

등기하 해석법을 이용한 설계 민감도 해석

Shape Design Sensitivity Analysis Using Isogeometric Approach

하 승 현* 조 선 호†

Ha, Seung-Hyun Cho, Seon-Ho

(논문접수일 : 2007년 2월 26일 ; 심사종료일 : 2007년 5월 7일)

요 지

본 논문에서는 등기하 해석법을 이용하여 평면 탄성문제의 변분식을 유도하였다. 등기하 해석법은 새로이 부각되고 있는 해석법으로서 기저 함수가 NURBS(Non-Uniform Rational B-Splines)로부터 직접 생성되므로 해 공간은 CAD 모델을 구성하는 함수로써 표현된다. 또한 CAD 모델의 B-Spline 기저 함수를 직접 사용하므로 기하학적으로 엄밀한 형상을 표현할 수 있고 요소망의 재구성 없이 해석모델을 정밀화(Refinement)할 수 있는 강점이 있다. 본 논문에서는 이를 확장하여 연속체 기반의 애드조인트 설계 민감도 해석법을 사용하는 등기하 설계민감도 해석법을 유도하였다. 기존의 유한요소 기반 형상 최적설계는 형상의 매개화에 어려움을 겪었으나 등기하 기반 최적설계에서는 기하학적 정보가 이미 B-spline 기저 함수와 조정점에 포함되어 있으므로 이러한 어려움을 피할 수 있는 잠재력을 가지고 있다. 몇몇 수치 예제를 통해서 등기하 해석법을 사용한 설계 민감도 해석을 수행하였으며 유한차분 민감도와 비교하여 정확성을 확인하였다.

핵심용어 : 형상 최적설계, 등기하 해석법, 애드조인트법, NURBS

Abstract

In this paper, a variational formulation for plane elasticity problems is derived based on an isogeometric approach. The isogeometric analysis is an emerging methodology such that the basis functions for response analysis are generated directly from NURBS (Non-Uniform Rational B-Splines) geometry. Furthermore, the solution space for the response analysis can be represented in terms of the same functions to represent the geometry, which enables to provide a precise construction method of finite element model to exactly represent geometry using B-spline base functions in CAD geometric modeling and analyze arbitrarily shaped structures without re-meshing. In this paper, a continuum-based adjoint sensitivity analysis method using the isogeometric approach is extensively derived for the plane elasticity problems. The conventional shape optimization using the finite element method has some difficulties in the parameterization of geometry. In the isogeometric analysis, however, the geometric properties are already embedded in the B-spline basis functions and control points so that it has potential capability to overcome the aforementioned difficulties. Through some numerical examples, the developed isogeometric sensitivity analysis method is verified to show excellent agreement with finite difference sensitivity.

Keywords : shape design sensitivity, isogeometric analysis, adjoint sensitivity analysis, NURBS

1. 서 론

장래에는 CAD 기하형상과 유한요소해석이 직접 결합된 등기하 해석(Isogeometric Analysis)이 주종을 이룰 것이다. 등기하 해석(Isogeometric Analysis)은 2003년 Cho와 Roh에 의해 유사개념이 소개된 이래 2005년 Hughes et al. 에 의해 등기하 해석의 개념이 수학적으로 정립이 되

었다. 이는 기존의 유한요소법과 무요소 기법이 결합된 형태의 구조를 가지고 있으며, CAD의 NURBS(Non-Uniform Rational B-Splines)를 사용하여 직접 해석공간의 기저함수를 만들 수 있으므로 기하학적으로 엄밀하며 형상의 수정, 정밀화(refinement)가 용이하여 차세대 해석 기법으로 인식되어 고체, 유체, 진동 문제 등으로 빠르게 연구가 확장되어 가고 있다. 특히 경계에서의 법선벡터, 곡률 등 정밀한 거동

† 책임저자, 정회원 · 서울대학교 조선해양공학과 및 RIMSE 부교수
Tel: 02-880-7322 ; Fax: 02-880-9298
E-mail: secho@snu.ac.kr

