

# 탄성균열해석을 위한 그리드 없는 유한차분법

## A Gridless Finite Difference Method for Elastic Crack Analysis

윤 영 철† 김 동 조\* 이 상 호\*\*

Yoon, Young-Cheol Kim, Dong-Jo Lee, Sang-Ho

(논문접수일 : 2007년 2월 26일 ; 심사종료일 : 2007년 5월 11일)

### 요 지

본 연구는 탄성균열문제를 신속하고 정확하게 해석할 수 있는 새로운 개념의 그리드(grid) 없는 유한차분법을 제시한다. 이동최소제곱법을 이용한 Taylor 전개식 구성을 통해 직접적인 미분계산 없이 근사함수와 그 미분을 손쉽게 계산한다. 그리드로 인한 절점 간의 종속성이 없어 해석영역 내의 불연속면 모델링이 용이하여 차분식 구성시 균열로 인한 불연속 효과를 고려하는 과정도 자연스럽다. 유한차분법에 근간을 두고 있어 지배 미분방정식을 직접 이산화하기 때문에 수치적분이 필요한 수치기법에 비해 계산속도도 빠르다. 모드 I 과 모드 II 균열문제 해석을 통해 본 해석기법이 정확하고 효율적으로 응력확대계수를 계산할 수 있음을 보였다.

**핵심용어** : 탄성균열, 그리드, 유한차분법, Taylor 전개, 이동최소제곱법

### Abstract

This study presents a new gridless finite difference method for solving elastic crack problems. The method constructs the Taylor expansion based on the MLS(Moving Least Squares) method and effectively calculates the approximation and its derivatives without differentiation process. Since no connectivity between nodes is required, the modeling of discontinuity embedded in the domain is very convenient and discontinuity effect due to crack is naturally implemented in the construction of difference equations. Direct discretization of the governing partial differential equations makes solution process faster than other numerical schemes using numerical integration. Numerical results for mode I and II crack problems demonstrates that the proposed method accurately and efficiently evaluates the stress intensity factors.

**Keywords** : elastic crack, grid, finite difference method, taylor expansion, moving least squares method

## 1. 서 론

유한요소법, 유한차분법, 경계요소법과 경쟁할 수 있는 무요소법(meshfree method 또는 particle method)의 형태를 갖는 수치기법이 Belytschko 등(1994)에 의해 Element-free Galerkin(EFG)법 이란 명칭으로 처음 소개되었다. 요소망(mesh) 또는 그리드(grid)의 구성이 필요 없는 무요소법은 해석영역 내에 불연속면을 갖는 균열문제의 모델링 측면에서 유한요소법의 대안이 될 수 있으나 형상함수와 그 미분의 계산비용이 크고 필수경계조건 처리가 어렵다는 단점이 있다. 무요소법의 단점으로 지적돼온 계산효율성을 높여려는 시도로

서 Luo와 Häussler-Combe(2002)가 제안한 일반화된 무요소 유한차분법은 수치적분을 배제하여 계산시간을 절약했으나, 형상함수를 직접 미분하는 과정이 비효율적이어서 공학문제에 적용하는데 많은 어려움이 있다. Oñate 등(2001)은 콜로케이션법(collocation method) 기반의 finite point법을 제안하고 탄성문제에 적용하였으나, 역시 무요소 근사함수를 직접 고차미분 해야 하는 비효율성과 절점 위에서만 함수값을 계산할 수 있는 제약 때문에 그 적용이 매우 제한적이다. 최근에는 Galerkin 정식화에 근거한 무요소법과 차별되는 콜로케이션 정식화에 근거한 무요소 해석기법들이 제안되었다(Kim, 2003; Lee 등, 2004). 이 기법들은 전체 계방정식의 구성과

† 책임저자, 정회원 · 명지전문대학 토목과 조교수  
Tel: 02-300-1135 ; Fax: 02-303-1132  
E-mail: ycyoon@mjc.ac.kr

\* 정회원 · 연세대학교 사회환경시스템공학부 박사과정

\*\* 정회원 · 연세대학교 사회환경시스템공학부 교수

• 이 논문에 대한 토론을 2007년 8월 31일까지 본 학회에 보내주시면 2007년 10월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

형상함수의 미분계산에 있어서 계산효율을 효과적으로 향상시켰다는 점에서 의미있다. 국내에서는 윤영철 등(2005a, 2005b)이 강형식(strong form)에 근거한 무요소법의 성능을 Galerkin 정식화에 근거한 무요소법의 성능과 비교, 분석한 연구를 수행하였다.

