

무요소법(RPIM)을 이용한 구조 요소의 응력해석

The Stress Analysis of Structural Element Using Meshfree Method(RPIM)

한 상 을* 양 재 근* 주 정 식**

Han, Sang-Eul Yang, Jae-Guen Joo, Jung-Sik

(논문접수일 : 2007년 2월 26일 ; 심사종료일 : 2007년 5월 22일)

요 지

본 연구에서는 구조 요소의 응력해석을 위한 무요소 RPIM(Meshfree Radial Point Interpolation Methods)법을 제시한다. 이를 위하여 먼저 무요소법의 형상함수와 무요소 RPIM법의 정식화 과정 및 프로그래밍을 간략히 요약한다. 절점보간법은 방사기저함수와 다항기저함수를 포함하고 있고 이 중 다항기저함수는 특이성문제를 극복할 수 있다. 게다가 무요소 RPIM법의 보간함수는 영향영역의 절점을 통과하고 형상함수는 크로네커 델타 성질을 갖고 있으므로 최소자승법에 기반을 둔 무요소법보다 쉽게 필수경계조건을 만족시킨다. 본 연구의 정확성을 확인하기 위하여, 캔틸레버형 평판, 유공평판, 속이빈 원통 문제의 수치예제를 수행하고 이론 해와 유한요소법 결과를 비교, 분석한다.

핵심용어 : 무요소법, 방사기저함수, 방사절점보간법

Abstract

A Meshfree is a method used to establish algebraic equations of system for the whole problem domain without the use of a predefined mesh for the domain discretization. A point interpolation method is based on combining radial and polynomial basis functions. Involvement of radial basis functions overcomes possible singularity. Furthermore, the interpolation function passes through all scattered points in an influence domain and thus shape functions are of delta function property. This makes the implementation of essential boundary conditions much easier than the meshfree methods based on the moving least-squares approximation. This study aims to investigate a stress analysis of structural element between a meshfree method and the finite element method. Examples on cantilever type plate, hollow cylinder and stress concentration problems show that the accuracy and convergence rate of the meshfree methods are high.

Keywords : meshfree method, radial basis function, radial point interpolation method

1. 서 론

유한요소법(최창근, 2002)은 광범위한 분야의 여러 공학적인 문제들을 해결하기 위한 가장 강력한 수치해석방법중의 하나로 지속적인 발전을 거듭하여 왔다. 그러나 유한요소법은 해의 정확도가 요구되는 부분에서 세분화된 요소망을 사용해야 하며, 요소분할시 요소를 구성하는 절점들 사이에 어떤 규칙성과 연속성을 만족시켜야 하는 제약성을 지니고 있다. 이러한 제약은 응력이나 변형률이 집중되는 국부화 및 특이성(singularity)이 발생하는 문제, 불연속 구간이 존재하는 문

제, 기하학적 형상이나 경계조건, 불연속 구간 등이 계속적으로 변화하는 문제와 같은 공학적 문제의 해결에 있어서는 유한요소법 사용상의 큰 단점으로 지적되고 있다. 이러한 단점을 극복하기 위하여 요소의 개념을 사용하지 않고 절점들의 상호관계와 경계영역의 조건만을 사용하여 문제를 해결할 수 있는 무요소법(Meshfree Method)이라는 새로운 수치해석방법이 개발되었다. 무요소법에서는 어떤 기준점을 중심으로 그 점으로부터 일정한 영향영역 내에 포함되어 있는 불규칙하게 분포된 절점들과의 위치적 상관관계에 의해 형상함수가 도출되고 변위함수가 결정된다. 이때 경계영역에 위치한 절점들은 필수경계

† 책임저자, 정회원 · 인하대학교 건축학부 교수
Tel: 032-872-6107 ; Fax: 032-873-5724
E-mail: hsang@inha.ac.kr

* 인하대학교 건축학부 부교수

** 학생회원 · 인하대학교 건축공학과 석사과정

• 이 논문에 대한 토론을 2007년 8월 31일까지 본 학회에 보내주시면 2007년 10월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

조건을 정확히 만족시키지 못하는 경우가 발생할 수 있으므로 추가의 구속조건을 사용하여 경계조건이 만족될 수 있도록 하여야 한다. 본 연구에서는 무요소법의 수치해의 정도를 향상시키기 위하여 해의 정확성을 유지시키고 필수경계조건을 만족시킬 수 있는 무요소 RPIM법을 사용한다. 무요소 RPIM법은 특이성문제를 극복하고 임의로 분포된 절점에서도 안정적으로 해를 구할 수 있다. 방사기저함수(Radial Basis Function)를 사용하여 RPIM법의 형상함수가 유도되고 이를 이용하여 무요소 RPIM법의 수치해석과정을 정식화한다. 수치해석 예제로 캔틸레버형 평판(Timoshenko, 1959), 유공평판, 속이 빈 원통 모델(Timoshenko, 1970)을 모델링하여 구조 요소의 응력해석을 이룬 해, 유한요소법과 비교, 분석한다.