* 학생회원 · 서울대학교 조선해양공학과 박사과정

• 이 논문에 대한 토론을 2007년 8월 31일까지 본 학회에 보내주시면 2007년 10월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

이 요구되는 형상 설계민감도 해석과 최적설계 분야에서는 매우 큰 잠재력을 가지고 있다. 지금까지의 형상설계는 CAD 형상에서 이산화 과정을 거쳐 응답해석 및 민감도 해석을 수행하였기 때문에 곡률 등 고차 항이 절사된 형상이 해석공간에서 사용되어 왔으나 등기화 해석에서는 유한요소의 h - p -정밀화(refinement) 특성 외에도 NURBS의 k -정밀화 특성을 가지며 무요소법과 유사하게 형상함수를 구성하므로 고정밀의 형상이 필요한 경우 CAD 모델링을 거치지 않고 용이하게 구현할 수 있다.

2. B - SPLINE

2.1 노트 벡터 및 기저 함수

1차원 문제에서의 노트 벡터는 파라메트릭 좌표계에서의 좌표들의 집합이다.

$$E = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\} \quad (1)$$

여기서 p 는 사용되는 기저함수의 차수이고, n 은 기저함수의 개수이다. 따라서 p 차의 기저함수 n 개를 사용하게 되면 총 $n+p+1$ 개의 노트 벡터가 사용된다. 만일 노트

벡터가 파라메트릭 공간상에 균일하게 분포되어 있으면 균일(uniform) 노트벡터, 불균일하게 분포되어 있으면 불균일(non-uniform) 노트벡터라고 한다. 그리고 한 노트값이 같은 좌표에 여러 번 반복될 수 있는데, 이때를 중복(repeated) 노트벡터라고 한다. 또한 첫 번째와 마지막 노트가 $p+1$ 번 반복되면 열린(open) 노트벡터라고 한다.

등기화 해석법에서는, 해 공간의 기저함수가 CAD 형상을 표현하는데 사용된 B-spline을 이용하여 다음과 같이 재귀적으로 구성된다.

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{if } \xi_1 \leq \xi < \xi_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2)$$

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_1}{\xi_{i+p} - \xi_1} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi), \quad p = 1, 2, 3, \dots \quad (3)$$

위의 기저함수와 그의 미분값을 그려보면 그림 1과 같다. 1차의 B-spline 기저함수를 사용하였을 때는 그림 1(a)에서와 같이 유한요소법에서의 기저함수와 동일하다. 그러나 2차 이상의 기저함수에 대해서는 기존의 유한요소법과는 다르게 된다. B-spline 기저함수의 중요한 성질을 정리하면 다음

