

# 네덜란드의 초등학교 기하 교육과정에 대한 개관<sup>1)</sup> -현실적 수학교육을 중심으로-

정 영 옥\*

본 연구는 최근 기하 교육 동향과 전미수학교사협의회에서 2000년대의 수학교육의 방향과 관련해서 제시한 기하 교육의 기준에 비추어 현실적 수학교육에 기초한 네덜란드의 초등학교 기하 교육과정에 대해 알아보고, 우리나라의 초등학교 도형 영역 지도를 위한 시사점을 제시하는 데 그 목적이 있다. 이런 목적을 달성하기 위해 네덜란드의 초등학교 기하 교육의 역사를 살펴보고, 네덜란드의 초등학교 기하 교육과정에 중요한 영향을 미치는 요소인 일반 목표와 기하 영역의 핵심 목표, RME에 기초한 네덜란드의 초등학교 수학 교과서의 지도 내용과 지도 방법의 특징을 살펴 보았다. 그 결과 우리나라 도형 영역의 교육과정과 교과서 개발을 위해 논의할 문제로 지도 내용의 측면에서 공간 방향의 도입, 공간 시각화와 공간 추론의 강화, 지도 방법의 측면에서 공간적 접근과 도형적 접근의 균형, 직관적 접근의 중시, 통합적 접근의 고려 등을 제안하였다.

## 1. 서 론

Hershkowitz(1990)에 의하면 기하를 가르치는 데는 두 가지의 관점이 있는데, 하나는 기하를 공간에 대한 탐색으로 보는 것이고, 다른 하나는 기하를 논리적 구조로 보는 것이다. 이런 두 측면은 서로 관련이 있는데, 논리적 구조로서의 기하를 학습하는 데는 공간에 대한 탐색으로서의 기하가 중요한 역할을 할 수 있기 때문이다.

세계적으로 보면 전통적인 교육과정에서 도형 영역과 관련하여 지도해 오던 내용은 논리적 구조로서의 기하 체계의 일부분이라고 할 수 있는 도형에 관련된 내용이었지만, 최근에는 기하 체계뿐만 아니라 공간에 대한 탐색으로서의 기하에 해당되는 공간 감각이 더욱 강

조되고 있다. Clements(1999)에 의하면 공간 감각을 기르기 위해서는 공간 방향과 공간 시각화 능력이 중요하다. 이 때 공간 방향은 공간에서 자신의 위치를 결정하거나 다른 물체들의 위치를 정하고 공간 내에서의 이동을 표현하는 능력이라 할 수 있고, 공간 시각화는 공간의 대상, 관계, 변환에 대한 정신적 표상을 구성하고 조작하는 능력이라고 할 수 있다(Clements & Battista, 1992; Clements, 1999). Kennedy, Tipps와 Johnson(2004)에 의하면 이전에는 공간 감각은 아이들이 학교에 입학하기 전에 자연스럽게 발달하는 것으로 생각하였고, 그 이후의 기하 학습을 하기 위해 중요한 기능으로 보지도 않았을 뿐 아니라 혹시 중요성을 인식하였다 하더라도 공간 감각을 발달시킬 수 있는 적절한 방법에 대한 연구가 거의 없었다. 그러나

\* 경인교육대학교(yochong@gin.ac.kr)

1) 이 연구는 2006년 경인교육대학교 학술연구조성비에 의하여 연구되었음

Hershkowitz(1990)에 의하면 1980년대 이후로 삼차원 물체를 이차원으로 표현하거나 이차원 표현을 삼차원으로 표현하는 것과 관련하여 학생들이 겪는 어려움이나 이런 능력에 미치는 영향에 대한 연구들이 계속되어 왔고, Clements와 Battista(1992)와 같이 공간 감각 기능을 향상시킬 수 있는 활동을 제공해 주는 연구들도 있으며, 최근에는 컴퓨터의 발달이 이런 기능을 더욱 강화할 수 있는 도구를 제공해 주고 있다. 이런 연구 결과들에 의해 초등학교 교육과정에서 공간 방향과 공간 시각화를 강조하는 공간 감각이 전 세계적으로 기하 영역의 중요한 부분으로 자리잡아가고 있다.