2. 무요소법의 형상함수

Liu(2002)는 문제영역을 적절하게 분포된 절점으로 나타내고 갤러킨법의 약형식에 기반을 둔 Meshfree Point Interpolation Methods를 제안하였다. PIM법의 주요 특징은 형상함수가 크로네커 델타(Kronecker delta) 성질을 가지고 있고, 필수 경계조건은 유한요소법처럼 쉽게 적용될 수 있다는 점이다. 그러나 PPIM(Polynomial Point Interpolation Method)법에서 모멘트 행렬은 특이성 문제가 발생할 수 있으므로 2단계의 MTA(Matrix Triangularization Algorithm)(Liu, 2001a)를 사용하여 모멘트 행렬의 정식화에 사용된 다항식의 절점과 조건을 제외함으로써 이 문제를 해결할 수 있었다. 또한 PPIM법은 단지 국부영역에서 임의로 분포된 절점그룹을 토대로 형상함수를 사용하고, 전체 적분격자는 갤러킨 약형식에서 적분을 평가하나 형상함수의 비적합성 때문에 PPIM법은 특히 국부지지영역에서 너무 많은 절점을 사용한 불규칙 절점분포에서는 오차가 많이 발생하는 단점이 있다. 반면, 방사기저함수를 사용한 무요소 RPIM법은 특이성문제를 극복하고 임의로 분포된 절점에서도 안정적으로 해를 구할 수 있으며, 유일한 변수는 반지름 이기 때문에 3차원에서 쉽게 해석할 수 있다. 이런 장점으로 최근 개발된 무요소 RPIM법은 PPIM법보다 더 널리 사용된다.

2.1 RPIM법의 형상함수

방사기저함수는 PPIM법의 특이성문제를 해결하기 위해서 무요소 RPIM법에 사용되며, 임의로 절점이 분포된 근사함수를 나타내는데 유용하다. RPIM법의 보간함수는 다음과 같다.

표 1. 방사기저함수(Radial Basis Function)와 형상계수

방사기저함수	수식	형상계수
Multi-quadrics (MQ)	$R_i(x, y) = (r_i^2 + (\alpha_c d_c)^2)^q$	$\alpha_c \geq 0, q$
Gaussian (Exp)	$R_i(x, y) = \exp[-\alpha_c (\frac{r_i}{d_c})^2]$	α_c
Thin Plate Spline (TPS)	$R_i(x, y) = r_i^\eta$	η
Logarithmic	$R_i(x, y) = r_i^\eta \log r_i$	η

$$u(x) = \sum_{i=1}^n R_i(x) a_i + \sum_{j=1}^m P_j(x) b_j = \mathbf{R}^T(x) \mathbf{a} + \mathbf{P}^T(x) \mathbf{b} \quad (1)$$

$R_i(x), P_j(x)$ 는 각각 방사기저함수, 다항기저함수(Polynomial Basis Function)이고, 계수 a_i, b_j 는 아직 결정되지 않은 상수이다. n 은 국소지지영역의 필드절점(field nodes) 수, m 은 다항식 함수의 수이다. $m = 0$ 일 때, 순수 방사기저함수라 한다.

주로 사용되는 방사기저함수는 MQ(Multi-Quadrics Function), Exp(Gaussian Function), TPS(Thin Plate Spline Function), Logarithmic Radial Basis Function으로 표 1과 같고, 본 논문에서는 MQ(Multi-Quadrics Function)(Hardy, 1990)를 사용한다. MQ-RBF는 다음과 같이 정의된 절점 거리 r_i 에 관한 함수이다.

$$R_i(x, y) = (r_i^2 + (\alpha_c d_c)^2)^q \quad (2)$$

d_c 는 관심점(the point of interest) x 근방의 평균절점 거리, α_c, q 는 무차원의 실수변수이고 r_i 는 다음과 같다.

$$r_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} \quad (3)$$

다항기저함수는 다음과 같이 나타낸다.

$$\mathbf{P}^T(x) = \{1, x, y, x^2, xy, y^2, \dots\} \quad (4)$$

국소지지영역의 필드절점 값이 보간법에 이용되고, 본 논문에서는 관심점에 그림 1의 원형지지영역과 그림 2의 사각지지영역 중 원형지지영역(Circular Support Domain)을 사용한다. 원 또는 구의 반지름 형태로 나타낸 국소지지영역의 차원은 다음과 같다.

$$d_s = \alpha_s d_c \quad (5)$$

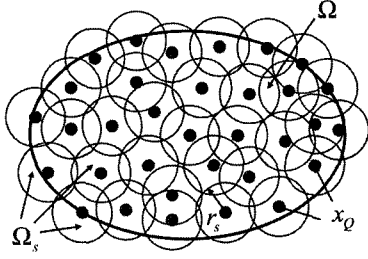


그림 1 관심점 x 의 원형지지영역(Circular support domain)

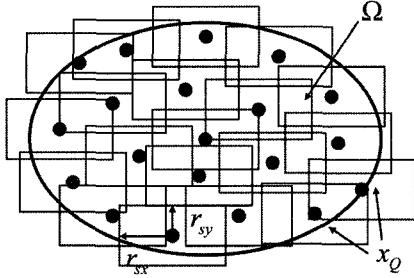


그림 2 관심점 x 의 사각지지영역(Rectangular support domain)

α_c 는 국소지지영역의 무차원 실수이다.