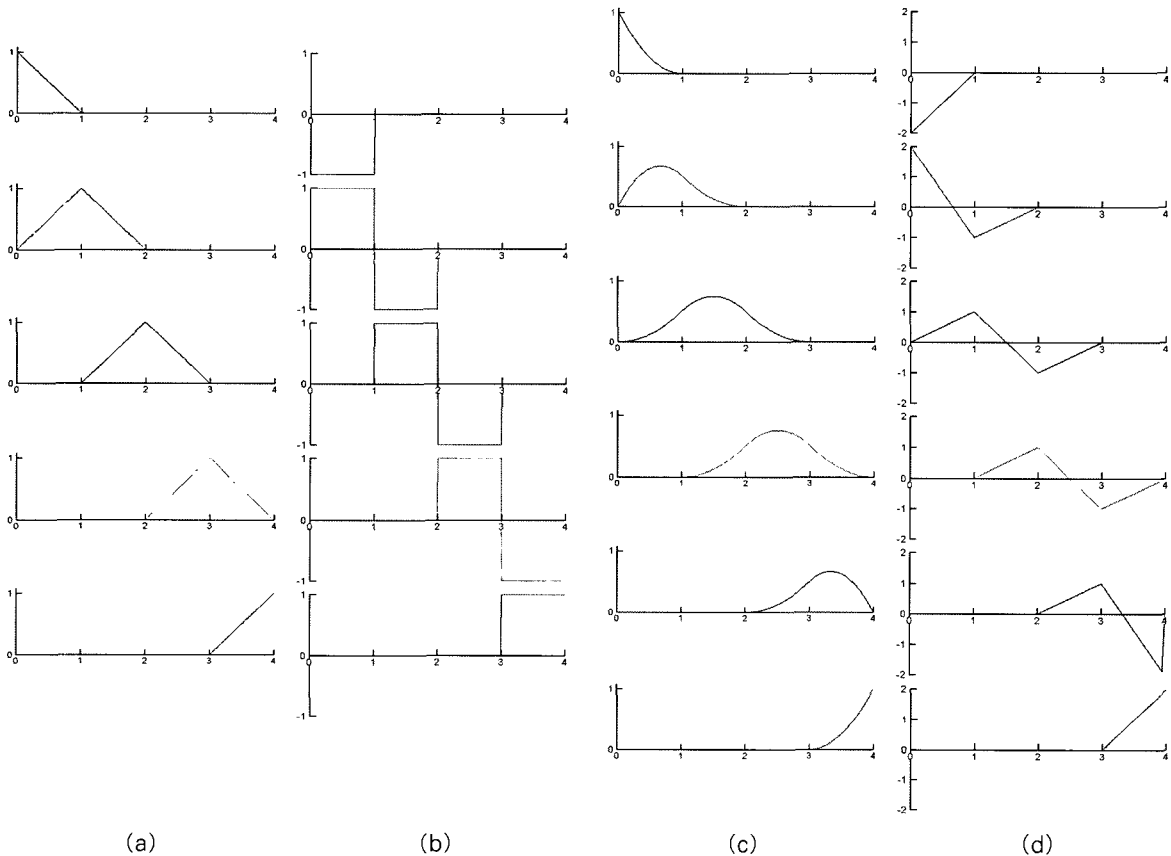


그림 1 기저 함수와 미분값

과 같다.

- (1) $\sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) = 1$ (partition of unity)
- (2) $N_{i,p}(\xi)$ is contained in the interval $[\xi_i, \xi_{i+p+1}]$ (compact support)
- (3) $N_{i,p}(\xi) \geq 0$ (non-negativity)

2.2 B-spline curves

1 차원 문제에서의 파라메트릭 B-spline 곡선은 B-spline 기저함수의 선형결합으로 얻어지는데 기저함수들의 계수가 조정점(control point)이 된다. n 개의 p 차 기저함수 $N_{i,p}$ 와 이에 대응하는 조정점 B_i 가 주어지 있을 때, B-spline 곡선은 다음과 같이 정의된다.

$$C(\xi) = \sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) B_i \tag{4}$$

이 때, B-spline 곡선의 특징은 다음과 같다.

- (1) $p-1$ 차의 미분값에 대한 연속성을 가진다.
- (2) 중복된 노트나 조정점이 k 번 사용되면, 미분의 연속성이 k 차 만큼 감소한다.
- (3) 조정점들을 움직이게 되면 B-spline 곡선이 따라 변하게 된다.

그림 1의 (b), (d)는 그림 1의 (a), (c)에서 사용되었던 1차와 2차 B-spline 기저함수에 대한 미분값을 나타낸 그림이다. 1차 기저함수를 미분하게 되면 불연속한 미분값이 생기나 2차 기저함수의 경우에는 연속한 미분값을 얻게 된다. 따라서 변형도(strain)나 응력(stress)과 같이 변위장을 미분해서 얻을 수 있는 값에 대해서도 연속적인 해석 결과를 얻을 수 있다.