이와 관련하여 전미수학교사협회(NCTM, 2000)에서는 <학교수학을 위한 원리와 기준>에서 2000년대의 학교수학의 개선을 위해 초점을 두고 노력해야 할 사항들을 제시했는데, 그 중 기하 영역과 관련된 기준을 살펴보면, 첫째, 2차원, 3차원 도형의 특징과 성질 분석 및 기하 관계의 수학적 논쟁, 둘째, 좌표기하 및 다른 표현 체계를 이용한 위치 확인과 공간 관계 기술, 셋째, 수학적 상황 분석을 위한 변환 적용과 대칭 활용, 넷째, 공간 시각화, 공간 추론, 기하 모델을 활용한 문제해결의 네 가지 기준을 제시하고 있다. 이는 논리적 구조로서의 기하와 공간에 대한 탐색으로서의 기하를 모두 중시하는 최근 기하 교육의 동향을 잘 보여주고 있다.

한편, 네덜란드에서는 1970년대 이후로 Freudenthal의 인간 활동으로서의 수학이라는 철학을 바탕으로 하는 현실적 수학교육(Realistic Mathematics Education)을 기하 영역에서 구체화해오고 있다. 이 과정에서 지금까지의 논리적 구조로서의 기하와는 달리 현실로부터 수학을 수학화하는 현실적 수학교육을 실행하면서 기하의 핵심 목표, 특히 초등학교에서 기하의 핵심 목표를 공간에 대한 탐색으로 두고, 공간 방

향, 공간 추론, 공간 시각화 등을 중심으로 개발한 프로그램을 출발점으로 공간 탐색으로서의 기하를 핵심적인 내용으로 지도하여 왔다.

우리나라의 경우는 제 7차 교육과정(교육부, 1997)부터 공간 감각의 일부 내용, 즉 공간 시각화의 내용이 강조되고 있고, 제 7차 수학 교육과정을 부분 수정한 수학과 교육과정(교육인적 자원부, 2007)에서는 공간 감각이라는 표현은 쓰지 않고 그 내용은 그대로 유지되고 있지만, 공간 방향과 관련된 내용은 찾아보기 어렵다. 따라서 본 논문에서는 세계적인 기하 교육의 동향에 비추어 현실적 수학교육을 기초로 한 네덜란드의 초등학교 기하 교육과정을 살펴봄으로써, 앞으로의 수학과 교육과정과 이를 바탕으로 하는 새로운 교과서 개발을 위한 시사점을 제시하고자 한다. 이를 위해 네덜란드의 초등학교 기하 교육 역사를 간략하게 살펴보고, 현실적 수학교육에 기초한 초등학교 기하 교육을 개관하기 위해 네덜란드의 초등학교 수학 교과서의 지도 내용과 지도 방법의 특징을 살펴봄으로써, 이를 기초로 우리나라 초등학교의 도형 영역을 위한 교육과정과 교과서 개발을 위해 지도 내용과 지도 방법의 측면에서 고려할 사항들을 제안하고자 한다.