식 (1)의 상수 a_i, b_j 는 국소지지영역의 모든 n 개의 절점을 지나면서 결정된다. 예를 들어, k 번째 절점의 필드함수 $u(x)$ 는 다음과 같다.

$$u(x_k, y_k) = \sum_{i=1}^n R_i(x_k, y_k) a_i + \sum_{j=1}^m P_j(x_k, y_k) b_j \quad (6)$$

식 (6)의 매트릭스형태는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$U_e = R_q a + P_m b \quad (7)$$

U_e 는 국소지지영역 절점 값의 함수벡터이다.

$$U_e = \{u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n\}^T \quad (8)$$

R_q 는 방사기저함수의 모멘트매트릭스이다.

$$R_q = \begin{bmatrix} R_1(r_1) & R_2(r_1) & \dots & R_n(r_1) \\ R_1(r_2) & R_2(r_2) & \dots & R_n(r_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_1(r_n) & R_2(r_n) & \dots & R_n(r_n) \end{bmatrix}_{(n \times n)} \quad (9)$$

P_m 은 다항기저함수의 모멘트매트릭스이다.

$$P_m = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & \dots & p_m(x_1) \\ 1 & x_2 & y_2 & \dots & p_m(x_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & y_n & \dots & p_m(x_n) \end{bmatrix}_{(n \times m)} \quad (10)$$

a, b 는 각각 방사기저함수, 다항기저함수의 아직 결정되지 않는 상수벡터이다.

$$a^T = \{a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n\} \quad (11)$$

$$b^T = \{b_1 \ b_2 \ \dots \ b_m\} \quad (12)$$

식 (7)의 특이해를 얻기 위해, 제약조건은 다음과 같이 나타낸다.

$$\sum_{i=1}^n p_j(x_i) a_i = P_m^T a = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (13)$$

식 (7)과 식 (13)을 조합하여 다음과 같은 매트릭스형태로 나타낼 수 있다.

$$\tilde{U}_e = \begin{bmatrix} U_e \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_q & P_m \\ P_m^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = G a_0 \quad (14)$$

여기서, 식 (14)의 \tilde{U}_e 는 다음과 같다.

$$\tilde{U}_e = \begin{bmatrix} U_e \\ 0 \end{bmatrix} = \{u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n \ 0 \ 0 \ \dots \ 0\}^T \quad (15)$$

매트릭스 G 의 역행렬이 존재한다면, 다음과 같이 특이해를 구할 수 있다.

$$a_0 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = G^{-1} \tilde{U}_e \quad (16)$$

R_q 의 역행렬은 임의적으로 분포된 절점에 대해 일반적으로 존재하고 국소지지영역에 단지 작은 수(2차원에서 10~40개)의 절점이 있기 때문에 RPIM법의 특이성문제는 발생하지 않는다.

식 (16)을 식 (1)에 대입하면, 보간법은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$u(x) = \{R^T(x) \ P^T(x)\} G^{-1} \tilde{U}_e = \tilde{\Phi}(x) \tilde{U}_e \quad (17)$$

최종적으로, n 개의 필드절점에 대한 RPIM법의 형상함수는 다음과 같다.

$$\Phi^T(x) = \{\phi_1(x) \phi_2(x) \dots \phi_n(x)\} \quad (18)$$

근사함수 $u(x)$ 와 미분은 다음과 같이 나타낸다.

$$u(x) = \Phi^T(x) U_e = \sum_{i=1}^n \phi_i u_i \quad (19)$$

$$u_{,k}(x) = \Phi_{,k}^T(x) U_e \quad (20)$$

k 는 x 또는 y 의 좌표를 나타내고, 콤마는 해당 좌표에 대한 편미분을 의미한다.

2.2 RPIM 형상함수의 수치예제

국부지지영역에서 25절점을 사용한 RPIM법의 형상함수와 형상함수의 미분을 수치해석을 통해 제시한다. 그림 3에서 보여주는 25절점(5×5)은 사각영역 $\{x_i \in \{-1, 1\}, y_i \in \{-1, 1\}\}$ 에서 규칙적으로 분포된다. 그림 4는 MQ-

