가 가능하며, 다른 연구의 결과들과 잘 일치하고 있음을 알 수 있다(그림 6, 표 2).

### 4.3 개구부를 가지는 박스형구조물

다음은 본 연구에서 제안한 적응적 유한요소 세분화 방법을 이용하여 수행한 박스형구조물의 좌굴해석 예를 나타낸

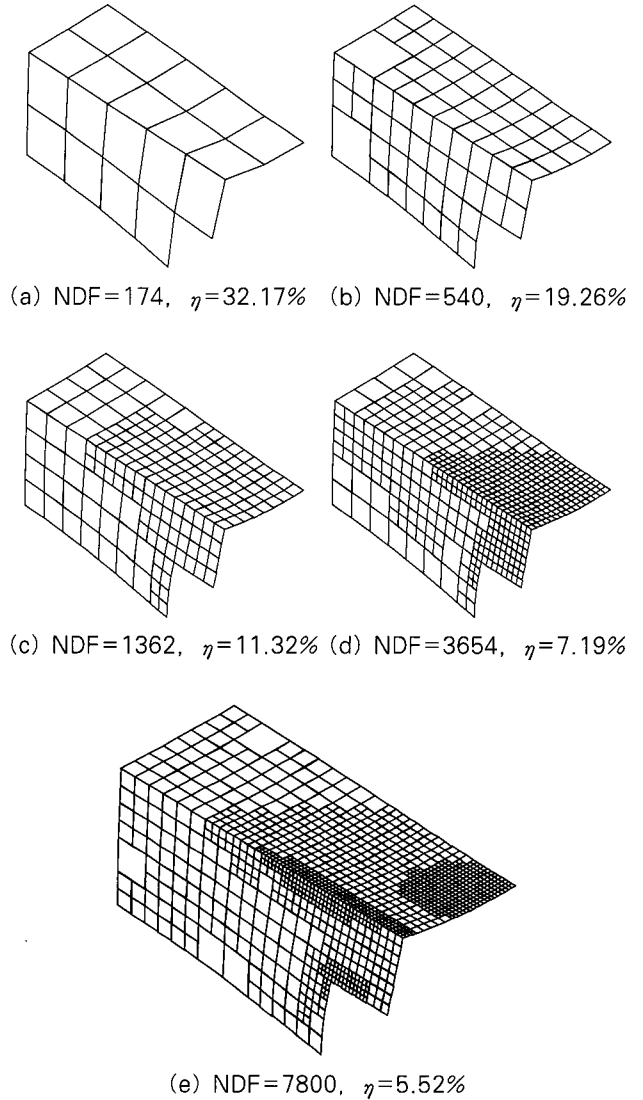


그림 8 개구부를 가지는 박스형구조물의 1차 좌굴모드

것이다. 양측 고정된 개구부를 가지는 박스형구조물로서 집중하중이 상하면의 중앙에 반대방향으로 작용하는 경우(그림 7) 대칭성을 고려하여 1/8만을 모델링하였으며, 해석에 적용한 재료의 물성치는 탄성계수  $E=2.1 \times 10^8 kN/m^2$ ,  $\nu=0.10$ 이다. 적응적 방법에 의한 유한요소세분화 형태와 좌굴모드를 그림 8과 9에 나타내었다(NDF는 자유도수). 그림 10에서는 상대오차의 감소의 추이와 적응적 세분화에 따른 좌굴하중이 정확한 값으로 수렴되어 가는 추이를 보여주고 있다.

