

# 이동최소제곱 다절점 유한요소를 이용한 새로운 전역-국부해석

## A New Global-Local Analysis Using MLS(Moving Least Square) Variable-Node Finite Elements

임 재 혁\*    임 세 영†

Lim, Jae-Hyuk    Im, Seyoung

(논문접수일 : 2007년 2월 9일 ; 심사종료일 : 2007년 5월 18일)

### 요 지

본 연구에서는 이동최소제곱 다절점 유한요소를 이용한 새로운 전역-국부해석기법을 제시하였다. 다절점 유한요소는 요소의 변에 임의의 수 절점을 가질 수 있으므로, 여러 개의 유한요소를 요소망의 재구성 없이 동시에 결합시킬 수 있다. 이는 응력구배가 집중되는 곳에 유한요소망을 구성하는 데에 있어 큰 편의를 제공한다. 또한 기존의 전역-국부해석기법처럼 중첩된 요소망을 사용하거나, 지배방정식을 두 번 해석할 필요가 없기 때문에 매우 간편하고 정확하다. 제시된 방법론의 성능을 검증하기 위해 응력 집중과 관련된 다양한 다중스케일 문제를 해석하였다.

**핵심용어** : 전역-국부 해석, 이동최소제곱 다절점 유한요소, 다중스케일 해석

### Abstract

We present a new global-local analysis with the aid of MLS(Moving Least Square) variable-node finite elements which can possess an arbitrary number of nodes on element master domain. It enables us to connect one finite element with a few finite elements without complex remeshing. Compared to other type global-local analysis, it does not require any superimposed mesh or need not solve the equilibrium equation twice. To demonstrate the performance of the proposed scheme, we will show several examples in relation to capturing highly local stress field using global-local analysis.

**Keywords** : global-local analysis, MLS(Moving Least Square) variable-node finite elements, multiscale analysis

### 1. 서 론

유한요소법을 이용한 재료의 전산 해석기법은 컴퓨터 기술의 발전과 맞물려 구조물의 설계 및 제작 분야에 있어 중요한 역할을 하고 있다. 하지만, "요소"라는 재료 기술의 제약은 때로 큰 단점이 되기도 한다. 예를 들어, 균열 같은 재료의 분리 현상이 나타나는 경우에는 요소망을 분리 면을 따라 재구성해야 하며, 대형구조물의 해석을 위해 각 부분 구조를 독립적으로 모델링하고 결합시키는 경우 요소 간의 불일치 접합으로 인해 해의 신뢰성이 떨어진다. 이외에도 다양한 스케일의 물리현상을 동시에 고려해야 하는 멀티스케일 모델링을 위한 방법론 개발에 있어서도 많은 제약을 준다. 이런 문제의 해결을 위해 다양한 수치 알고리즘이 제시되었다. 관련

방법론에 대해서 살펴보면 두 가지 다른 요소망을 결합시키는 관점에서 라그랑지 승수 및 벌칙함수를 이용한 이중 모델 해석법(Aminpour 등, 1995; Quiroz 등, 1995), 삼층 모델해석법(Park 등, 2002) 및 이동최소제곱 근사를 이용한 계면요소법(Kim, 2002) 등 몇몇 시도가 있었으나 그 방법론의 구현이 매우 난해하며, 심지어 수렴성의 증명을 위한 조각시험이 통과하지 않는 등 여러 가지 한계가 있다. 또한 응력집중 부위에 분해능을 요소망의 재구성 없이 증가시키기 위해 다절점 유한요소를 이용한 해결의 노력이 있었으나(Choi 등, 1989; 1993; 1996; 1997), 요소의 한 모서리에 하나의 절점만 추가가 가능하기 때문에 그 응용에 많은 제약이 있었다. 이외에도 전역-국부해석 관점에서 성긴 요소망을 가지고 해석하여 얻은 해를 보간법을 이용해서 재생한

† 책임저자, 정회원 · 한국과학기술원 기계공학과 교수  
Tel: 042-869-3028 ; Fax: 042-869-5013  
E-mail: sim@kaist.ac.kr

\* 정회원 · 한국과학기술원 박사후 연구원

• 이 논문에 대한 토론을 2007년 8월 31일까지 본 학회에 보내주시면 2007년 10월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

후 조밀한 요소망을 가지고 다시 해석하는 방법(Mote, 1971), 국부영역에 조밀한 요소망을 포개어 분해능을 증가시키는 방법(Fish 등, 1993; Kadowaki 등, 2004) 등이 제시되었다. 하지만 이러한 방법론은 전체 시스템 행렬을 두 번 해석해야 하거나 다른 분해능을 가지는 요소망 사이에 경계조건을 조정해야 하는 등의 번거로움이 있다. 본 연구에서는 이러한 전역-국부 유한요소해석 방법론의 단점을 극복하기 위해 이동최소제곱 다절점 유한요소(Lim, 2007; Lim 등, 2007)를 이용한 새로운 해석법을 제시하고자 한다. 본 방법은 라그랑지 승수, 벌칙함수의 사용이 필요없으며, 경계조건의 보간이나 전체 시스템 행렬을 두 번 해석하는 번거로움을 모두 극복한 방법이다. 이 방법론의 효율성을 다양한 수치예제를 통해 보여주도록 하겠다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서는 이동최소제곱 근사 및 이동최소제곱 다절점 요소의 형상함수 특징에 관해서 설명을 하고 3장에서는 이동최소제곱 다절점 유한 요소의 실례를 제시하도록 하며 4장에서는 새로운 전역-국부 해석법(global-local analysis)을 위한 방법론에 대해서 설명하도록 하겠다. 5장에서는 수치예제를 통해 성능을 평가하고 6장에서 결론을 내리도록 하겠다.