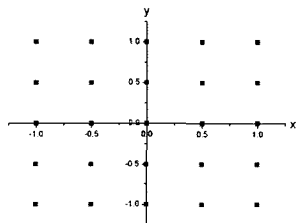


그림 3 필드절점

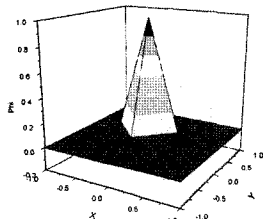


그림 4 RPIM법의 형상함수

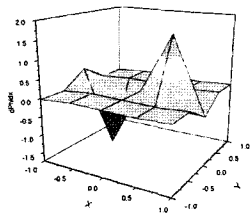


그림 5 x에 관한 1차 미분

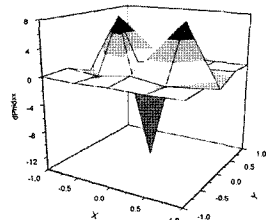


그림 6 x에 관한 2차 미분

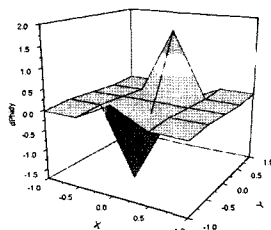


그림 7 y에 관한 1차 미분

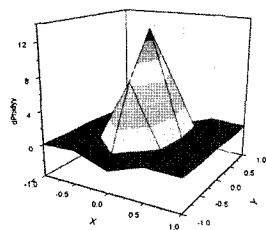


그림 8 y에 관한 2차 미분

RBF 형상함수가 크로네커 델타 성질을 만족한다는 것을 보여 주며, 그림 5~8은 MQ-RBF 형상함수의 미분을 나타낸다. 형상계수로 Liu(2006)에 의해 검증받은 $\alpha_c = 2.0$, $d_c = 0.5$, $q = 0$, 그리고 $m = 0$ 을 사용하였다.

3. RPIM법의 정식화

경계 Γ , 영역 Ω 인 2차원 선형탄성문제에서 고체역학 문제의 편미분방정식과 경계조건은 다음과 같다.

$$\text{평형방정식: } L^T \sigma + b = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (21)$$

$$\text{자연경계조건: } \sigma n = \bar{t} \quad \text{in } \Omega \quad (22)$$

$$\text{필수경계조건: } u = \bar{u} \quad \text{in } \Omega \quad (23)$$

식 (23)의 변분형태 수식은 다음과 같다.

$$\int_{\Omega} (L \delta u)^T (D L u) d\Omega - \int_{\Omega} \delta u^T b d\Omega - \int_{\Gamma} \delta u^T \bar{t} d\Gamma = 0 \quad (24)$$

식 (24)에서 D 는 전체 문제영역 Ω 에 약형식으로 정의된 탄성상수매트릭스이다. 식 (24)를 적분하기 위해서 전체 문제영역은 교차되지 않은 적분 격자로 이산화한다. 문제영역은 변수를 근사화하기 위해 필드절점의 형태로 나타내고 필드절점은 연속적으로 1부터 N 까지 절점번호가 부여된다. RPIM 형상함수는 국부지지영역의 필드절점을 이용한 관심점의 변위를 근사화하는데 사용된다.

$$u_{(2 \times 1)}^h = \sum_I \begin{bmatrix} \phi_I & 0 \\ 0 & \phi_I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_I \\ v_I \end{Bmatrix} = \sum_I \Phi_I u_I \quad (25)$$

Φ_I 는 절점 I 의 형상함수 매트릭스, u_I 는 절점변위, n 은 국부지지영역의 절점 수이다. 식 (25)에서 u^h 는 샘플링포인트(sampling point or quadrature point)가 될 수 있는 관심점의 근사절점이다.

$$\delta u_{(2 \times 1)}^h = \Phi_{(2 \times 2n)} \delta u_{(2n \times 1)} = \sum_I \Phi_I \delta u_I \quad (26)$$

변형률은 변위와의 관계를 이용하여 얻을 수 있다.

$$e_{(3 \times 1)} = L u^h = L_{(3 \times 2)} \Phi_{(2 \times 2n)} u_{(2n \times 1)}$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \dots & \phi_n & 0 \\ 0 & \phi_1 & \dots & 0 & \phi_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ u_n \\ v_n \end{Bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial \phi_n}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \phi_1}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial \phi_n}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial y} & \frac{\partial \phi_1}{\partial x} & \dots & \frac{\partial \phi_n}{\partial y} & \frac{\partial \phi_n}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ u_n \\ v_n \end{Bmatrix} \\
 &= \mathbf{B}_{(3 \times 2n)} \mathbf{u}_{(2n \times 1)} = \sum_I \mathbf{B}_I \mathbf{u}_I \quad (27)
 \end{aligned}$$

\mathbf{B}_I 는 절점 I 의 변형률 매트릭스이고, 구성방정식을 통하여 응력벡터를 구할 수 있다.

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon} = \sum_I \mathbf{D}_{(3 \times 3)}(\mathbf{B}_I)_{(3 \times 3)}(\mathbf{u}_I)_{(2 \times 1)} \quad (28)$$

식 (27)을 식 (24)의 첫 번째 항에 대입하면 다음을 얻을 수 있다.

$$\int_{\Omega} (\mathbf{L}\delta\mathbf{u})^T (\mathbf{D}\mathbf{L}\mathbf{u}) d\Omega = \int_{\Omega} \sum_I \sum_I \delta\mathbf{u}_I^T [\mathbf{B}_I^T \mathbf{D} \mathbf{B}_I] \mathbf{u}_J d\Omega \quad (29)$$

지금 단계까지 I, J 는 국부지지영역에서 절점번호를 부여하였으나, 1부터 절점의 전체번호인 N 까지 국부영역의 절점을 전체영역의 절점으로 각각 바꿀 수 있다.