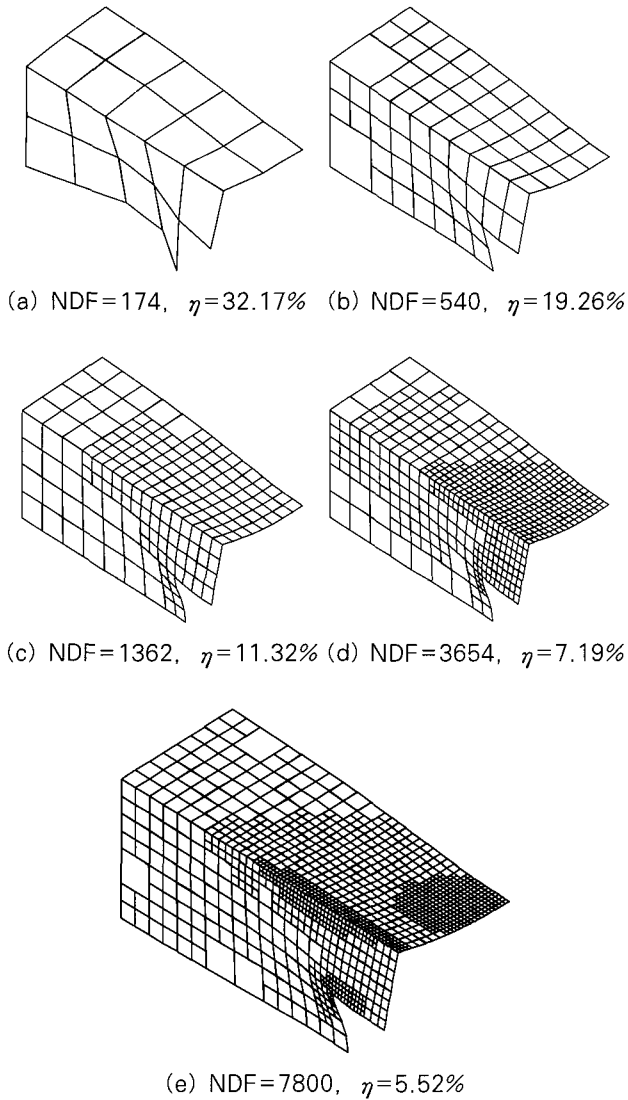
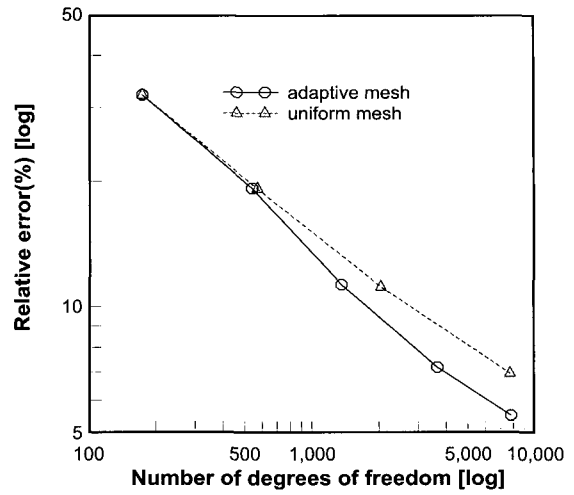


그림 9 개구부를 가지는 박스형구조물의 2차 좌굴모드

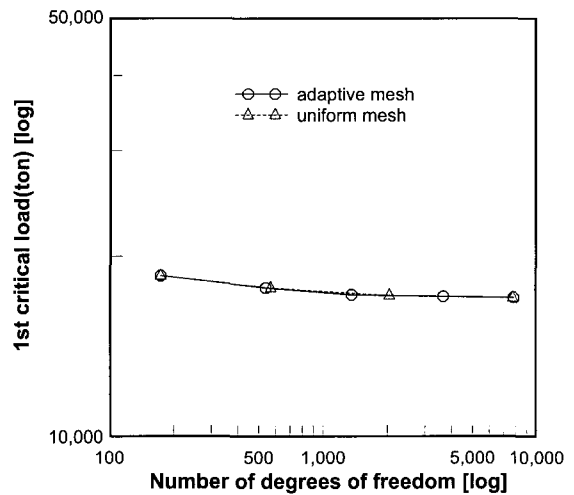
적응적 유효세분화에 의해 상대오차를 최적으로 수렴시키면서 정확한 좌굴해석이 가능함을 알 수 있다.