## 2. 이동최소제곱 근사 및 이동최소제곱 다절점 유한요소의 형식화

이 장에서는 이동최소제곱 근사법(Lancaster, 1981)에 관한 간략한 소개와 이를 마스터영역에서 응용한 이동최소제곱 다절점 유한요소의 형식화에 대해 소개하도록 하겠다.  $u(\xi)$ 은 이차원 변위 벡터장이며, 마스터 영역에서 정의된다. 이를 근사한 변위장을  $u^h(\xi, \bar{\xi})$ 라고 놓자.  $\bar{\xi}$ 은 근사를 위해 쓰이는 공간상의 주어진 절점을 위치를 의미한다.  $u^h(\xi, \bar{\xi})$ 는 식 (1)처럼 (2)의 기저와 계수의 곱으로 나타난다. 식 (2)처럼 이동된 기저(the shifted basis)를 사용하면 그렇지 않은 것에 비해 수학적으로 안정적임이 알려져 있다(Jin 등, 2001).

$$u^h(\xi, \bar{\xi}) = a^T(\bar{\xi})p(\xi - \bar{\xi}) \quad (1)$$

$$p^T(\xi - \bar{\xi}) = [1, \xi - \bar{\xi}, \eta - \bar{\eta}, (\xi - \bar{\xi})(\eta - \bar{\eta}) \dots] \quad (2)$$

(1)에서 정의된 근사된 변위장의 오차를 범함수를 구성해서 식 (3)과 같이 구성한다.

$$J(a^T(\bar{\xi})) = \sum_{I=1}^{NP} [a^T(\bar{\xi})p(\xi_I - \bar{\xi}) - u_I]^T [a^T(\bar{\xi})p(\xi_I - \bar{\xi}) - u_I] w_I(\xi_I - \bar{\xi}) \quad (3)$$

여기서 NB는 근사의 사용되는 기저의 수,  $a^T(\bar{\xi})$ 은  $2 \times NB$ 행의 미지계수이며,  $p(\xi - \bar{\xi})$ 은  $NB \times 1$  단항식의 벡터를 의미한다. 이 때,  $I=1 \sim NP$ (총 절점수)는 공간상의 절점의 번호를 의미한다.  $w_I$ 와  $u_I$ 는 절점의 가중함수 및 변위의 절점 값을 의미한다. 이 함수에 오차를 최소화하기 위해서  $a(\bar{\xi})$ 에 관해 변분을 취하면, 식 (4)와 같아진다(Li 등, 2004).

$$\delta J = M(\bar{\xi})a(\bar{\xi}) - BU = 0 \quad (4)$$

여기서  $M = PWP^T$ ,  $B = PW$ 이다.  $P = P(\xi_I - \bar{\xi})$ ,  $W = W(\xi_I - \bar{\xi})$ ,  $U$ 는 아래와 같이 주어진다.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ (\xi_1 - \bar{\xi}) & (\xi_2 - \bar{\xi}) & (\xi_3 - \bar{\xi}) & \dots & (\xi_{NP} - \bar{\xi}) \\ (\eta_1 - \bar{\eta}) & (\eta_2 - \bar{\eta}) & (\eta_3 - \bar{\eta}) & \dots & (\eta_{NP} - \bar{\eta}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{bmatrix} W_1(\xi_1 - \bar{\xi}) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & W_2(\xi_2 - \bar{\xi}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & W_3(\xi_3 - \bar{\xi}) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & W_{NP}(\xi_{NP} - \bar{\xi}) \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & \dots & u_{NP} \\ v_1 & v_2 & v_3 & \dots & v_{NP} \end{bmatrix}$$

구해진 계수 벡터  $a(\bar{\xi})$ 를 식 (1)에 대입하면 수식 (5)처럼 형상함수가 구해진다.

$$u^h(\xi, \bar{\xi}) = U^T B^T(\bar{\xi}) M^{-1}(\bar{\xi}) p(\xi - \bar{\xi}) = \sum_{I=1}^{NP} \phi_I(\xi, \bar{\xi}) u_I \quad (5)$$

식 (5)처럼 구해진 수식에 최적의 근사를 얻기 위해 이동과정( $\bar{\xi} \rightarrow \xi$ )을 취하면 식 (6)과 같은 수식이 얻어진다.

$$\lim_{\bar{\xi} \rightarrow \xi} u^h(\xi, \bar{\xi}) = u^h(\xi)$$

$$\lim_{\bar{\xi} \rightarrow \xi} p^T(\xi - \bar{\xi}) = p^T(0) = [1, 0, 0, 0, 0, \dots]$$

$$u^h(\xi) = U^T B^T(\xi) M^{-1}(\xi) p(0) = \sum_{I=1}^{NP} \phi_I(\xi) u_I \quad (6)$$

여기서,  $u_I$ 는 절점 I의 변위의 값이며, 이때 형상함수  $\phi_I(\xi)$ 는 식 (7)과 같이 기술된다.

$$\phi_I(\xi) = \sum_{L=1}^{NB} \sum_{J=1}^{NB} B_{LJ}(\xi) M_{LJ}^{-1}(\xi) p_J(0) = \sum_{L=1}^{NB} B_{LJ}(\xi) b_L(\xi),$$

$$b_L(\xi) = \sum_{J=1}^{NB} M_{LJ}^{-1}(\xi) p_J(0) \quad (7)$$

식 (7)과 같이 얻어진 수식이 기저  $p^T(\xi) = [1, \xi, \eta]$ 를 포함하는 경우 단위분할조건(Partition of unity)과 선형재생성(Linear consistency)을 만족함이 Liu(1995)에 의해 증명되었다.

$$\sum_{J=1}^{NP} \phi_J(\xi) = 1 \text{ (단위분할조건)} \quad (8)$$

$$\sum_{J=1}^{NP} \phi_J(\xi) \xi^r = \xi^r \text{ (선형재생성)} \quad (9)$$

이렇게 구해진  $\phi_I(\xi)$ 가 유한요소의 형상함수로 쓰이기 위해서는 크로네커 델타 조건(Kronecker delta condition,  $\phi_I(\xi_j) = \delta_{IJ}$ ) 및 형상함수의 연속성(continuity of shape function)이 만족되어야 한다. 이 설명에 앞서 편의를 위해 공간상의 근사에 참여하는 절점의 수 및 기저의 수를 Rank(W) 및 NB 라고 하고, 특히 경계에서의 근사의 참여하는 절점의 수 및 기저의 수는 RankB(W) 및 NBB라고 하겠다. 이동최소제곱 다절점 유한요소의 크로네커 델타 조건과 형상함수의 연속성에 관해 Rank(W) > NB인 경우와 Rank(W) = NB인 경우로 나누어 설명하도록 하겠다.