$$\int_{\Omega} (\mathbf{L}\delta\mathbf{u})^T (\mathbf{D}\mathbf{L}\mathbf{u}) d\Omega = \sum_I \sum_I \delta\mathbf{u}_I^T \underbrace{\left(\int_{\Omega} \mathbf{B}_I^T \mathbf{D} \mathbf{B}_I d\Omega \right)}_{\mathbf{K}_{II}} \quad (30)$$

\mathbf{K}_{II} 는 2×2 의 절점강성매트릭스이다. 또한 식 (25)를 식 (24)의 두 번째 항에 대입하면, 식 (31)이 유도되며,

$$\int_{\Omega} \delta\mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega = \sum_I \delta\mathbf{u}_I^T \underbrace{\int_{\Omega} \Phi_I^T \mathbf{b} d\Omega}_{\mathbf{F}_I^b} \quad (31)$$

\mathbf{b} 는 물체력벡터이고, \mathbf{F}_I^b 는 절점 물체력벡터이다. 식 (31)에서 물체력벡터를 표면력벡터로, 영역을 경계영역으로 대체하여 식 (24)의 마지막 항에 대입하면 식 (32)를 얻을 수 있다.

$$\int_{\Gamma_i} \delta\mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma = \delta\mathbf{U}^T \sum_I \underbrace{\int_{\Gamma_i} \Phi_I^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma}_{\mathbf{F}_I^t} = \delta\mathbf{U}^T \mathbf{F}^t \quad (32)$$

\mathbf{F}_I^t 는 절점 표면력벡터이고, \mathbf{F}^t 는 절점 표면력벡터를 이용하여 취합한 전체 표면력벡터이다.

식 (30), 식 (31)과 식 (32)를 평형방정식의 변분형태인 식 (24)에 대입하면 다음과 같고, 여기에서

$$\delta\mathbf{U}^T [\mathbf{K}\mathbf{U} - \mathbf{F}^b - \mathbf{F}^t] = 0 \quad (33)$$

$\delta\mathbf{U}$ 는 임의적이기 때문에 식 (33)은 다음을 만족한다.

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F}^b + \mathbf{F}^t \quad (34)$$

무요소 RPIM법의 이산화방정식은 최종적으로 다음과 같이 표현된다.

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (35)$$

절점변위는 변위경계조건을 만족시켜 구할 수 있고, 변형률과 응력은 절점변위를 구한 후 식 (27), 식 (28)을 통해 각각 얻을 수 있다.

4. 무요소법 프로그래밍과 흐름도

4.1 RPIM법의 형상함수 수치해석 과정

그림 9와 같이 수치해석 과정에서 메인함수는 방사기저함수를 이용하여 무요소 RPIM법의 형상함수와 형상함수의 미

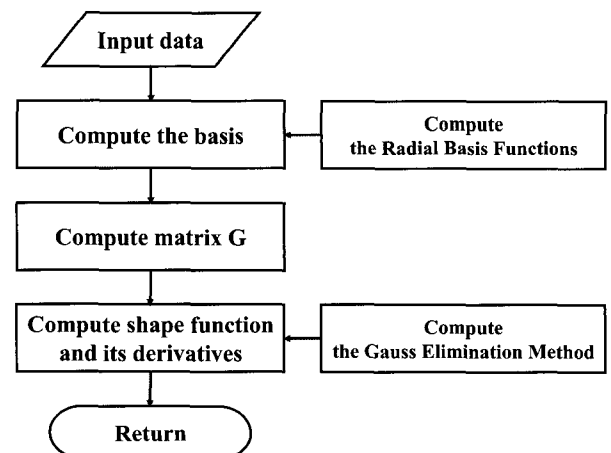


그림 9 RPIM 형상함수의 흐름도

분값을 계산한다. 방사기저함수를 포함한 서브루틴은 방사기저함수와 미분값을 해석하고 앞장에서 언급한 MQ-RBF, EXP-RBF, TPS-RBF 함수를 활용한다.

4.2 무요소 RPIM법의 수치해석 과정

그림 10은 무요소 RPIM법의 수치해석 과정 흐름도이고 분석 절차는 다음과 같다.

- (1) 문제영역의 기하학적 형태를 구성하고 입력데이터를 통해 필드절점을 생성시킨다.
- (2) 적분격자(Background cells)를 수치적분과정에 사용한다.
- (3) 매트릭스는 2개의 루프로 조합된다.
이 때, 외부 루프는 모든 적분격자, 내부 루프는 격