#### 4.4 팔각형 박스형구조물

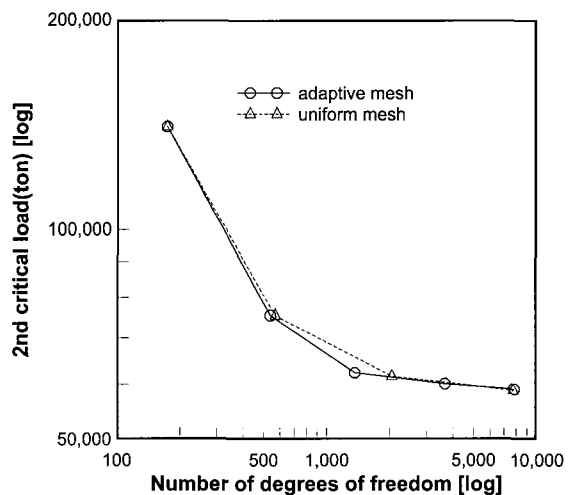
적응적 유효요소 세분화 방법을 이용한 좌굴해석의 두 번째 예제로서 팔각형 박스형 구조물의 좌굴해석을 수행하였다. 양측 고정된 팔각형 단면을 가지는 박스형구조물로서 집중하중이 상면과 하면의 중앙에 반대방향으로 작용하는 경우 (그림 11) 대칭성을 고려하여 1/8만을 모델링하였으며, 해석에 적용한 재료의 물성치는 탄성계수  $E=210,000\text{MPa}$ ,  $\nu=0.10$ 이다. 적응적 해석방법에 의한 요소망과 좌굴모드를 그림 12와 13에 나타내었다. 그림 14에서는 상대오차의 감



(a) 상대오차(  $\eta$  )