## II. 네덜란드의 초등학교 기하 교육의 역사

네덜란드의 초등학교에서 기하 교육을 시작한 것은 19세기 초로 거슬러 올라간다. 기하에 해당하는 교과는 모양론(Vormleer)이었다. 모양론은 원래 Pestalozzi의 아이디어인데, 그는 직관을 중요시하면서 실제 경험과 관찰이 추상적 언어보다 앞서야 함을 강조하였다. 모양론을 해석하는 관점은 시기에 따라 달랐다. 19세기 전반

에는 정신 도야적 가치를 중시하였다. 그 당시의 유명한 교과서 저자인 Van Dapperen과 같이 모양론을 인간의 지적 기능의 연속적인 개발을 위한 방법으로 생각하고 많은 사고 활동을 중요시하는 사람들이 있었다. 그러나 그 내용은 점, 선, 다른 기하 개념을 일부 사용한다는 것이었을 뿐 본격적인 기하학은 중등학교에서 도입되었다. 한편, 모양론을 학생들이 생활 주변에 있는 실제 대상들을 세밀하게 관찰해서 직사각형, 정사각형 등의 기본적인 기하 개념을 파악하는 것으로 생각하는 사람들이 있었다. 19세기 중반에는 기하의 형식적 가치가 약화되면서, 응용에 많은 관심을 가지게 되었다. 예를 들면 길이, 넓이, 부피를 측정하고 계산하는 문제나 기하 작도의 문제를 다루면서, 관찰을 중시하였다. 그러나 교과서에서 기하의 내용을 다루고 있는 것과는 달리 그 당시의 교사들은 이 교과 내용을 가르칠만한 충분한 준비가 되지 않았다. 따라서 1889년에 모양론은 초등학교의 공식적인 교육과정에서 삭제되었다(de Moor, 1990).

그런 도중에 네덜란드의 수학교육 개선을 위한 움직임과 더불어 1970년대에 초등 수학교육을 위한 중요한 개발 연구가 시작되었는데, 그것이 바로 IOWO<sup>2)</sup>에 의한 Wiskobas 프로젝트이다. 이 프로젝트는 인간 활동으로서의 수학을 강조하는 Freudenthal의 철학을 초등 수학 교육 과정에 구현한 것이다. Freudenthal은 특히 그 당시의 산술 교육에 치우친 수학 교육과정과 유클리드 기하학을 수학의 공리적 구성을 가르치기 위한 이상적인 모델로 생각하거나 기하를 해석기하나 선형대수의 입문을 위한 수단 정도로 보는 경향을 비판하면서, 초등학교에서 기하 교육의 중요성을 강조하였다(Freudenthal,

Janssen, & Sweers, 1976). Freudenthal(1973)에 따르면 기하 교육의 목표는 단순히 도형에 대한 탐구만이 아니라 학생들이 이 세상에서 더 풍요롭게 생활하고, 호흡하고, 활동하기 위해 이해하고, 탐구하고, 정복해야 할 공간에 대한 파악이다. 이런 생각에 따라 구체화된 활동 주제는 수중나라(Waterland), 난파선 구조(Ship Ahoy), 우리의 지구(Our Earth), 방갈로 짓기(Bungalow)였다(Freudenthal, Janssen, & Sweers, 1976). 이런 모든 활동의 공통된 특징은 첫째, 기하 도형뿐만 아니라 공간 방향, 공간 추론, 공간 시각화를 강조한다는 점, 둘째, 기하만이 아니라 현실을 바탕으로 수학의 여러 영역과 다른 교과를 통합적으로 다룬다는 점이다.

Wiskobas 프로젝트를 출발점으로 기하 교육의 목표를 공간에 대한 파악으로 보고, 현실을 바탕으로 통합적으로 공간 방향, 공간 추론, 공간 시각화를 중시하는 기하 교육의 방향은 1970년대 이후 현실적 수학교육을 중시하는 네덜란드 초등학교 수학교과서에 반영되어 왔다. 이와 같이 기하를 공간에 대한 파악으로 볼 때, 기하는 인간의 활동과 사고의 중요한 부분을 차지한다. De Moor(2005)에 따르면 어린 아이들의 경우에도 자신의 주변 공간에 있는 모든 종류의 모양과 현상을 지각하는 것이 중요한 활동 중의 하나이다. 이 때 아이들은 모양과 현상을 지각하는 것뿐만 아니라 만져보고 느껴보는 등의 행동을 하게 된다. 이런 지각과 행동은 심상을 위한 기초가 되며, 아이들의 사고 활동을 유발하고, 공간에 대한 통찰을 발달시킨다. 이런 아이들의 공간에 대한 통찰의 자연스러운 발달에 기여하는 것이 초등학교에서 기하를 지도하는 목표이다. 이는 아이들이 가