2.3 h-refinement

h-refinement는 기존의 노트 벡터에 노트를 추가(knot insertion)하는 것을 의미한다. 기존의 유한요소법에서 해석의 정확도를 높이기 위해서 요소망을 재구성(re-meshing) 하듯이 등기하 해석법에서는 h-refinement를 사용하게 된다. 주어진 노트벡터 $\mathcal{E} = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$ 와 조정점 $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ 에 대해서 새로운 노트 $\bar{\xi} \in [\xi_k, \xi_{k+1}]$ 를 추가할 때, 새로운 노트벡터 $\bar{\mathcal{E}} = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k, \bar{\xi}, \xi_{k+1}, \dots, \xi_{n+p+1}\}$

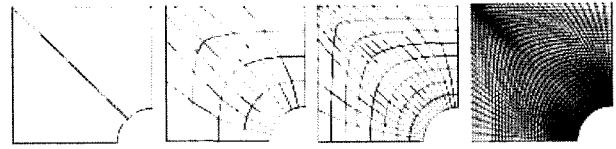


그림 2 h-refinement

Λ, ξ_{n+p+1} 와 $n+1$ 개의 조정점 $\{\bar{B}_1, \bar{B}_2, \dots, \bar{B}_{n+1}\}$ 은 다음의 식에 의해서 구성된다.

$$\bar{B}_i = \alpha_i B_i + (1 - \alpha_i) B_{i-1} \tag{5}$$

$$\alpha_i = \begin{cases} 1 & 1 \leq i \leq k-p \\ \frac{\xi - \xi_1}{\xi_{i+p} - \xi_1}, & k-p+1 \leq i \leq k \\ 0 & k+1 \leq i \leq n+1 \end{cases} \tag{6}$$

실제로 h-refinement의 결과는 그림 2와 같다.

2.4 B-spline surface

조정점 $B_{i,j}, i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m$, 과 노트벡터 $\mathcal{E} = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}, H = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{m+q+1}\}$ 에 대해서, B-spline 곡면은 아래와 같은 텐서 곱으로 나타난다.

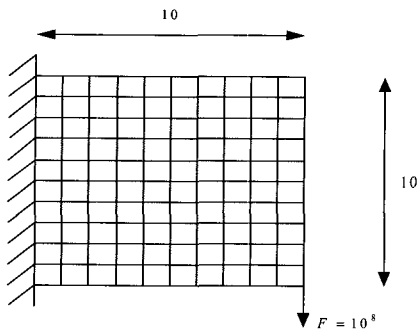
$$S(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) B_{i,j} \tag{7}$$

여기서 $N_{i,p}(\xi)$ 와 $M_{j,q}(\eta)$ 는 각각 ξ, η 방향으로의 기저함수이다. 수치적분을 위한 $[\xi_i, \xi_{i+1}] \times [\eta_j, \eta_{j+1}]$ 구간이 기존의 유한요소법에서의 요소(element)역할을 하게 된다.

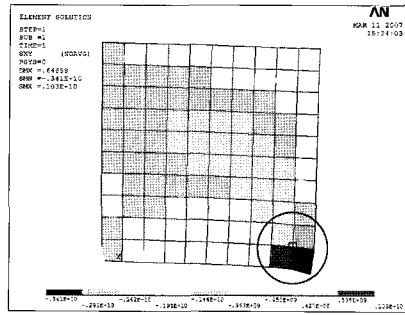
3. 등기하 해석

그림 3(a)와 같이 한쪽 변이 고정된 사각 평판 문제에 대해서 유한요소법과 등기하 해석법으로 해의 정확도를 비교하고 응력의 연속성을 살펴보았다. 그림 3(b)는 모델 (a)를 4절점 요소를 사용해서 해석한 후 변형 후의 형상에 전단 응력을 나타낸 것이고, 그림 3(c)는 8절점 요소를 사용한 결과이다. 그림에서도 알 수 있듯이, 유한요소법에서는 응력들 간의 연속성이 보장되지 않는다. 따라서 이를 해결하기 위해서 응력의 변화가 심한 부분이나 응력 집중이 일어나는 곳에서는 요소를 매우 잘게 나누거나, 또는 주변 요소들의 응력값을 이용하여 평균화하는 별도의 과정이 필요하게 된다.