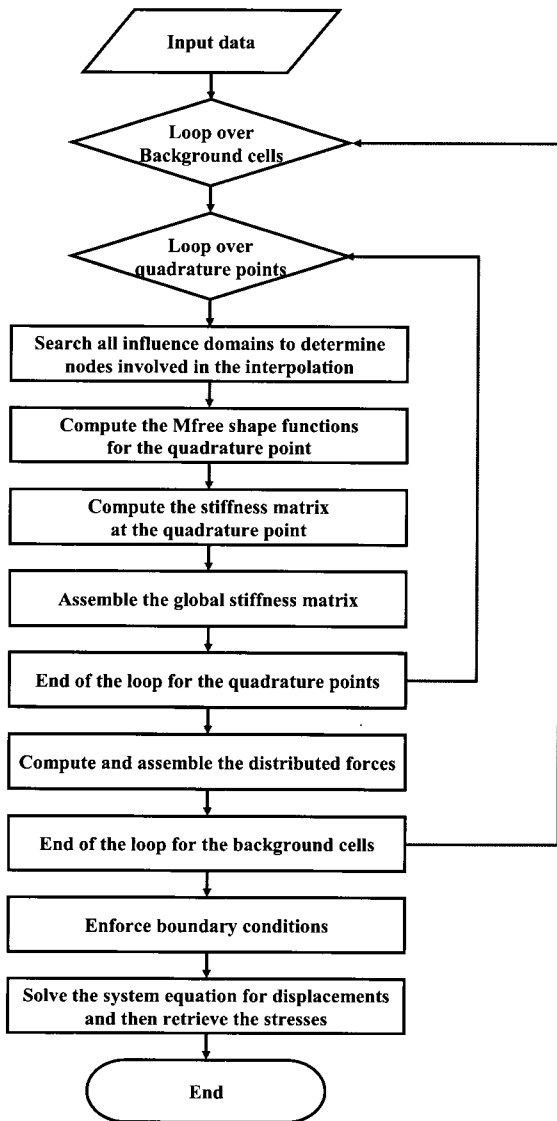


그림 10 무요소 RPIM법의 흐름도

자의 샘플링포인트를 해석한다.

- (4) 2개의 루프가 해석된 후 경계조건을 만족시킨다.
- (5) 이산화방정식은 가우스소거법을 이용한다.
- (6) 최적해(응력, 변형률, 변위)를 분석한다.

5. 해석모델 및 수치해석

5.1 해석모델1 - 캔틸레버형 평판

무요소 RPIM법의 신뢰성을 검증하기 위해 캔틸레버형 평판을 해석대상으로 고려한다. 본 연구에서 해석모델의 단위는 국제단위계(The International System of Units)를 사용한다. 그림 11과 같이 왼쪽부분이 고정단인 캔틸레버형 평판을 모델링하고 평면 응력상태로 가정한다. 평판의 길이 $L = 48$, 높이 $H = 12$ 그리고 두께는 단위두께(unit)이다. 변수로 하중 $p = 1000$, 탄성계수 $E = 3.0 \times 10^7$ 그리고 푸

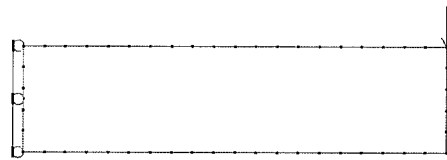


그림 11 캔틸레버형 평판 모델링

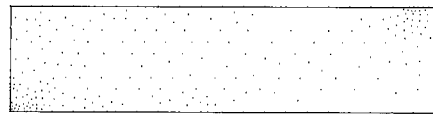


그림 12 무요소법의 필드절점

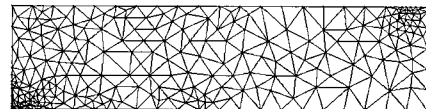


그림 13 무요소법의 적분격자

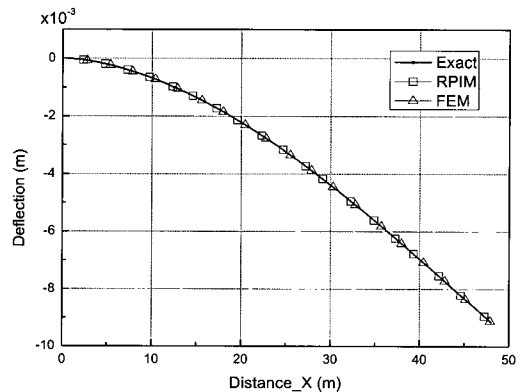


그림 14 중립축에서의 Y방향 처짐

아송 비 $\nu = 0.3$ 이다.

그림 12는 RPIM법의 해석과정에 사용된 272개의 불규칙한 필드절점, 그림 13은 수치적분을 위한 472개의 적분격자이다. 무요소 RPIM법과 유한요소법을 식 (36)의 처짐에 관한 이론 해와 비교한 결과, 그림 14와 같이 동일한 처짐결과로 나타나 무요소 RPIM법의 신뢰성이 검증되었다.

$$v(x,y) = \frac{P}{6EI} \left[3\nu y^2(L-x) + (4+5\nu) \frac{D^2x}{4} + (3L-x)x^2 \right] \quad (36)$$

5.2 해석모델2 - 유공평판

그림 15와 같이 x 축 단일방향의 인장하중이 작용하는 유공평판문제를 해석대상으로 고려해보자. 해석모델을 그림 16과 같이 대칭성을 이용하여 평판의 상단 오른쪽 부분의 평판만 모델링하고 평면 응력으로 해석한다. 변수로 하중 $p = 1$, 탄성계수 $E = 1.0 \times 10^3$, 푸아송 비 $\nu = 0.3$, 원형 홀의 반경 $a = 1.0$ 그리고 평판의 길이 $b = 5$ 이다.