### 2.1 Rank(W) > NB인 이동최소제곱 다절점 유한요소

Rank(W) > NB 인 경우 수식 (7)에 형상 함수는 요소의 영역 내에서 분수형태 즉 유리수 함수(Rational function) 형태로 나타나게 된다. 다절점 유한요소의 가장 기본이 되는  $p^T(\xi) = [1, \xi, \eta]$ 인 그림 1의 5절점 유한요소에 대해서 예를 들어보도록 하겠다. 그림 1에서 보듯이 유한요소의 마스터 영역을  $D_1, D_2$ 로 두 개의 부분 공간으로 나눈다. 이 때 각 절점의 영향영역은 그림 2에서 보듯이 절점 3, 4, 5의 경우 전체 영역을 선택하도록 하며 절점 1과 2의 경우 각각  $D_1$ 과  $D_2$ 에 제한이 되도록 한다.  $D_1$  및  $D_2$ 에서 각각 Rank(W) = 4가 되며, NB = 3이 되어 Rank(W) > NB 인 경우가 된다. 따라서 요소의 내부 경계인  $\xi = 0$ 에서 연속성을 자연스럽게 만족하게 되므로 마스터영역의 전영역에서 연속인 형상함수가 만들어진다. 요소 외부경계에서의 형상함수의 특징을 살펴보기 위해 그림 1의 점 'A' ( $\xi = -0.6, \eta = -1.0$ )와 점 'B' ( $\xi = -1.0, \eta = -0.1$ )를 살펴보자. 절점 'A'가 놓인 15번의 경우를 살펴보면

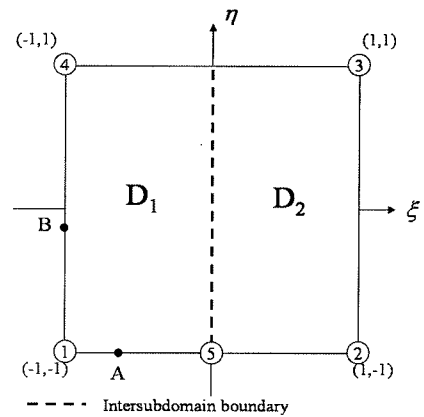


그림 1 5절점 요소의 마스터 영역

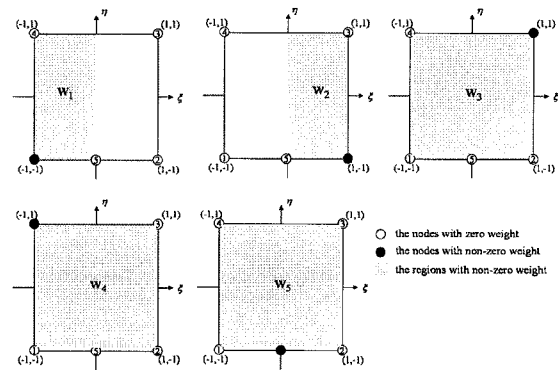


그림 2 5절점 요소의 절점의 영향영역

$\eta = -1.0$ 가 고정된 곳에 있으므로 유효한 기저가  $p(\xi) = [1, \xi]^T$ 가 되며, 영향력을 가지는 절점은 1, 5가 된다. 즉, RankB(W) = NBB = 2가 되며, 1과 5절점 사이가 선형근사가 된다. 절점 'B'가 놓인 14번의 경우  $\xi = -1.0$ 로 고정되므로 유효한 기저는  $p(\xi) = [1, \eta]^T$ 가 되고, 영향력을 가지는 절점은 1과 4가 되므로 RankB(W) = NBB = 2가 된다. 즉 이웃한 절점사이가 모두 선형 근사를 띄며, 크로네커 델타 조건도 자연스럽게 만족하게 된다. 이로써 요소내부는 연속이며 요소경계의 이웃한 두 절점 사이가 선형근사를 만족하는 유한요소가 만들어 진다. 실제 이 요소는 Cho와 Im(2005, 2006)에 연구에 의해 개발되어 불일치 요소망을 결합하는데 사용되었다. 그러나 이 요소는 형상함수가 영역내부에서 유리수 함수 형태로 나타나므로 여전히 가우스 수치적분으로는 정확한 적분을 할 수 없는 한계를 지니고 있다.

### 2.2 Rank(W) = NB인 이동최소제곱 다절점 유한요소

Rank(W) = NB인 경우 수식 (7)에 따르는 형상함수는 요소의 영역 내에서 다항식 꼴로 나타난다. 기저함수로는  $p(\xi) = [1, \xi, \eta, \xi\eta]^T$ 를 선택하였다. 앞선 2.1절의 Rank(W) >

NB인 요소와 달리 마스터 영역 내에서  $D_1, D_2$ 에서 각각 독립적인 다항식 근사를 하게 되므로, 두 영역의 경계에서 일반적으로 형상함수의 연속성을 만족하지 않는다. (Liu 등, 2004) 하지만 마스터 영역에서 직사각형 형태의 부분 공간을 가지는 경우 형상함수의 연속성을 만족하게 되며, 이것이 3절에서 소개할  $(4+n)$ 절점 유한요소이다. 또한 이차근사의 경우 이차 라그랑지 다항식  $p(\xi) = [1, \xi, \eta, \xi\eta, \xi^2, \eta^2, \xi^2\eta, \xi\eta^2, \xi^2\eta^2]^T$ , 선형-이차 변환의 경우  $p(\xi) = [1, \xi, \eta, \xi\eta, \xi^2, \xi^2(\eta+1)]^T$ 를 기저로 사용하면, 유한요소 내부에서 연속성을 만족하게 되며, 이것이 일반화된  $(9+2n)$ 절점 유한요소 및  $(5+2n)$ 절점 유한요소이다.

### 3. 이동최소제곱 기반 다절점 유한요소의 실례

이 장에서는  $\text{Rank}(W) = \text{NB}$ 인 경우를 만족하는 일반화된 다절점 유한요소의 실례에 대해 설명하도록 하겠다. 이 요소는  $\text{Rank}(W) > \text{NB}$ 요소가 가지고 있는 수치적분의 한계를 극복한 요소이며, 가우스 수치적분으로 조각시험을 만족한다. 이는 Lim과 Im(2007)과 Lim 등(2007)의 일에 자세히 나타나 있다.