유한차분법은 차분식의 구성시 정형적인 그리드 구조에 매우 의존적이기 때문에 균열이나 계면경계와 같은 불연속 문제에 적합한 수치기법이라 말하기 어렵다. 그러나 Tu와 Peskin (1992)이 IBM(Immersed Boundary Method)이라 명명된 유한차분법 근간의 해석기법을 개발하고 다양한 불연속 문제를 해결함으로써 불연속 문제 해결을 위한 유한차분법 개발이 활기를 띠게 되었다. LeVeque과 Li(1994)는 IBM 보다 성능이 우수한 IIM(Immersed Interface Method)라 불리는 유한차분 개념의 불연속 해석기법을 개발하고 현재까지 다양한 수학, 의학, 생명공학, 과학분야의 문제들에 활발하게 적용하고 있다. (Li, 1998; Li 등, 2001; Lai 등, 2006)

본 연구는 적분방정식의 도입 없이 지배 미분방정식을 직접 이산화하는 그리드 없는 유한차분법을 제시한다. 이동최소제곱법(moving least squares method)에 근거한 Taylor 전개를 통해 절점 만으로 근사함수 및 차분식을 계산하고 전체 계방정식을 구성함으로써 지배방정식을 직접 이산화한다. 본문을 통하여 고체역학 문제 특히 불연속면을 갖는 균열전파문제를 정식화하고 수치해석하여 제시한 해석기법의 강건성, 정확성, 효율성을 검증한다.

## 2. Taylor 전개를 이용한 차분식의 구성

미분 가능한 함수  $u(x) \in C^m(\bar{\Omega})$ 가 주어졌을 때, 한 점  $\bar{x}$ 를 기준으로  $u(x)$ 의 Taylor 급수 전개는 다음과 같다.

$$u(x) = \sum_{|\beta| \leq m} \frac{(x - \bar{x})^\beta}{\beta!} D_x^\beta u(\bar{x}) + R_m(x, \bar{x}) \quad (1)$$

여기서  $\beta! := \prod_{i=1}^n \beta_i!$ ,  $|\beta| := \sum_{i=1}^n \beta_i$ 이다.  $R_m(x, \bar{x})$ 은  $m$ 차 이상의 차수를 갖는 잔차항들이다. 잔차항을 무시할 때 미분계수  $D_x^\beta u(\bar{x})$ 는 식 (1)을  $x$ 에 대해 미분한 후  $x$ 를  $\bar{x}$ 로 치환해서 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$D_x^\beta u(\bar{x}) := D_x^\beta u(x) \Big|_{x=\bar{x}} \quad (2)$$

이때,  $D_x^\beta$ 는 multi-index로 표현된 미분연산자로서

$$D_x^\alpha f := \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \quad (3)$$

로 정의된다. 잔차항을 제외한 Taylor 급수의 다항식  $u_m(x)$ 은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} u_m(x) &= u(\bar{x}) + (x - \bar{x}) D_x^{(1,0)} u(\bar{x}) + \dots + (x - \bar{x})^m \frac{D_x^{(0,\dots,m)} u(\bar{x})}{m!} \\ &= \sum_{|\beta| \leq m} (x - \bar{x})^\beta \frac{D_x^\beta u(\bar{x})}{\beta!} \end{aligned} \quad (4)$$

위 식을 Taylor 다항식이라 부른다. 1차원의 경우 Taylor 다항식은 다음과 같이 간단히 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} u_m(x) &= u(\bar{x}) + (x - \bar{x}) u'(\bar{x}) + \frac{(x - \bar{x})^2}{2!} u''(\bar{x}) + \dots \\ &\quad + \frac{(x - \bar{x})^m}{m!} u^{(m)}(\bar{x}) \end{aligned} \quad (5)$$

Taylor 다항식은 무요소법에서 일반적으로 정의하는 국소 근사함수(local approximation)와 유사한 형태를 갖는다. 2차원 경우, 국부중심  $\bar{x}$ 에 대한 무요소 근사함수 식 (6)은  $m$ 차 Taylor 다항식 식 (4)와 동등한 형태를 취한다.

$$u_x^m(x) = p_m^T (x - \bar{x}) a(\bar{x}) \quad (6)$$

여기서  $p_m^T (x - \bar{x})$ 는 다항식 기저이며, 미지의 계수벡터는

$$a(\bar{x}) = \left( D_x^{(0,0)} u(\bar{x}), D_x^{(1,0)} u(\bar{x}), \dots, \frac{1}{m!} D_x^{(0,m)} u(\bar{x}) \right)^T \quad (7)$$

이고, 각 성분은 Taylor 급수의 계수를 해당 미분차수  $\beta!$ 로 나눈 것과 같다. 좀 더 일반화하여  $x$ 와  $\bar{x}$  사이의 거리를 조절할 수 있는 팽창계수  $\rho$ 를 도입하면, 식 (4)와 식 (6)은

$$p_m^T \left( \frac{x - \bar{x}}{\rho} \right) a(\bar{x}) = \sum_{|\beta| \leq m} \left( \frac{x - \bar{x}}{\rho} \right)^\beta \frac{\rho^{|\beta|}}{\beta!} D_x^\beta u(\bar{x}) \quad (8)$$

의 관계가 있다.