경계조건은 $x = 0, y = 0$ 에 다음의 조건을 만족한다.

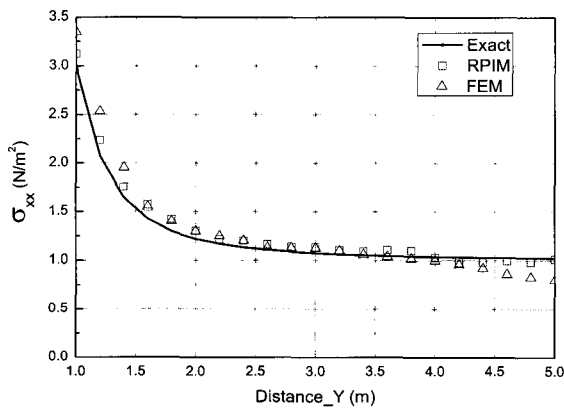


그림 15 $x=0$ 에서의 σ_{xx}

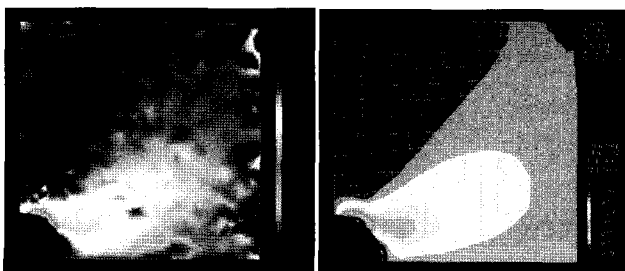


그림 16 무요소법(σ_{xv})

그림 17 유한요소법(σ_{xy})

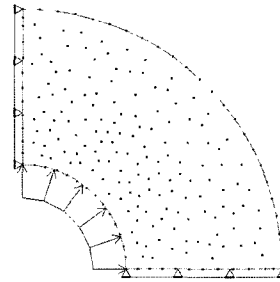


그림 18 원통 모델링

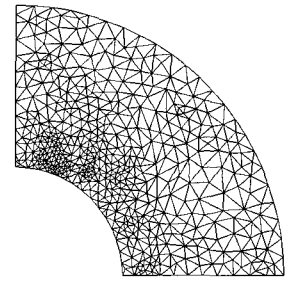


그림 19 절점과 적분격자

$$\begin{aligned} u_x = 0, \quad \sigma_{xy} = 0 \quad (x = 0), \\ u_y = 0, \quad \sigma_{xy} = 0 \quad (y = 0) \end{aligned} \quad (37)$$

수평, 수직방향의 경계조건은 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} = p, \quad \sigma_{yy} = \sigma_{xy} = 0 \quad (x = 5), \\ \sigma_{xx} = 0, \quad \sigma_{yy} = \sigma_{xy} = 0 \quad (y = 5) \end{aligned} \quad (38)$$

그림 17은 $x = 0$ 에서의 응력분포(σ_{xx}), 그림 18~19는 유공평판의 전단응력을 나타낸 것이다. 해석결과, 유공평판 문제에서도 두가지 수치해석법은 만족할 만한 결과를 보여주었으며, 정해와 비교한 결과 응력집중 범위에서 무요소 RPIM법과 유한요소법은 각각 4.17%, 7.89%, 6.54%와 11.67%, 22.28%, 18.67%의 오차로 무요소 RPIM법이 신뢰성 있는 결과를 제시하는 것으로 나타났다.

5.3 해석모델3 - 속이 빈 원통

안쪽 반지름과 바깥쪽 반지름이 각각 $a = 10, b = 25$ 인 원통에 외압은 작용하지 않고 내압 $p = 100$ 이 작용하는 원통의 응력을 고려해보자. 그림 20과 같이 대칭성을 이용하여 평판의 상단 오른쪽 부분의 평판만 모델링한다. 원통의 응력해석은 평면 변형률 문제로 가정하고 변수로 탄성계수 $E = 3.0 \times 10^7$, 푸아송 비 $\nu = 0.3$ 이다. 그림 21는 무요소 RPIM법의 해석과정에 사용된 533개의 불규칙한 필드절점과 수치적분을 위한 994개의 적분격자이다.

$$u_r = \frac{pa^2}{E(b^2 - a^2)r} [(1 - \nu)r^2 + (1 + \nu)b^2] \quad (39)$$

$$\sigma_r = \frac{a^2p}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right) \quad (40)$$

$$\sigma_\theta = \frac{a^2p}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right) \quad (41)$$