#### 3.1 $(4+n)$ 절점 선형 요소

$(4+n)$ 절점 요소는 하나의 선형요소와 여러 개의 선형 요소에 접합이 가능한 요소이며, 기저함수로는  $p(\xi) = [1, \xi, \eta, \xi\eta]^T$ 를 사용한다.  $n=3$  경우를 예로 들면 그림 3과 같이 나타내어진다. 4개의 부분공간으로 구성되며, 각 부분 공간에서 영향력을 가지는 절점은 3, 4와 이웃한 두 절점에 의해서 정의된다. 이로 인해 3, 4 및 1, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 2 절점 사이에서 형상함수가 선형 경계를 가진다. 수치적분을 위해 각 부분 공간에  $2 \times 2$  가우스 적분을 사용한다.

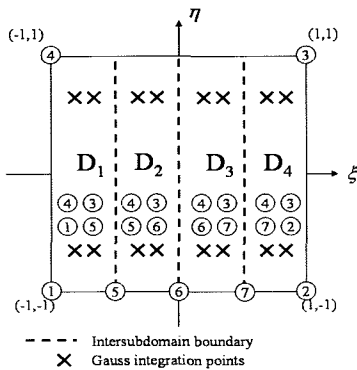


그림 3  $(4+n)$ 절점 선형 다절점 요소와 각 부분공간의 영향력을 가지는 절점 :  $n=3$ 인 경우

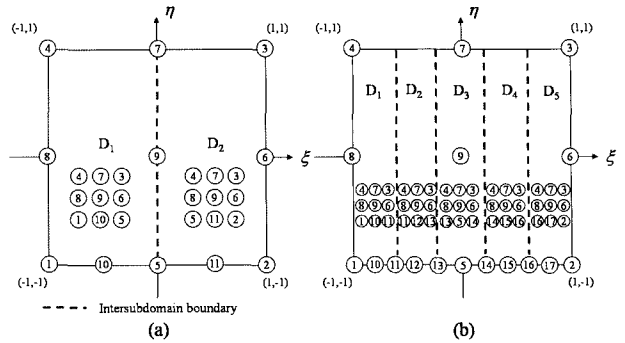


그림 4  $(9+2n)$ 절점 2차 다절점 유한요소와 각 부분공간의 영향력을 가지는 절점 : (a)  $n=1$ , (b)  $n=4$  인 경우

#### 3.2 $(9+2n)$ 절점 이차 요소

$(9+2n)$ 절점 요소는 하나의 이차 요소에 여러 개의 이차 요소의 접합이 가능하게 하는 요소로  $(4+n)$ 절점요소와 같이 부분 공간에 의해 나뉘어져 있다. 각 부분 공간이 9개의 절점에 의해 근사되며, 기저함수로 라그랑지 이차다항식  $p(\xi) = [1, \xi, \eta, \xi\eta, \xi^2, \eta^2, \xi^2\eta, \xi\eta^2, \xi^2\eta^2]^T$ 을 갖는다.  $n=1$ 인 경우와  $n=4$ 인 경우를 각각 그림 4(a), 4(b)에 나타내었다.  $n=4$ 인 경우에 대해 설명하면, 4, 7, 3 및 1, 10, 11, 11, 12, 13, 13, 5, 4, 14, 15, 16, 16, 17, 2가 요소의 경계에서 이차근사를 가진다. 이것은  $(9+2n)$ 절점 이차 요소로 일반화되어 표현가능하다. 이 요소는 부분 공간을  $3 \times 3$  가우스 수치적분으로 조각시험을 만족한다.

#### 3.3 $(5+2n)$ 절점 선형-이차 변환 요소

$(5+2n)$ 절점 선형-이차 변환 요소의 기저함수로는  $p(\xi) = [1, \xi, \eta, \xi\eta, \xi^2, \xi^2(\eta+1)]^T$ 의 5개의 기저함수를 사용한다. 이 기저함수의 특징은  $\eta=1$ 에서 기저는  $[1, \xi, \xi^2]$ 으로 줄어들며, 이차근사를 만족한다. 같은 이유로  $\eta=-1$ 에서는 기저는  $[1, \xi]$ 이며, 선형근사가 된다.  $n=2$ 인 경우에 요소의 부분 공간에

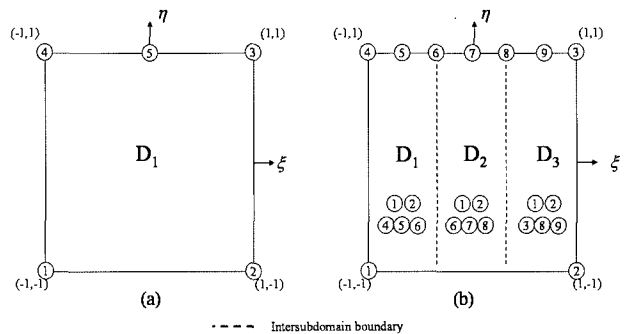


그림 5  $(5+2n)$ 절점 선형-2차 변환 요소와 각 부분공간의 영향력을 가지는 절점: (a)  $n=0$ 인 경우 (b)  $n=2$ 인 경우

영향력을 가지는 절점을 그림 5(b)에 나타내었다. 수치적분을 위해서는 각각의 부 공간을  $3 \times 2$ 수치적분을 실행하였다. 실제로 그림 5(a)의 경우는 잘 알려진 선형-이차 변환요소 (Hughes, 1987)와 같게 되며, 이는 선형요소와 이차요소를 접합하는데 유용하다. 하지만 본 논문에서는 이것의 일반화된 형태인  $(5+2n)$ 절점요소를 제시 하였으며, 하나의 선형요소와 임의의 수의 이차요소의 접합도 가능하다.