Taylor 다항식의 미분계수는 이동최소제곱법(Moving Least Squares Method)을 통하여 계산한다. 따라서 기존의 유한차분법에서 필수적인 그리드 구조는 필요치 않다. 이동최소제곱법을 이용하여 구한 미분계수를 통해 실제로 근사함수를 미분하지 않고도 각 절점에서 미분값을 구성할 수 있다. 근사함수의 미분계산 비용이 많이 소요되는 기존의 무요소법과 차별될 수 있는 점이다. 차분식 계산범위 내의 절점집합  $\Lambda_x$ 에

대해 이산화된 잔차방정식을 식 (9)와 같이 구성한다.

$$J := \sum_{I \in \Lambda_{\bar{x}}} w(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \left( \mathbf{p}_m^T(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \mathbf{a}(\bar{\mathbf{x}}) - u_I \right)^2 \quad (9)$$

여기서  $u_I$ 는 절점계수이다. 가중함수  $w(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})$ 는 미분계산과 연관이 없기 때문에 임의로 선택할 수 있다. 본 연구에서는 식 (10)과 같이 4차 다항식과 지수함수 형태의 미분이 불가능한 가중함수를 적용하였다.

$$w(r) = (1 - |r|)^4, \quad w(r) = \exp(-|r|/\kappa) \quad \text{for } |r| \leq 1 \quad (10)$$

식 (9)에 stationary 조건  $\delta J / \delta a = 0$ 을 적용하면, 다음과 같은 정규방정식(normal equation)을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{M}(\bar{\mathbf{x}}) \mathbf{a}(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{C}(\bar{\mathbf{x}}) \mathbf{U} \quad (11)$$

여기서  $\mathbf{U} = (u_1, u_2, \dots, u_N)^T$ ,  $\mathbf{C}(\bar{\mathbf{x}}) = (w(\mathbf{x}_1 - \bar{\mathbf{x}}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_1 - \bar{\mathbf{x}}), \dots, w(\mathbf{x}_N - \bar{\mathbf{x}}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_N - \bar{\mathbf{x}}))$  이고, 모멘트 행렬은

$$\mathbf{M}(\bar{\mathbf{x}}) = \sum_{I \in \Lambda_{\bar{x}}} w(\mathbf{x}_I - \bar{\mathbf{x}}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_I - \bar{\mathbf{x}}) \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_I - \bar{\mathbf{x}}) \quad (12)$$

이다. 식 (11)을 정리하면 Taylor 다항식의 미분계수들로 구성된  $\mathbf{a}(\bar{\mathbf{x}})$ 를 얻을 수 있다.

$$\mathbf{a}(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{M}^{-1}(\bar{\mathbf{x}}) \mathbf{C}(\bar{\mathbf{x}}) \mathbf{U} \quad (13)$$

결과적으로 위의 계산과정은 일반적인 이동최소제곱법의 계산과정과 동일하다. 2차원의 경우, 이렇게 얻어진 Taylor 다항식의 계수 중  $u(\bar{\mathbf{x}})$ 는  $\bar{\mathbf{x}}$ 에서  $u(\mathbf{x})$ 의 매우 좋은 근사함수가 되고,  $D_x^{(1,0)} u(\bar{\mathbf{x}})|_{\bar{\mathbf{x}}=\mathbf{x}}$ 는  $x$ 에 대한 1차미분,  $D_x^{(0,2)} u(\bar{\mathbf{x}})|_{\bar{\mathbf{x}}=\mathbf{x}}$ 는  $y$ 에 대한 2차미분에 대한 좋은 근사가 된다.  $\mathbf{a}(\bar{\mathbf{x}})$ 의 lexicographical 순서상의  $\alpha$  차 성분은 Taylor 전개식의  $\alpha$  차 미분계수와 다음과 같이 연관된다.

$$\mathbf{a}(\bar{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{e}_\alpha = D_x^\alpha u(\bar{\mathbf{x}}) \quad (14)$$

여기서  $\mathbf{e}_\alpha$ 는  $\alpha$  차 성분이 1인 단위벡터이다.

해석영역 내에 균열이 존재하는 경우에도 그림 1과 같이 균열 반대편의 절점을 차분식 구성에서 배제시키는 간단한 조작을 통해 불연속면 효과를 해석에 반영할 수 있다. 차분식이 그리드 구조와 연관되지 않기 때문에 임의로 존재하는 불연속면의 모델링 방법이 간단하다. 또한, 기존의 유한차분법은 차분

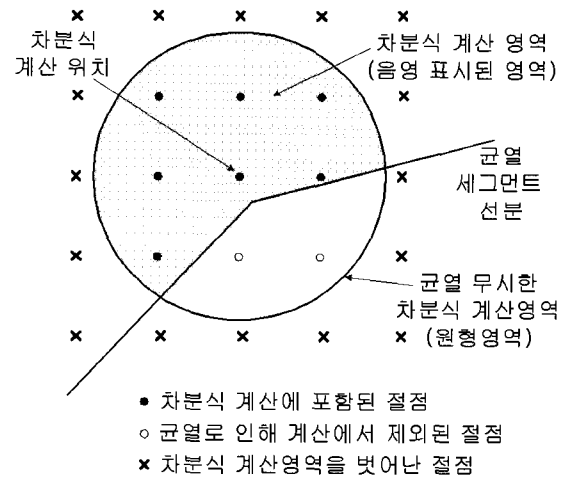


그림 1 균열이 존재하는 차분식 계산영역의 절점 구분

식 구성을 위해 그리드가 필요하고 근사함수(approximation function)가 없지만, 본 해석기법은 그리드 없이 절점만으로 근사함수와 그 미분 계산이 가능하다.