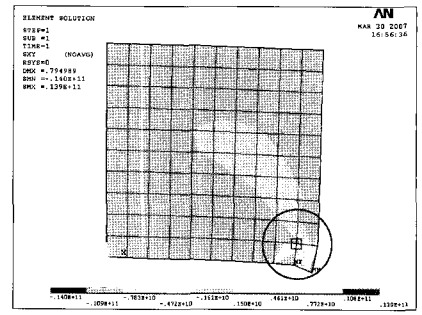
그러나 그림 4와 같이 등기하 해석법을 사용했을 때에는 유한요소법과는 달리 2차 이상의 기저함수를 사용하게 되면



(a) 외팔보 문제

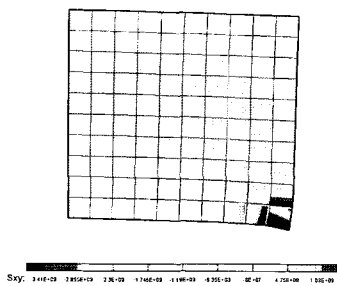


(b) 4절점 요소

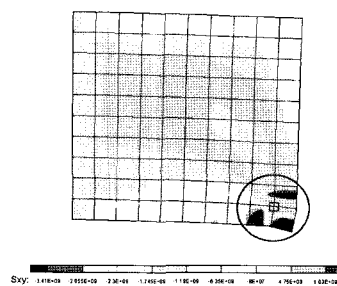


(c) 8절점 요소

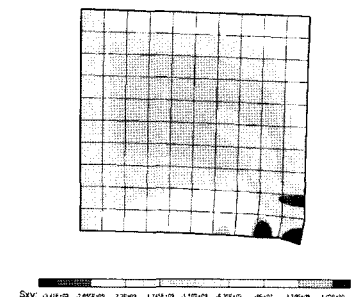
그림 3 문제 정의와 유한 요소 해석



(a) C^0 기저함수

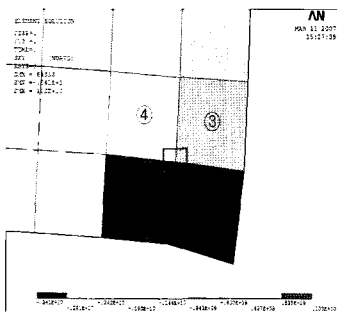


(b) C^1 기저함수

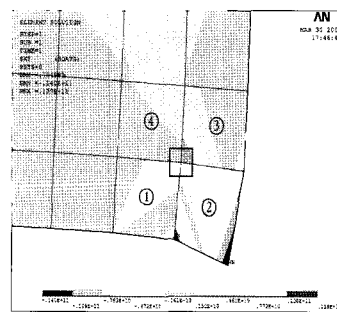


(c) C^2 기저함수

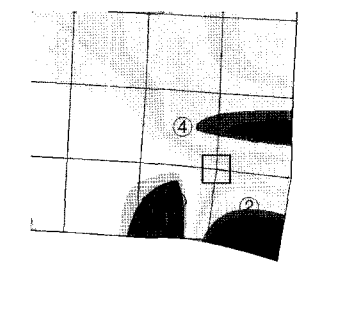
그림 4 등기하 해석



(a) 4절점 유한요소



(b) 8절점 유한요소



(c) C^1 등기하 해석

그림 5 전단 응력의 비교

표 1 각 요소에서의 전단 응력

	요소 1	요소 2	요소 3	요소 4
4절점 FEM	1.0283×10^9	-3.4069×10^9	-1.8315×10^9	-2.4880×10^9
8절점 FEM	3.9241×10^9	-5.4000×10^9	-1.1309×10^{10}	-9.6895×10^8
C^1 등기하	-1.1749×10^9	-1.1749×10^9	-1.1749×10^9	-1.1749×10^9

해석 영역 전체에 대해서 연속적인 응력 분포를 얻을 수 있음을 확인할 수 있다.

그림 5는 응력 변화가 심한 요소들의 확대한 것인데, 유한요소법과 등기하 해석법 각각의 요소 1~4가 공유하고 있는 절점에서의 응력값을 표 1에서 비교하였다. 같은 절점에서도

선택한 요소에 따라서 응력값이 다르게 나오는 유한요소법과는 달리, 등기하 해석법에서는 같은 절점에서는 항상 같은 응력값이 나오는, 보다 물리적으로 의미 있는 해석 결과를 보여주고 있다.