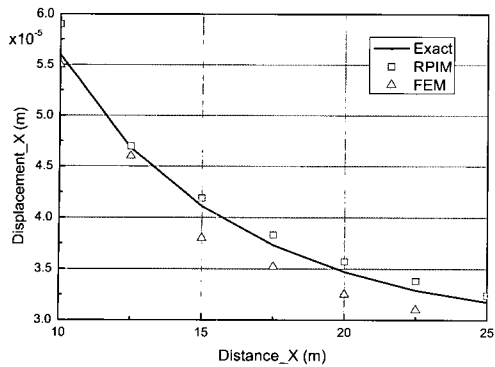


그림 20 $x=0$ 에서의 변위

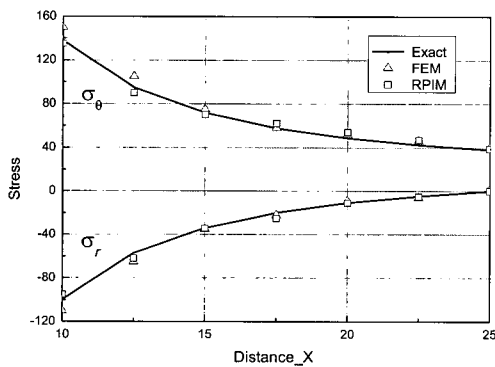


그림 21 $x=0$ 에서의 응력(σ_r, σ_θ)



그림 22 무요소법(σ_{xx})

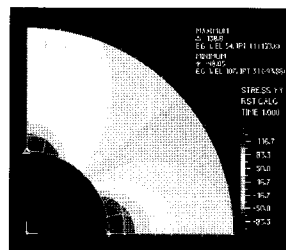


그림 23 유한요소법(σ_{xx})



그림 24 무요소법(σ_{yy})

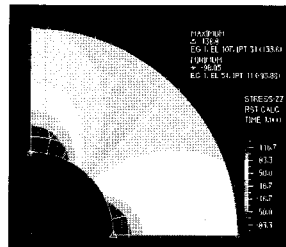


그림 25 유한요소법(σ_{yy})



그림 26 무요소법(σ_{xy})

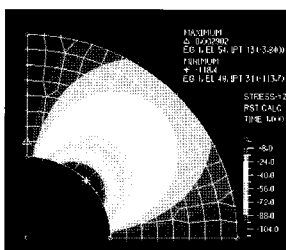


그림 27 유한요소법(σ_{xy})

그림 22는 $x=0$ 에서의 변위, 그림 23은 $x=0$ 에서의 응력(σ_r, σ_θ)을 나타낸다. 해석결과, 속이 빈 원통문제에 서두가지 수치해석법은 신뢰할 만한 결과를 보여주었으며, 식 (39~41)의 이론 해와 비교한 결과 내압이 작용하는 부분에서 무요소 RPIM법과 유한요소법은 변위에 대해서 각각 5.3%와 1.78%의 오차, 응력(σ_r, σ_θ)에 대해서는 4.76%, 2.0%와 10.3%, 8.9%의 오차를 나타낸다. 그림 24~29는 무요소 RPIM법과 유한요소법의 x, y 좌표계에서의 응력분포이다.

6. 결 론

본 연구에서는 무요소법 중 RPIM법을 소개하였고 구조 요소의 응력해석을 위해 캔틸레버형 평판, 유공평판, 속이 빈 원통문제를 수치해제로 이론 해, 유한요소법과 비교, 검토하였으며 주요 연구 결과를 정리하면 다음과 같다.

- (1) 무요소 RPIM법에 의한 해의 정도를 검증하기 위하여 이론 해와 유한요소법의 근사해석결과를 비교, 분석하였으며, 캔틸레버형 평판을 해석한 결과, 정해와 매우 근사한 처짐결과를 나타내어 무요소 RPIM법의 신뢰성이 증명되었다.
- (2) 유공평판문제에서 신뢰할 만한 결과를 나타내었으며, 응력집중 범위 내에서 무요소 RPIM법은 4.17~7.89%, 유한요소법은 11.67~22.28%의 오차로 무요소 RPIM법이 효과적인 수치해석법임이 검증되었다.
- (3) 내압만 작용하는 속이 빈 원통형 문제에서도 만족할 만한 결과를 나타내었으며, 하중이 작용하는 원통 내면의 응력을 정해와 검토한 결과 무요소 RPIM법은 최대 4.76%, 유한요소법은 10.3%의 오차로 안정적인 해석결과임이 증명되었다.

감사의 글

본 연구는 2005년 한국건설교통기술평가원(과제번호 : 05건설핵심C02)의 연구비 지원으로 이루어진 것으로, 이에 감사의 의를 표합니다.

참 고 문 헌

- 최창근(2002) 유한요소법, 테크노프레스, 대한민국, p.650.
 Hardy R.L.(1990) Theory and Applications of the Multiquadrics-Biharmonic Method, *Computers & Mathematics with Applications*, 19, pp.163~

208.

Liu G.R., Gu, Y.T.(2001a) A matrix triangularization algorithm for point interpolation method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192(19), pp.2269~2295.

Liu, G.R.(2006) An Intriduction to Meshfree Methods and their Programming, Springer Company, New York.

Liu, G.R.(2002) Mesh Free Methods Moving beyond the Finite Element Method, CRC Press Company, New York.

Timoshenko, S.P., Goodier J.N.(1970) Theory of Elasticity, McGraw-Hill Company, New York.

Timoshenko, S.P., Woinowsky K.(1959) Theory of Plates and Shells, McGraw-Hill Company, New York.