그리드 없는 유한차분법에서 흥미로운 점은 절점계수(nodal parameter,  $u_I$ )와 절점해(nodal solution,  $u(\mathbf{x}_I)$ )의 관계이다. Galerkin 정식화에 근거한 기존의 무요소법에서 전체 계방정식을 풀어서 얻어지는 절점계수는 절점해와 일치하지 않는다. 그 이유는 무요소법의 형상함수( $\Phi$ )가 Kronecker delta 특성( $\Phi_I(\mathbf{x}_J) \neq \delta_{IJ}$ )을 만족시키지 못하고, 무요소 근사함수가 다항식이 아니어서 정확하게 수치적분 할 수 없고, 강제적인 필수경계조건 처리로 오차가 발생하는 등 여러 가지가 있다. 결국, 이것은 절점에서 절점계수를 해(solution)로 사용할 수 없게 하며, 절점해를 구하기 위해 근사함수를 다시 한번 구성해야 하는 불편함을 야기시킨다. 그러나 본 연구의 수치기법에서는 근본적으로 유한차분법과 동등한 개념에서 출발하기 때문에 절점계수와 절점해가 정확하게 일치하므로 즉,  $u(\mathbf{x}_I) = u_I$  이므로 절점에서 근사함수를 재구성할 필요가 없이 절점계수를 그대로 절점해로 사용할 수 있다.

### 3. 이산화된 차분식 시스템의 구성

고체역학 문제에서 지배방정식은 응력  $\sigma$ 와 체적력  $b$ 를 이용하여 다음과 같이 표현한다.

$$\nabla \cdot \sigma + b = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (\text{평형방정식}) \quad (15)$$

$$\sigma \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{on } \partial\Omega, \quad (\text{자연경계조건}) \quad (16)$$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{on } \partial\Omega_u, \quad (\text{필수경계조건}) \quad (17)$$

여기서  $\mathbf{n}$  은 자연경계  $\partial\Omega_i$ 에서의 단위수직벡터이고,  $\bar{\mathbf{t}}$  은 규정된 표면력이다. 표면력 0(traction free) 조건을 갖는 균열면도  $\partial\Omega_i$ 에 포함된다.

차분식 구성을 위해 평형방정식과 자연경계조건을 변위  $\mathbf{u}$  만의 함수로 다시 표현하면 다음과 같다.

$$(\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu\nabla^2 \mathbf{u} = -\mathbf{b} \text{ in } \Omega \quad (18)$$

$$2\mu(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \cdot \mathbf{n} + \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \text{ on } \partial\Omega_i \quad (19)$$

여기서  $\mathbf{I} = \delta_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$  이며,  $\lambda$  및  $\mu$  는 Lamé 상수이다. 필수 경계조건은 변형 없이 사용 가능하다. 2차원 문제의 경우 절점이 포함된 영역이 내부영역인지 경계영역인지에 따라 식 (18), 식 (19), 식 (17)을 각각 이산화하면 각 절점에서 차분식을 다음과 같이 구성할 수 있다.

$$(\lambda + \mu) \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u_x(\mathbf{x}_I)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u_y(\mathbf{x}_I)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 u_x(\mathbf{x}_I)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 u_y(\mathbf{x}_I)}{\partial y^2} \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u_x(\mathbf{x}_I)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u_x(\mathbf{x}_I)}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 u_y(\mathbf{x}_I)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u_y(\mathbf{x}_I)}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b_x(\mathbf{x}_I) \\ -b_y(\mathbf{x}_I) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_I \in \Omega \quad (20)$$

$$\mu \begin{bmatrix} 2 \frac{\partial u_x(\mathbf{x}_J)}{\partial x} n_x + \frac{\partial u_y(\mathbf{x}_J)}{\partial x} n_y + \frac{\partial u_x(\mathbf{x}_J)}{\partial y} n_y \\ 2 \frac{\partial u_y(\mathbf{x}_J)}{\partial y} n_y + \frac{\partial u_x(\mathbf{x}_J)}{\partial y} n_x + \frac{\partial u_y(\mathbf{x}_J)}{\partial x} n_x \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x(\mathbf{x}_J)}{\partial x} n_x + \frac{\partial u_y(\mathbf{x}_J)}{\partial y} n_x \\ \frac{\partial u_x(\mathbf{x}_J)}{\partial x} n_y + \frac{\partial u_y(\mathbf{x}_J)}{\partial y} n_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{t}_x(\mathbf{x}_J) \\ \bar{t}_y(\mathbf{x}_J) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_J \in \Gamma_t \quad (21)$$

$$\begin{bmatrix} u_x(\mathbf{x}_K) \\ u_y(\mathbf{x}_K) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{u}_x(\mathbf{x}_K) \\ \bar{u}_y(\mathbf{x}_K) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_K \in \Gamma_u \quad (22)$$

유한차분법이나 유한요소법은 알고 있는 필수경계값을 계 방정식에 직접 넣어 전체 계 방정식의 계산에서 제외하지만, 본 해석기법에서는 식 (22)에서 보듯이 필수경계조건인 경우도 평형방정식이나 자연경계조건과 같이 차분식을 따로 구성했음을 주의할 필요가 있다.