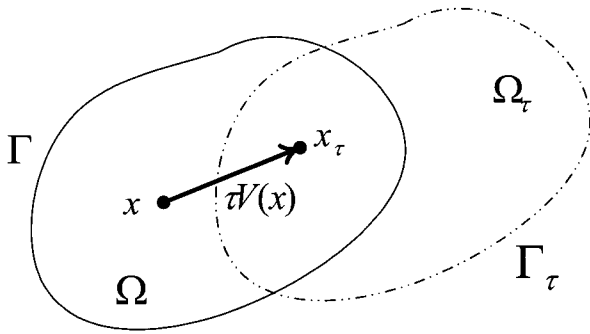


그림 6 설계 영역 변화

4. 설계 민감도 해석

등기하 설계민감도는 형상이 선형적으로 변화하는 속도장에서 기존의 설계민감도와 동일한 결과를 제공한다. 그러나 일반적인 속도장에서는 유한요소 이산화에 따른 법선벡터 및 곡률 등 고차항의 손실을 방법론적으로 방지하여 기하학적으로 엄밀한 형상이 반영됨으로써 정확한 설계민감도를 제공하여 정밀한 형상 최적설계 결과를 얻을 수 있다.

4.1 전미분 (Material Derivative)

그림 6과 같은 설계 영역 Ω 에서 변형 T 가 시간 변수 τ 에 의해서 결정된다고 하자. 이때의 변환관계 $T: x \rightarrow x_\tau$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$x_\tau = T(x, \tau) \tag{8}$$

τ 를 시간으로 생각할 때, 설계 속도는 아래와 같이 정의된다.

$$V(x_\tau, \tau) \equiv \frac{dx_\tau}{d\tau} = \frac{dT(x, \tau)}{d\tau} = \frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} \tag{9}$$

$z_{\tau(x)}$ 를 해석해로 생각하면, x 위치에서의 전미분은 다음과 같다.

$$\dot{z} \equiv \frac{d}{d\tau} z_\tau(x + \tau V(x)) \Big|_{\tau=0} = z' + \nabla z^T V \tag{10}$$

위의 관계식을 이용하면, 영역 적분과 경계적분의 형태를 갖는 성능함수에 대한 전미분을 나타낼 수 있다. Ψ_1 과 Ψ_2 를 아래와 같이 식 (11), (12)로 정의하자.

$$\Psi_1 = \int_\Omega f(x) d\Omega \tag{11}$$

$$\Psi_2 = \int_\Gamma g(x) d\Gamma \tag{12}$$

성능함수의 전미분은 식 (13), (14)로 나타낼 수 있다.

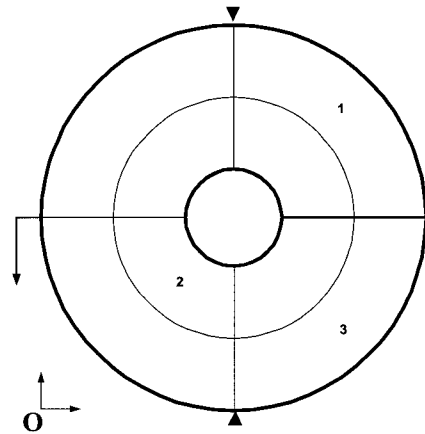
$$\dot{\Psi}_1 = \int_\Omega [f'(x) + \text{div}(f(x)V(x))] d\Omega \tag{13}$$