(b) 1차 좌굴하중



(c) 2차 좌굴하중

그림 10 개구부를 가지는 박스형구조물의 해석결과

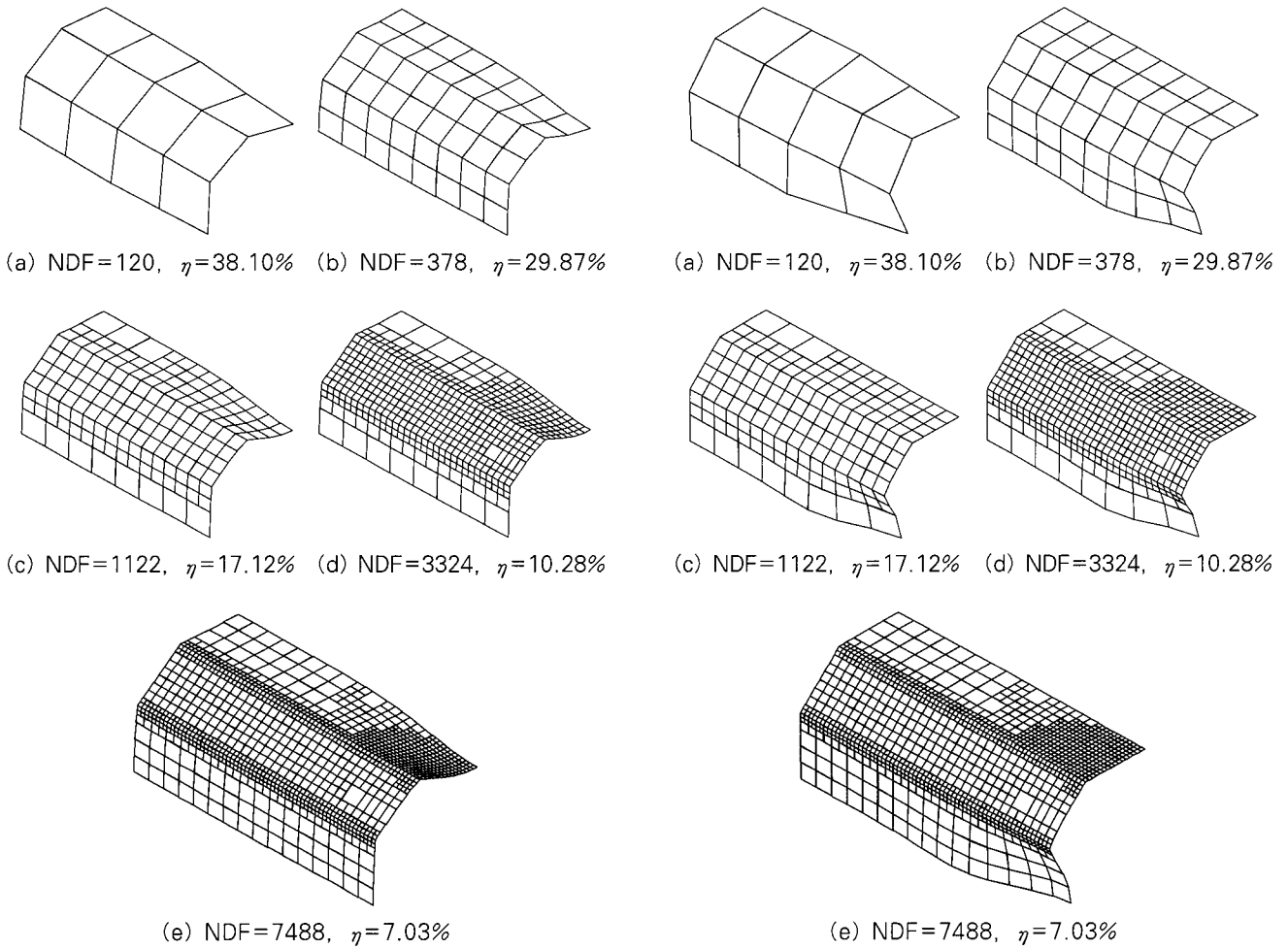


그림 12 팔각형 박스형구조물의 1차 좌굴모드

그림 13 팔각형 박스형구조물의 2차 좌굴모드

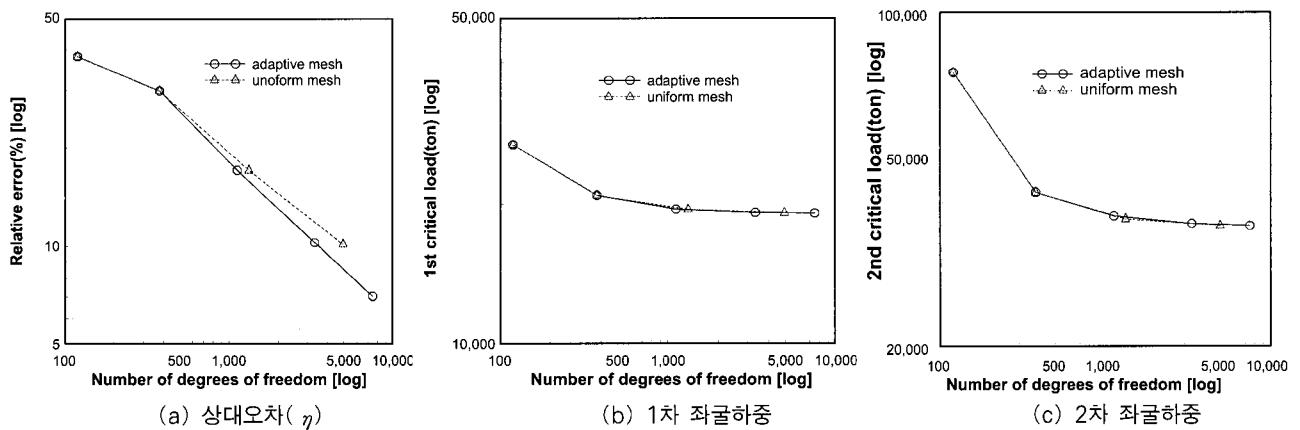


그림 14 팔각형 박스형구조물의 해석결과

소의 추이와 적응적 세분화에 따른 좌굴하중이 정확한 값으로 수렴되어 가는 추이를 보여주고 있다. 앞의 예제와 마찬가지로 적응적 유한세분화에 의해 상대오차를 최적으로 수렴시키면서 정확한 좌굴해석이 가능함을 알 수 있다.