본 연구에서 차분식을 구성하는 방법은 점별 콜로케이션법(point collocation method)에서 잔차식(residual equation)을 구성하는 방법과 동등하다. 점별 콜로케이션법은 가중잔차법(weighted residual method)에서 가중함수를 kronecker delta 함수로 취하여 잔차식을 유도한 것이고,

이것은 미분방정식을 직접 이산화한 차분식과 동일하다. 다만, 본 해석기법은 기존의 유한차분법과 달리 근사함수를 갖고 있기 때문에 임의의 위치에서 해(solution)와 그 미분의 계산이 용이하고, 이동최소제곱법에 근거한 그리드에 의존적이지 않은 특성 때문에 해석대상의 복잡한 기하형상이나 불연속면의 존재여부와 상관없이 차분식의 구성이 제약되지 않는다. 결과적으로 그리드 없는 유한차분법은 Galerkin법에 근거한 무요소법의 단점뿐 아니라 유한차분법의 단점도 동시에 보완할 수 있는 매우 유용한 특성을 갖고 있다.

#### 4. 수치 예제

##### 4.1 원공을 갖는 무한판

중심에 원공을 갖고 수평방향으로 원거리 단위하중을 받는 그림 2와 같은 무한판 문제를 고려한다. 응력에 대한 이론해는 Timoshenko와 Goodier(1970)를 참고할 수 있다. 평면 응력상태를 가정했고,  $E = 10,000 \text{ psi}$ ,  $\nu = 0.3$  이다.

원공은  $x = 0$ ,  $y = a$ 에서 응력집중계수 3의 크기를 갖는 응력집중을 유발시킨다. 그림 3(a)를 보면, 224개의 절점을 사용하여 계산된 응력 profile이 이론해와 잘 일치하고 있다. 68, 224, 806개의 절점을 사용한 모델에 대해 수렴률을 조사했다. 2차, 3차, 4차 Taylor다항식을 사용하는 경우에 변위에 대한  $L_2$  놈과 에너지 놈 오차의 수렴률을 그림 3(b)에 도시하였으며, 다항식의 차수가 높아질수록 수렴률이 높아지는 것을 볼 수 있다. 본 연구에서 제시한 해석기법이 매우 높은 수렴률을 보인다는 것을 알 수 있다.

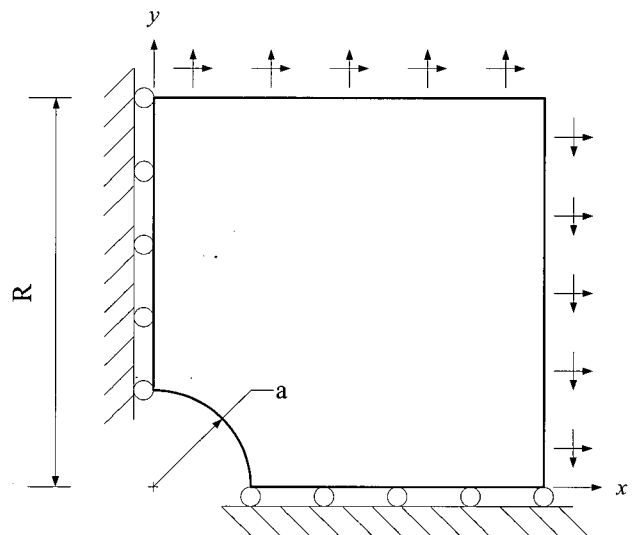
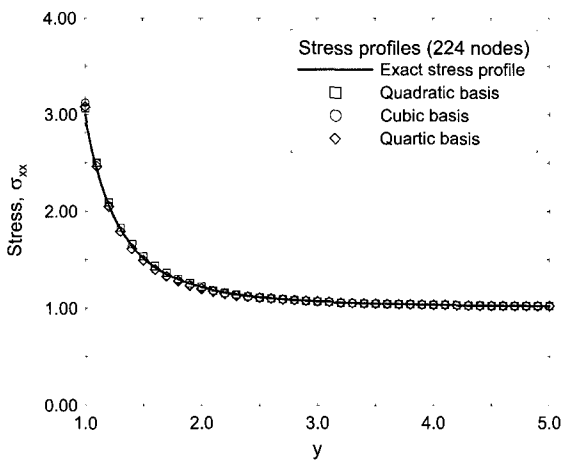
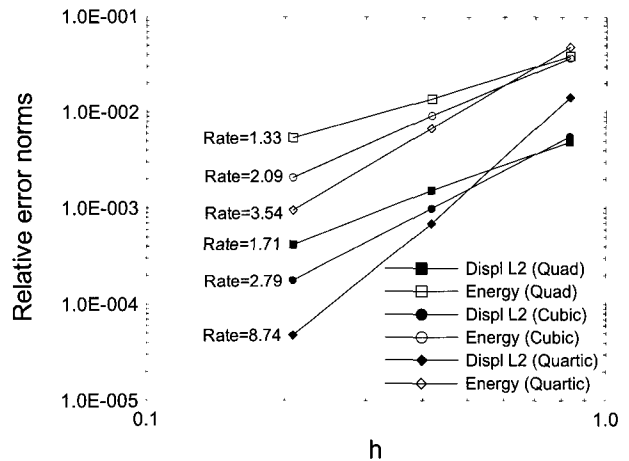