#### 4. 이동최소제품 다절점 유한요소를 이용한 전역-국부 유한요소해석

본 장에서는 이동최소제품 다절점 유한요소를 이용한 전역-국부 유한요소해석에 관해 자세히 설명하도록 하겠다. 응력 집중이 예상되는 균열선단을 유한요소망으로 모델링 하기 위해서는 균열선단 주변의 유한요소를 매우 조밀하도록 구성해야한다. 그러나, 그렇게 하기 위해서는 조밀한 요소망을 주변의 성긴 요소망과 연결하도록 그림 6과 같이 매우 번잡한 요소망의 재구성을 해야 한다. 일정 변형을 삼각형 요소를 사

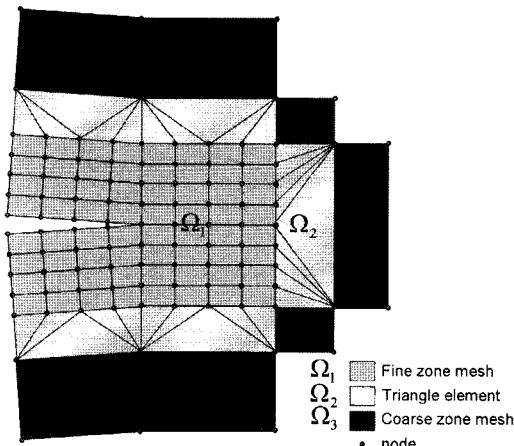


그림 6 요소망의 재구성을 이용한 균열 선단의 유한 요소모델

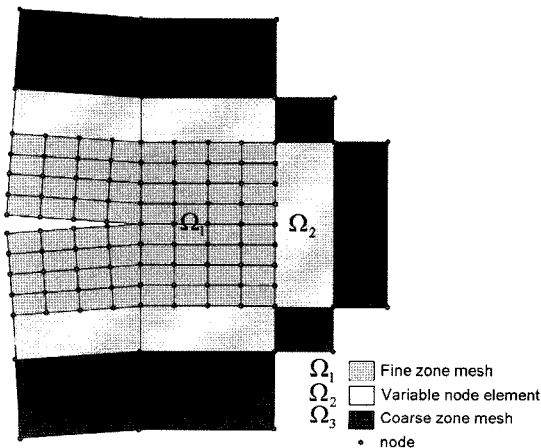


그림 7 다절점 유한요소를 이용한 균열선단의 유한요소모델

용해서 재구성하는 경우 저차근사로 인해, 사각형 요소를 사용하는 경우 요소의 왜곡으로 인해 해의 품질이 떨어지는 한계를 지니고 있다. 이런 문제의 해결을 위해서 그림 7처럼 균열선단 부위는  $\Omega_1$ 처럼 매우 조밀한 요소망을 구성하고,  $\Omega_3$ 은 성긴 요소망을 사용한다.  $\Omega_1$ 과  $\Omega_3$ 의 연결을 위해서 본 연구에서 제안한 다절점 유한요소로  $\Omega_2$ 을 모델링 하게 하면, 요소망의 재구성, 왜곡이 없는 조밀한 요소망과 성긴 요소망의 연결이 생성이 된다. 3장에서 언급했듯이 다절점 유한요소망은 임의의 수의 선형 또는 이차 경계를 가질 수 있으므로 라그랑지 승수나 벌칙함수 같은 특수한 이음매 없이 동시적인 연결이 가능하다. 또한 기존의 전역-국소해석처럼 중첩된 요소망을 사용하거나, 시스템 행렬을 두 번 해석할 필요가 없어 전역과 국부의 동시해석이 가능하다.

#### 5. 수치예제

##### 5.1 조각시험

본 유한요소의 검증을 위해 단순 인장 조각시험을 실시하였다. 그림 8과 같이 단순 인장을 받는 사각형 유한요소모델을 구성하였으며, 전체를  $\Omega_1$ 과  $\Omega_2$ 로 나누어 모델링 하였다. 평면 응력 조건을 가지도록 하였으며, 재료상수는 영의 계수  $1 \times 10^5 \text{Pa}$ , 포와송 비 0.3을 사용하였다. 그림 9는 선형요소간의 결합을 위해  $\Omega_1$ 은 10개의 4절점 유한요소를 사용하였

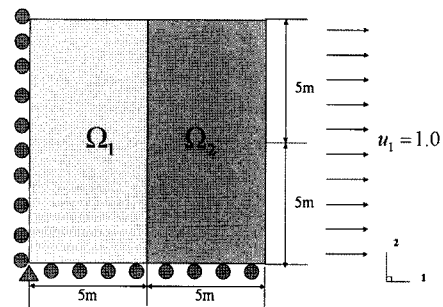


그림 8 조각시험 모델 및 경계조건

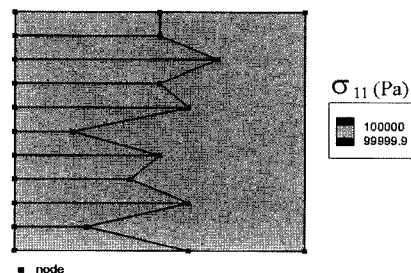


그림 9 선형-선형 결합 유한요소 모델의  $\sigma_{11}$  분포도

고  $\Omega_2$ 는 1개의  $(4+n)$ 절점 유한요소를 사용한 경우이다. 수치결과에서 나타나듯이 제안된 유한요소를 이용해서 구성된 유한요소 모델은 요소망 경계에서 적합조건을 만족하기 때문에 조각시험을 완벽하게 통과함을 알 수 있다.  $(9+2n)$ 절점 2차 다절점 유한요소,  $(5+2n)$ 절점 선형-2차 변환 요소에 대한 조각시험 결과는 Lim 등(2007)의 일에 자세히 나타나 있으며, 모두 조각시험을 통과한다.

### 5.2 원공을 포함한 무한판

두 번째 예제로 원공이 내재된 단순 인장을 받고 있는 무한판에 응력해석을 실시하였다. 이에 관한 정확해는 다음 수식 (10)과 같으며 참고문헌(Timoshenko 등, 1970)에 잘 나타나 있다.

$$\begin{aligned} \sigma_{11}(r, \theta) &= \sigma_0 \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \left( \frac{3}{2} \cos 2\theta + \cos 4\theta \right) + \frac{3}{2} \frac{a^4}{r^4} \cos 4\theta \right) \\ \sigma_{22}(r, \theta) &= \sigma_0 \left( -\frac{a^2}{r^2} \left( \frac{1}{2} \cos 2\theta - \cos 4\theta \right) - \frac{3}{2} \frac{a^4}{r^4} \cos 4\theta \right) \\ \sigma_{12}(r, \theta) &= \sigma_0 \left( -\frac{a^2}{r^2} \left( \frac{1}{2} \sin 2\theta + \sin 4\theta \right) + \frac{3}{2} \frac{a^4}{r^4} \sin 4\theta \right) \end{aligned} \quad (10)$$