$$\dot{\Psi}_2 = \int_\Gamma [g' + (\nabla g^T n + kg)V^T n] d\Gamma \tag{14}$$

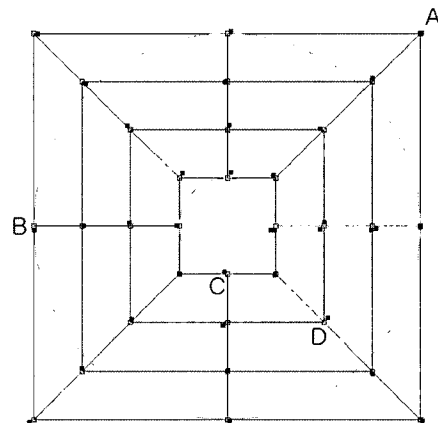
등기하 해석법을 사용한 설계 민감도 해석에서는, 설계하고자 하는 경계가 선형이고 설계 영역이 선형 설계 속도에 의해서 변화할 경우 기존의 유한요소법과 동일한 결과를 제공한다. 그러나 일반적으로 등기하 해석법은 법선 벡터와 곡률의 고차항의 정보를 잃지 않기 때문에, 보다 정확한 설계 민감도를 얻을 수 있고 따라서 형상 최적설계에서 정확한 형상을 얻을 수 있다.

4.2 형상 설계 민감도

그림 7(a)의 원판 모델은 위, 아래가 단순 지지되고 좌측에서 수직방향의 집중하중을 받는 예제이다. 그림 7(b)에서



(a) 원판 모델



(b) 조정점

그림 7 형상 설계 민감도 해석 모델

표 2 등기하 해석법에서의 변위 설계 민감도 비교

자유도	유한차분법	직접미분법	정확도 (%)
A_x	-2.90521E-03	-2.89470E-03	100.36
A_y	5.84325E-03	5.83051E-03	100.22
B_x	1.99090E-03	1.98226E-03	100.44
B_y	-2.04763E-03	-2.03467E-03	100.64
C_x	2.47518E-03	2.46382E-03	100.46
C_y	-6.22087E-04	-6.19405E-04	100.43
D_x	1.13147E-03	1.12500E-03	100.58
D_y	-9.19343E-04	-9.12851E-04	100.71

표 3 등기하 해석법에서의 응력 설계 민감도 비교

요소	응력	유한차분법	직접미분법	정확도 (%)
	σ_{11}	7.95275E+06	7.84934E+06	101.32
1	σ_{22}	8.71851E+06	8.67061E+06	100.55
	σ_{12}	5.29689E+06	5.39419E+06	98.20
2	σ_{11}	-2.23610E+07	-2.24328E+07	99.68
	σ_{22}	-1.95225E+07	-1.95652E+07	99.78
	σ_{12}	2.89378E+07	2.90516E+07	99.61
3	σ_{11}	-1.30891E+07	-1.32284E+07	98.95
	σ_{22}	2.18210E+06	2.07578E+06	105.12
	σ_{12}	1.86852E+06	1.75601E+06	106.41

는 형상 변형 전의 조정점(□)과 변형 후의 조정점(■)을 나타내었다. 4.1에서 살펴본 전미분을 사용하면, 변위장에 대한 각 조정점의 형상 설계민감도를 식 (15)와 같이 유도할 수 있다. 그리고 위와 같이 조정점을 변화시켰을 때 변위에 대한 형상 설계 민감도를 표 2에서 유한차분 민감도와 비교하였다. 등기하 해석법을 사용한 설계 민감도가 매우 높은 정확도로 얻어지고 있음을 확인할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} c_{ijkl} \bar{z}_{i,j} \bar{z}_{k,l} d\Omega &= \int_{\Omega} c_{ijkl} \bar{z}_{i,m} V_{m,j} \bar{z}_{k,l} d\Omega \\
 + \int_{\Omega} c_{ijkl} \bar{z}_{i,j} \bar{z}_{k,m} V_{m,l} d\Omega &- \int_{\Omega} c_{ijkl} \bar{z}_{i,j} \bar{z}_{k,l} V_{m,m} d\Omega \\
 + \int_{\Omega} f_i \bar{z}_i V_k d\Omega &+ \int_{\Omega} H(T_i \bar{z}_i) (V_k n_k) d\Gamma \quad (15) \\
 \left(\frac{\partial z}{\partial x_i} \right)' &= \left(\frac{\partial z}{\partial x_i} \right) + \nabla \left(\frac{\partial z}{\partial x_i} \right)^T V \\
 = \frac{\partial z'}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_j \partial x_i} V_j &= \frac{\partial}{\partial x_i} (z + \nabla z^T V) + \frac{\partial^2 z}{\partial x_j \partial x_i} V_j \\
 \frac{\partial}{\partial x_i} (z) - \frac{\partial^2 z}{\partial x_j \partial x_i} V_j &- \nabla z^T \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial^2 z}{\partial x_j \partial x_i} V_j
 \end{aligned}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_i} (z) - \nabla z^T \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \right) \quad (16)$$