그림 2 원공을 갖는 무한판과 (1/4 모델,  $a=1$ ,  $R=5$ )



(a) 응력분포도 (224개의 절점 사용)



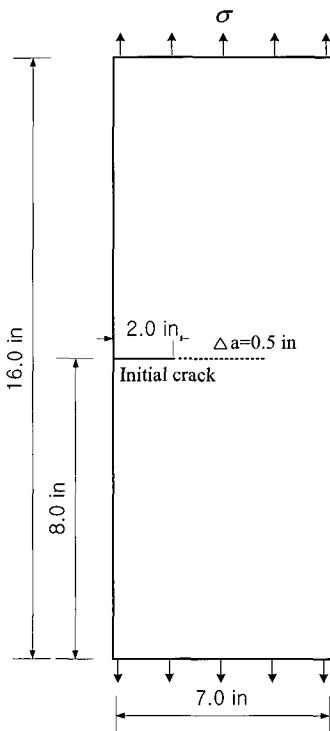
(b) 변위와 에너지 놈에 대한 상대오차의 수렴률 (2차, 3차, 4차 다항식 기저 사용)

그림 3 원공주변 응력과 수렴률

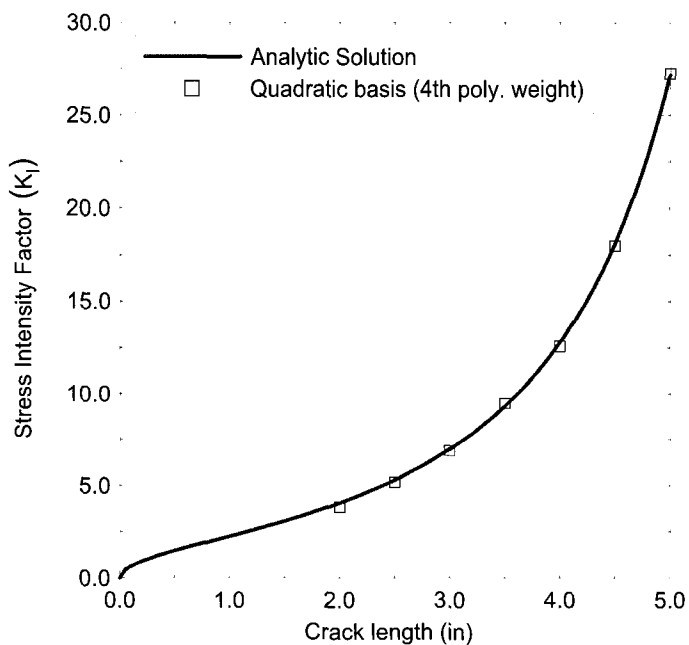
### 4.2 인장하중을 받는 균열의 성장

그림 4(a)와 같이 인장하중 ( $\sigma_y = 1 \text{ psi}$ )을 받는 판부재에 존재하는 편축균열이 성장하는 경우를 고려한다(평면응력,  $E = 3 \times 10^7 \text{ psi}$ ,  $\nu = 0.25$ ). 응력확대계수는 교차적분법(Moran과 Shih, 1987)을 이용해서 계산했다. 계산시 선단주변에 절점이 좀 더 집중되는 적응적 절점배치를 사용하였다. 균열이

$a = 2.0 \text{ in}$ 에서  $a = 5.0 \text{ in}$ 까지 성장할 때, 계산된 응력확대계수는 그림 4(b)와 같이 이론해와 잘 일치하고 있다(4차 다항식 가중함수 사용). 그림 5에는 균열선단 주변의 응력 contour를 도시하였다. 본 연구의 수치기법은 응력특이성을 묘사하기 위한 특별한 기법의 도입 없이 가로15개×세로33개(495개)의 적은 수의 절점을 사용했음에도 불구하고 균열선단 주변의 응력집중 현상을 상당히 정확하게 묘사해준다(그림 5(b)).