여기서  $a$ 는 원공의 반지름,  $r$ 은 원공 중심에서의 거리,  $\theta$ 는 그림 10에서 보듯이 원주를 따른 각도를 의미한다. 재료 상수는 탄성계수  $1 \times 10^5 \text{ Pa}$ , 포와송비 0.3을 사용하였다. 하중은 무한판의 경계에서  $\sigma_{11} = \sigma_0 = 1.0 \text{ Pa}$ 의 인장력을 받는다고 가정하였다. 유한요소 모델에서 무한판 경계조건을 구현하기 위해서 수식 (10)의 정확해를 유한 요소모델의 경계를 따라 13차 고차 가우스 수치적분을 통해 경계하중 조건으로 환산하여 유한요소해석에 사용하였다. 원공의 응력집중을 모사하기 위해  $\Omega_1$  영역의 하나의 유한요소를 4개의 유한요소 만드는 분할을 2차례 실시하였다. 이 때 발생하는 유한요소 모델 경계의 불일치는  $(4+n)$ 절점 유한요소를 사용함으로써 불일치 경계면이 없도록 하였다. 이 수치 결과를 그림 11(a)~(d) 및 표 1에 나타내었다. 수치결과의 비교를 위해서 그림 10의 응력 집중부위인 'A'에 근방에서 가장 가까운 가우스 수치적분 점에서  $\sigma_{11}$ 를 계산하였으며,  $\Omega_1$ 에서 상대오차 에너지 norm(Relative Error Energy Norm)를 비교하였다. 표 1 및 그림 11에서 나타나듯이  $\Omega_1$ 의 요소망이 분화됨에 따라 응력 집중부위의 응력이 정확해진 3.0에 가까워지고 있으며, 에너지 오차도 이에 따라 감소하고 있음을 확인할 수 있다. 또한 3200절점으로 구성된 그림 11(d)의 참조해의 요소망에 비해 훨씬 적은 1280절점으로 구성된 그림 11(c)의 유한

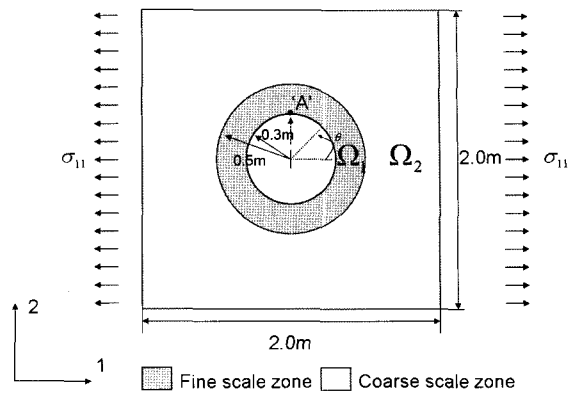


그림 10 원공을 포함한 무한판 문제

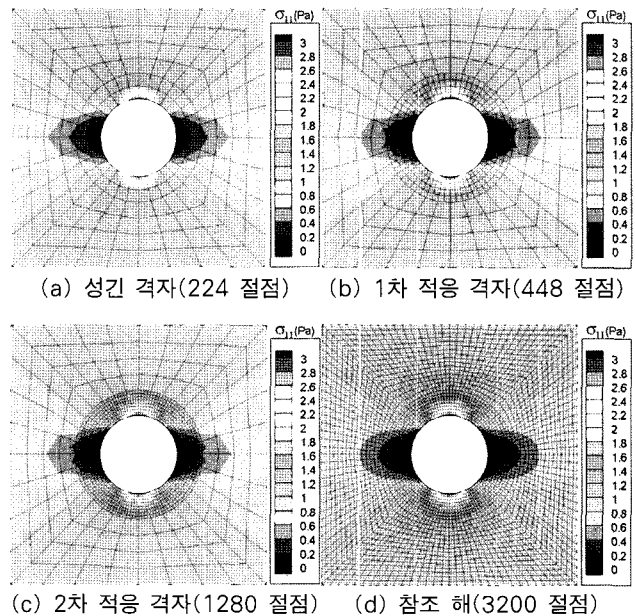


그림 11  $\sigma_{11}$  응력 분포도

표 1 전역-국부 해석해와 참조해의 최대  $\sigma_{11}$  응력 및 상대오차 에너지 norm의 비교

Case	'A' 주변의 최대 $\sigma_{11}$ 응력	$\Omega_1$ 에서의 상대오차 에너지 norm
(a)	2.663	0.152
(b)	2.862	$8.35 \times 10^{-2}$
(c)	2.935	$4.53 \times 10^{-2}$
(d)	2.953	$4.46 \times 10^{-2}$

요소망의 해가 참조해와 0.1% 오차 범위 이내에서 일치함을 확인할 수 있었다.

### 5.3 균열 선단을 포함하는 불균질 재료의 다중스케일 해석

공동이나 개재물을 포함하는 불균질 재료를 유한요소모델링을 이용해서 시스템 전체를 모델링하여 해석하는 경우 매우 많

은 요소망이 소요되어 해석시간이 오래 걸린다. 이를 개선하기 위해 불균질 재료가 가진 재료구성의 주기성(Periodicity)를 이용한 다중스케일 해석기법이 널리 쓰인다. 가장 대표적인 방법은 전체 시스템을 대표하는 부피영역(Representative Volume Element, RVE)을 선정하여 재료를 균질화(homogenization)하고 등가물성을 얻어내는 방법이다(Nemat-Nasser 등, 1993). 이렇게 하여 시스템의 대표특성을 추출하여, 불균질 재료 전체를 모두 모델링하는 노력을 줄일 수 있다. 그러나, 균열, 전위 등의 결함이 발생하는 경우 이러한 균질화 기법은 더 이상 유효하지 않으며, 이를 위해서는 유한요소망을 국부적으로 세분화하는 노력이 필요하다. 이러한 문제의 해결을 위해서 본 연구에서 제시된 국부-전역해석기법을 적용하였다. 재료의 균질화를 위해 앞서 언급한 시스템을 구성하는 대표영역(Representative Volume Element, RVE)의 등가물성을 구하는 방법을 사용하였다. 이런 균질화 기법의 해의 정확도는 RVE의 체적이 전체시스템에 비해 작을 수록, RVE의 특성이 전체 시스템의 구성성분과 통계적으로 일치할수록 (statistically equivalent) 높아지는 것으로 알려져 있다 (Nemat-Nasser 등, 1993).