변위에 대한 설계 민감도식 (15)를 이용하면 변형도 (strain) 의 설계 민감도를 식 (16)을 이용하여 구할 수 있으며 구성 방정식을 사용하면 응력(stress) 의 설계 민감도를 구할 수 있다. 이를 바탕으로 응력에 대한 형상 설계 민감도를 표 3에서 유한차분 민감도와 비교하였다. 변위에서와 같이 응력에 대한 형상 설계 민감도도 높은 정확도로 얻어지고 있음을 확인하였다.

5. 결 론

본 논문에서는 등기하 해석법을 이용하여 응답 및 설계 민감도 해석을 수행하였다. 등기하 해석법에서는 CAD형상에서 사용되는 B-spline함수가 그대로 기저함수로 사용되고, 기저함수의 계수로 쓰이는 조정점에 자유도가 부여된다. 또한 등기하 해석법은 주어진 해석 모델을 기하학적으로 정확하게 묘사할 수 있으며, 해석의 정확도를 높이기 위한 요소망 재구성을 h-refinement를 통해서 쉽게 처리할 수 있다는 장점이 있다. 유한요소해석에서 수치해석이 절점 (node)에서 이루어지는 것과는 달리 등기하 해석법에서는 B-Spline의 조정점 (control point)에서 이루어지므로, 영역의 이산화 (discretization)과정이 형상 구성 단계에서 이루어지고 해석 과정에서 연속체를 이산화하지 않는 장점이 있다. 따라서 형상 설계 민감도 해석에서 기하모델의 법선 벡터나 곡률 정보를 정확하게 구현할 수 있다는 큰 장점이 있다. 이를 형상 최적 설계에 적용한다면 보다 엄밀한 최적 형상을 얻어낼 수 있을 것으로 기대된다.

감사의 글

본 논문의 내용은 2007-2008년도 첨단조선공학 연구센터 지원과제(R11-2002-104-06003-0)의 일부로 수행된 것을 정리한 것으로, 위 기관의 후원에 감사드립니다.

참 고 문 헌

조선훈, 정현승, 양영순(2002) 기하학적 비선형 구조물의 설계 민감도해석 및 위상최적설계, 한국전산구조공학회 봄 학술발표회 논문집, pp.335~342.
 하승현, 김민근, 조선훈(2006) Topological Derivative를 이용한 선형 구조물의 레벨셋 기반 형상 최적 설계, 한국전산구조공학회 정기 학술대회 논문집, pp.299~306.

- Cho, M., Roh, H.Y.**(2003) Development of geometrically exact new shell elements based on general curvilinear coordinates, *International Journal for numerical methods in engineering*. 56(1), pp.81~115.
- Choi, K. K., Duan, W.**(2000) Design sensitivity analysis and shape optimization of structural components with hyperelastic material, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 187, pp.219~243.
- Cottrell, J.A., Reali, A., Bazilevs, Y., Hughes, T.J.R.**(2006) Isogeometric analysis of structural vibrations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 195, pp.5257~5296.
- Haug, E.J., Choi, K.K., Komkov, V.**(1986) Design sensitivity analysis of structural systems, *Academic Press*, New York.
- Hughes, T.J.R., Cottrell, J.A., Bazilevs, Y.**(2005) Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 194, pp.4135~4195.
- Roh, H.Y., Cho, M.**(2004) The application of geometrically exact shell elements to B-spline surfaces, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193, pp.2261~2299.