(a) 인장하중을 받는 편축균열



(b) 균열길이의 함수로 표현된 모드 I 응력확대계수(이론해는 Tada 등(1973) 참조)

그림 4 편축균열을 갖는 직사각형 판

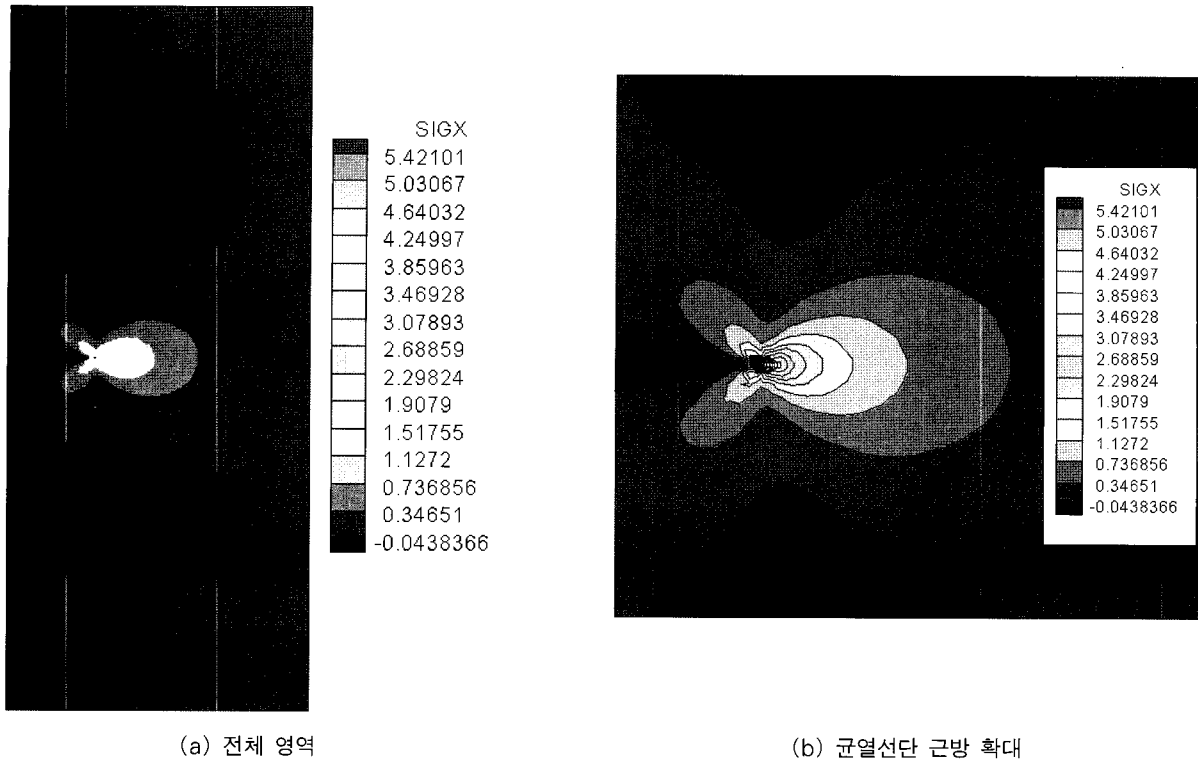


그림 5 인장하중을 받는 모드 I 균열의 응력도

표 1 전단하중을 받는 편축균열 문제의 응력확대계수 계산결과 (단위:  $\psi\sqrt{in}$ )

가중함수		이론해	그리드 없는 유한차분법	상대오차 (%)
4차 다항식	모드 I	34.00	33.78	0.65
	모드 II	4.55	4.48	1.54
Gauss 함수	모드 I	34.00	33.85	0.44
	모드 II	4.55	4.59	0.88

### 4.3 전단하중을 받는 편축균열

4.2절의 부재와 동일한 크기를 갖는 판부재에 대해 전단하중을 받는 경우를 고려한다(그림 4(a) 참조). 판부재의 하면이 고정되어 있고, 상면에는  $\tau = 1.0\text{psi}$  전단하중이 작용한다. 결과로 얻은 응력확대계수가 Yau 등(1980)가 사용한 이론해와 표 1에 비교되어 있다. 대체로 높은 정확도를 보이지만, 모드 I의 경우가 모드 II에 비해 응력확대계수 값이 좀 더 정확한 것을 알 수 있다.