등가물성을 구하기 위해서는 그림 12처럼 시스템을 대표하는 RVE를 해가 충분히 수렴할 정도로 유한 요소망을 조밀하게 구성한다. 이 요소망이 시스템의 일정 변형( $\bar{\epsilon}_{kl}$ )을 나타내도록 식 (11)을 이용해 경계조건으로 가한 후에 응력 성분을 유한요소해석을 통해 계산한다. 이 응력성분을 RVE의 체적에 관해 적분한 후에 RVE의 체적으로 나누어 등가응력성분( $\bar{\sigma}_{kl}$ )을 구한다. 이렇게 얻어진 등가 응력성분과 경계조건으로 가한 등가변형을 성분을 식 (12)에 대입하여 최종 등가 재료 상수를 ( $C_{ijkl}$ )을 얻게 된다. 그림 12 RVE의  $\Omega_1$ 와  $\Omega_2$ 의 탄성계수와 포와송비는 각각  $2 \times 10^5 Pa$ , 0.3와  $1 \times 10^5 Pa$ , 0.3이다. 앞서 언급한 균질화 기법을 통해서 얻어낸 등가 물성은 탄성계수 113,478Pa와 포와송비 0.2977이다.

$$\bar{\epsilon}_{kl} = \frac{1}{\Omega_{RVE}} \int \epsilon_{kl} d\Omega_{RVE} = \frac{1}{\Omega_{RVE}} \int_{\Gamma} \frac{1}{2} (u_i n_j + u_j n_i) d\Gamma$$

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{\Omega_{RVE}} \int \sigma_{ij} d\Omega_{RVE} \tag{11}$$

$$\bar{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} \bar{\epsilon}_{kl} \tag{12}$$

여기서  $\Omega_{RVE}$ 는 RVE의 체적을 나타낸다.  $\bar{\sigma}_{kl}$ 와  $\bar{\epsilon}_{kl}$ 는 각각 RVE에 평균화된 등가응력 및 등가변형율을 의미한다.

그림 13은 그림 12의 RVE로 구성된 균열을 포함한 복합 재료를 나타낸다. 그림 13에서 보듯이 균열과 같은 국부적인

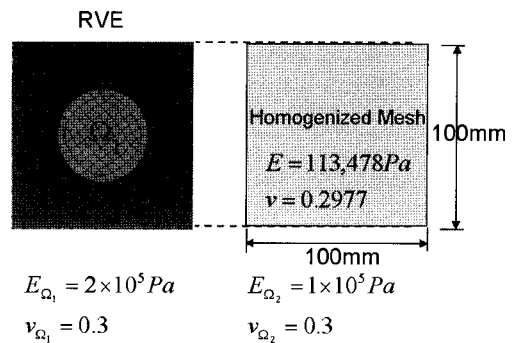


그림 12 균질화 기법에 의한 RVE의 균질화

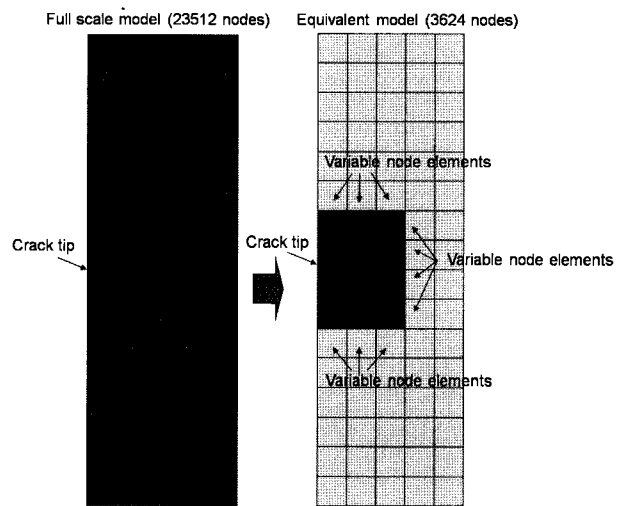


그림 13 균질화 기법과 국부-전역해석 기법을 도입한 균열을 포함한 복합재료의 모델링

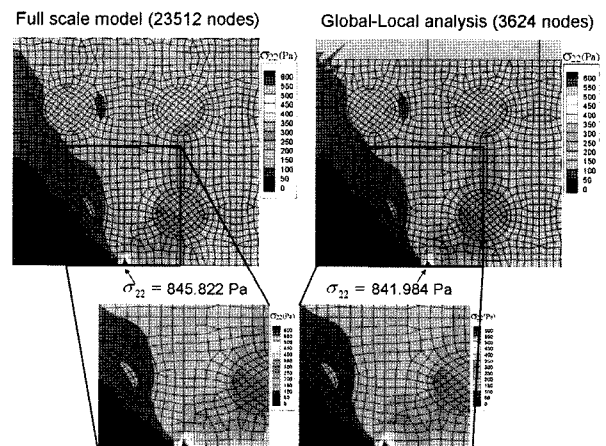


그림 14 전체 유한요소모델(23,512 절점)과 전역-국부 해석 기법(3,624 절점)으로 해석한 균열선단 부근의  $\sigma_{22}$  응력의 비교

결합을 포함하는 영역은 유한요소망을 이용해 높은 분해능을 유지하고, 균열선단에서 먼 영역은 균질화기법을 통해서 등가물성으로 대체하여 자유도를 축소시켰다. 이 때 다른 분해능을 가지는 유한요소망의 연결을 위해 (4+n)절점 유한요소

를 사용하였다. 그리하여 전체모델의 절점 수 23,512에 비해 약 15%인 3,624절점만을 사용한 유한요소모델을 얻을 수 있었다. 수치해석을 위해 그림 13에 복합재료의 양 끝단에 수직 방향으로 150N/mm의 인장력을 가하게 하였으며, 그 수치해석 결과를 그림 14에 나타내었다. 그림 14의  $\sigma_{22}$  응력 분포에서 나타나듯이 균열선단 주변의 응력 분포양상이 잘 일치하는 것을 확인 할 수 있었다. 균열 선단의  $\sigma_{22}$  응력 값은 전체모델을 사용한 경우 845.82Pa, 전역-국부해석의 결과 841.98Pa으로 약 0.5% 범위 내에서 일치한다.