## 5. 결 론

박스형구조물(Box-typed structure)은 구조물의 형상이 단순함에도 불구하고 처짐, 부재력 등의 이론해를 구하는 것이 쉽지 않으며, 박스구조물의 좌굴해석에 절점당 5자유도를

가지는 곡면판 쉘 유한요소를 사용하면 매우 복잡하게 된다. 본 논문에서는  $h$ -유한요소 세분화 방법을 이용한 박스형 절판구조물의 선형좌굴유한요소해석방법을 제안하였다. 박스형 절판구조물의 모델링에는 유한요소해석 결과의 정확성을 높이고 3차원 모델링의 효율성 확보를 위하여 절점당 6자유도를 가지는 변절점 평판셸유한요소를 사용하였다. 또한, 상위 수렴조각회복기법(Super-convergent patch recovery technique)에 의하여 적응적 유한요소해석방법을 사용함으로써 모델링과정에서 응력의 상대오차를 줄일 수 있다. 따라서, 본 논문에서 제안한 방법에 의하여 박스형 절판구조물의 선형좌굴 유한요소해석을 수행하면 상대오차를 크게 줄이면서 좌굴모드와 좌굴하중을 계산할 수 있게 되었다.

### 감사의 글

본 논문은 교육인적자원부의 재원으로 한국학술진흥재단에서 지원하는 지역대학우수과학자지원사업(KRF-2006-521-D00479)으로 수행된 내용의 일부를 정리한 것입니다. 두 번째 저자는 책임저자로서 연구비 지원에 깊은 감사를 드립니다.

### 참 고 문 헌

김선훈, 한인선(2005) 고성능 유한요소를 이용한 평판구조물의 정적 및 동적해석, 한국전산구조공학회논문집, 18(3), pp.311~320.  
 Allman, D.J.(1988) A Quadrilateral Finite Element including Vertex Rotations for Plane Elasticity Problems, *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, 26,

pp.717~739.  
 Bathe, K.J.(1996) *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, USA.  
 Choi, C.K., Lee, W.H.(1996) Versatile Variable-node Flat Shell Element, *Journal of Engineering Mechanics(ASCE)*, 122, pp.432~441.  
 Cook, R.D., Malkus, D.S., Plesha, M.E.(1989) *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, 3rd ed., John Wiley & Sons, New York.  
 Donea, J., Lamain, L.G.(1987) A Modified Representation of Transverse Shear in CO Quadrilateral Plate Elements, *Comput. Meth. in Appl. Mech. and Engrg.*, 63, pp.183~207.  
 Eriksson, A.(1992) On a Thin Shell Element for Nonlinear Analysis, based on the Isoparametric Concept, *Computers & Structures*, 42, pp.927~939.  
 Timoshenko, S.P., Gere, J.M.(1961) *Theory of Elastic Stability*, McGraw-Hill, New York, USA  
 Waszczyszyn, Z., Cichon, C., Radwanska, M. (1994) *Stability of Structures by Finite Element Methods*, Elsevier, The Netherlands.  
 Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L.(1989) *The Finite Element Method: Solid and Fluid Mechanics, Dynamics and Nonlinearity, Vol.II*, McGraw-Hill, London.  
 Zienkiewicz, O.C., Zhu, J.Z.(1989) Error Estimates and Adaptive Refinement for Plate Bending Problems, *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, 28, pp.2839~2853.