## 5. 결 론

절점이 적절하게 배치된 해석영역의 임의의 위치에서 이동최소제곱법을 이용하여 Taylor 다항식을 구성할 수 있다. 목

표하는 consistency 차수 이상의 고차항에 대한 잔차항을 제거한 Taylor 다항식의 계수는 고려하는 함수와 그 미분값에 대한 매우 정확한 근사를 제공한다. Taylor 다항식 계수들은 이동최소제곱법을 이용하여 한꺼번에 구할 수 있으며, 실제적인 미분과정이 필요 없다. 이와 같은 Taylor 다항식의 구성과정이 그리드에 의존적이지 않기 때문에 해석영역 내에 균열 같은 불연속면이 존재해도 차분식의 계산이 전혀 복잡하지 않다. 해석영역 내의 각 절점에 대해 차분식이 구성되고, 그 차분식들이 모여 전체 계방정식을 구성한다. 지배 미분방정식을 직접 이산화하여 수치적분을 배제하여 계방정식을 구성하는 속도를 획기적으로 향상시켰다. 전체 계 방정식을 풀면 절점계수(또는 절점해)가 얻어지고, 절점해를 이용해 임의의 위치에서 변위와 응력을 자유롭게 계산했다. 기존의 유한차분법과 달리 임의의 위치에서 근사함수와 미분을 자유롭게 계산할 수 있는 본 해석기법은 응력확대계수 계산을 위해 균열선단 주변의 임의의 위치에서 응력계산이 필요한 탄성균열문제에 매우 유리하다. 균열문제 해석결과를 통해 특수한 수치기법의 도입 없이도 정확한 응력확대계수가 산정될 수 있음을 보였다.

결론적으로 그리드 없는 유한차분법은 Galerkin법에 근거한 무요소법의 관점에서 보면 적분식 구성(계산비용)과 경계조건 처리에 대한 단점을 보완할 수 있고, 기존의 유한차분

법의 관점에서 보면 그리드에 의존적이며 근사함수식이 없어 임의의 위치에서 함수값의 계산이 어려웠던 단점을 효과적으로 극복한다. 제시된 수치예제를 통해 탄성론 문제뿐만 아니라 균열과 같이 불연속면과 응력의 특이성을 갖는 문제에서도 높은 정확도를 갖는 해를 얻을 수 있음을 보였다. 더 나아가 본 해석기법이 더욱 다양한 특수 공학적 문제에 성공적으로 적용될 수 있을 것으로 기대된다.

### 감사의 글

이 논문은 2005년도 정부재원(교육인적자원부 학술연구조성사업비)으로 한국학술진흥재단의 지원을 받아 수행된 연구(KRF-2005-041-D00778)이고 이 논문의 일부는 2007년도 교육인적자원부 BK21사업의 일환인 연세대학교 사회환경시스템공학부 미래사회기반시설 산학연공동사업단의 지원을 받아 연구되었으며, 이에 깊은 감사를 드립니다.

### 참 고 문 헌

- 윤영철, 서창범, 김명원, 이상호(2005a) 무요소법의 약정식화와 강정식화를 위한 일관된 분산미분근사 (1) : 수학적 이론배경 및 이산화. 대한토목학회논문집, 25(5), pp.907~913.
- 윤영철, 서창범, 김명원, 이상호(2005b) 무요소법의 약정식화와 강정식화를 위한 일관된 분산미분근사 (2): 수치예제 중심으로. 대한토목학회 논문집, 25(5), pp.915~922.
- Belytschko, T., Lu, Y. Y., Gu, L.(1994) Element-free galerkin methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37, pp.229~256.
- Kim, D. W., Kim, Y-S.(2003) Point collocation methods using the fast moving least square reproducing kernel approximation, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 56, pp.1445~1464.
- Lai, M.-C., Li Z., Lin X.(2006) Fast solvers for 3D Poisson equations involving interfaces in a finite or the infinite domain. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 191, pp.106~125.
- Lee, S-H, Yoon, Y-C.(2004) Meshfree point collocation method for elasticity and crack problem, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 61, pp.22~48.
- LeVeque, R. J., Li, Z.(1994) The immersed interface method for elliptic equations with discontinuous coefficients and singular sources. *SIAM J. Numer. Anal.*, 31, pp.1019~1044.
- Li, Z.(1998) A fast iterative algorithm for elliptic interface problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 35, pp.230~254.
- Li, Z., Lai, M.-C.(2001) The Immersed Interface Method for the Navier-Stokes Equations with Singular Forces. *Journal of Computational Physics*, 171, pp.822~842.
- Luo, Y., Häussler-Combe, U.(2002) A generalized finite-difference method based on minimizing global residual. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191, pp.1421~1438.
- Moran, B., Shih, C. F.(1987) Crack tip and associated domain integrals from momentum and energy balance, *Engineering Fracture Mechanics*, 27, pp.615~641.
- Nayroles, B., Touzot, G., Villon, P.(1992) Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements, *Computational Mechanics*, 10, pp.307~318.
- Oñate, E., Perazzo, F., Miquel, J.(2001) A finite point method for elasticity problems. *Computers & Structures*, 79, pp.2151~2163.
- Tada, H., Paris, P. C., Irwin, G. R.(1973) The stress analysis of cracks handbook, *Del Research Corporation*.
- Timoshenko, S. P., Goodier, I. N.(1970) *Theory of Elasticity. 3<sup>rd</sup> edition*, McGraw-Hill, pp.53~60.
- Tu, C., Peskin, C. S.(1992) Stability and instability in the computation of flows with moving immersed boundaries: a comparison of three methods. *SIAM J. Sci. Statist. Comput.*, 13, pp.1361~1376.
- Yau, J., Wang, S., Corten, H.(1980) A mixed-mode crack analysis of isotropic solids using conservation laws of elasticity. *Journal of Applied Mechanics*, 47, pp.335~341.