### 5. 결 론

본 연구에서는 이동최소제곱기반 다절점 유한요소 (MLS-based variable-node finite elements)를 이용해서 유한요소망 임의의 영역에 요소망을 세분화 할 수 있는 새로운 전역-국부 해석기법을 (global-local analysis) 제시하였다. 본 유한요소는 요소 경계의 임의의 수의 절점을 가질 수 있으므로, 임의의 수의 유한요소와 완벽한 접합이 가능하다. 기존의 유한요소법처럼 요소망의 왜곡이나 재구성이 필요 없으며, 전역-국부 해석 방법처럼 평형방정식을 두 번 해석하거나, 추가적인 중첩된 유한요소망을 요구하지 않는 매우 효과적인 방법이라고 할 수 있다. 이 방법의 정확도를 조각시험, 원공을 포함한 무한판, 균열선단을 포함하는 복합재료 모델링 등의 예제를 통해서 입증하였다. 가우스 수치적분으로 조각시험을 완벽히 만족하며, 원공을 포함한 무한판 문제의 경우 약 0.1% 오차 범위 내에서 참조해와 일치함을 확인 할 수 있었다. 특히 균열 선단을 포함한 복합재료의 모델링의 경우 참조해의 약 15% 정도의 절점을 이용해서 참조해와 잘 일치하는 해를 얻을 수 있었다. 이 방법론의 삼차원 문제로 의 확장 또한 삼차원 이동최소제곱 다절점 유한요소를 사용하면 가능하리라 생각된다(Lim 등, 2007). 이외에도 이 방법을 이용해서 요소망의 불일치와 관련된 다양한 주제(접촉, 영역분할 알고리즘, 쉘 및 판 문제로의 확장)를 해결하는 다양한 연구가 진행 중에 있다.

### 감사의 글

본 연구는 과학기술부가 주관하는 21세기 프론티어연구개발사업의 일환인 나노메카트로닉스기술 개발사업단의 연구비 지원(M102KN010010-07K1401-01010)에 의해 수행되었습니다.

### 참 고 문 헌

- Aminpour, M.A., Ransom, J.B., McCleary, S.L.(1995) A coupled analysis method for structures with independently modeled finite element sub-domains. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38, pp.3695~3718.
- Cho, Y.S., Im, S.(2006) MLS-based variable-node elements compatible with quadratic interpolation Part II: application for finite crack element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 65, pp.517~547.
- Cho, Y.S., Im, S.(2006) MLS-based variable-node elements compatible with quadratic interpolation. Part I: formulation and application for non-matching meshes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 65, pp.494~516.
- Cho, Y.S., Jun, S., Im, S., Kim, H.G.(2005) An improved interface element with variable nodes for non-matching finite element meshes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194, pp.3022~3046.
- Choi, C. K., Park, Y. M.(1989) A nonconforming Transition Plate Bending Elements with Variable Mid-side nodes. *Computers and Structures*, 32, pp.295~304.
- Choi, C.K., Lee, N.-H.(1993) Three dimensional transition solid elements for adaptive mesh gradation. *Structural Engineering and Mechanics*, 1, pp.61~74.
- Choi, C.K., Lee, N.-H.(1996) A 3-D adaptive mesh refinement using variable-node solid transition element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39, pp.1585~1606.
- Choi, C.K., Park, Y. M.(1997) Conforming and nonconforming transition plate bending elements for an adaptive h-refinement. *Thin-Walled Structures*, 28, pp.1~20.
- Fish, J., Guttal, R.(1998) The s-version of finite element method for laminated composites. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39, pp.3641~3662.
- Hughes, T. J. R.(1987) The finite element method : linear static and dynamic finite element analysis. Prentice-Hall, New York.
- Jin, X., Li, G., Aluru, R.N.(2001) On the equivalence between least square and kernel approximations in meshless methods. *Computer Modeling in Engineering and Science*, 2, pp.341-350.



- Kadowaki, H., Liu, W. K.**(2004) Bridging multi-scale method for localization problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193, pp.3267~3302.
- Kim, H.G.**(2002) Interface Element Method (IEM) for a partitioned system with non-matching interfaces. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191, pp.3165~3194.
- Lancaster, P., Salkauskas, K.**(1981) Surface generated by moving least squares method. *Mathematics of Computation*, 37, pp.141~158.
- Li, S., Liu, W.K.**(2004) Meshfree Particle Methods, Springer, New York.
- Lim, J. H., Im, S.**(2007) (4+n)-noded MLS (Moving Least Square)-based finite elements for mesh gradation. *Structural Engineering and Mechanics*, 25, pp.91~106.
- Lim, J. H., Im, S., Cho, Y.-S.**(2007) MLS (Moving Least Square)-based finite elements for three-dimensional non-matching meshes and adaptive mesh refinement. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196, pp.2216~2228.
- Lim, J. H., Im, S., Cho, Y.-S.**(2007) Variable-node finite elements for non-matching meshes by means of MLS(Moving Least Square) scheme. *International Journal Numerical Methods in Engineering*, available online.
- Liu, G.R., Gu, Y.T., Dai, K.Y.**(2004) Assessment and applications of point interpolation methods for computational mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 59, pp.1373~1397.
- Liu, W.K., Jun, S., Z, Y.F.**(1995) Reproducing kernel particle methods. *International Journal of Numerical Methods in Fluids*, 20, pp.1081~1106.
- Mote, C.D.**(1970) Global-local finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 3, pp.565~574.
- Nemat-Nasser, S., Hori, M.**(1993) Micromechanics, North Holland Publication, Amsterdam.
- Park, K.C., Felippa, C.A., Rebel, G.**(2002) A simple algorithm for localized construction of non-matching structural interfaces. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 53, pp.2117~2142.
- Quiroz, L., Beckers, P.**(1995) Non-conforming mesh gluing in the finite elements methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38, pp.2165~2184.
- Timkshenko, S.P., Goodier, J.N.**(1970) Theory of Elasticity(3rd edn), McGraw-Hill, New York.