2) IOWO는 the Institute for Development of Mathematics Education을 뜻하는 네덜란드 약자로 1971년에 설립되어 그보다 먼저 1968년 Wijdeveld와 Goffrey가 창안한 Wiskobas 프로젝트를 더 발전시켰으며, 이 때 핵심적인 역할을 한 사람이 Freudenthal이다.

지고 있는 막대한 비형식적 기하 지식을 바탕으로 공간의 모양과 현상에 대한 경험적인 관찰과 더불어 현상에 대한 설명, 즉 반성적 사고를 통해서 '왜'라는 질문에 대한 합리적인 답을 추구하는 것이다(Gravemeijer, 1990).

그 이후로 네덜란드 초등학교에서 지도되는 내용의 방향을 좀더 구체적으로 제시한 「Proeve van een National Programma voor het Reken/Wiskundeonderwijs op de Basisschool(초등학교의 산술/수학교육을 위한 국가 프로그램 초안)」<sup>3)</sup>을 살펴보면, 초등학교 수학 교과서에서 지도할 기하 영역의 내용은 바라보기와 사영하기, 방향 나타내기, 위치 나타내기, 공간적으로 추론하기, 변환하기, 그리기와 구성하기, 측정하기와 계산하기로 구분하고 있다(de Moor, 1990). 또한 1998년에 개정된 핵심 목표에 따라 초등학교 학생들의 성취 목표 및 이를 실제적인 수업개선으로 구체화하기 위해 실행한 TAL<sup>4)</sup> 프로젝트에서는 기하를 지도하는 목표로 공간 추론과 공간 시각화 능력을 기르는 것으로 보고, 기하 영역에서 지도할 내용을 방향 나타내기, 구성하기, 모양과 도형으

로 조작하기로 구분하고 있다(de Moor, 2005). 이런 구분을 Proeve와 비교해 보면, 바라보기와 사영하기, 위치 나타내기와 방향 나타내기는 방향 나타내기, 그리기와 구성하기는 구성하기, 변환하기는 모양과 도형으로 조작하기라 할 수 있고, 측정하기와 계산하기 그리고 공간적으로 추론하기는 별도의 하위 영역이 아니라 방향 나타내기, 구성하기, 모양과 도형으로 조작하기에 적절히 통합한 것으로 볼 수 있다<sup>5)</sup>.

### III. 네덜란드의 초등학교 기하 교육과정에 대한 개관

이 장에서는 네덜란드의 초등학교 수학 교육과정의 방향을 간단하게 제시한 초등학교의 일반 목표, 초등학교 6학년까지 도달해야 할 기하 영역의 핵심 목표를 살펴보고, 좀더 구체적으로 현실적 수학교육을 반영한 네덜란드의 초등학교 교과서 Pluspunt의 기하 지도 내용과 지도 방법의 특징을 제시하고자 한다<sup>6)</sup>.

- 3) Proeve는 1989년에 출판되기 시작한 것으로 일종의 네덜란드 초등학교 수학을 위한 Standards라 할 수 있는데, Treffers, de Moor, Streefland, Feijs 등이 주요 저자로 참여하여 초등학교 수학을 위한 다양한 예들과 더불어 기초적인 수 기능, 지필 알고리즘, 비와 백분율, 분수와 소수, 측정, 기하학의 일부 영역의 지도에 대한 상세한 기술이 되어 있으며, 지금도 이런 연구가 계속되고 있다(van den Heuvel-Panhuizen, 2001b, 2005).
- 4) TAL은 Tussen Annex Leerlijnen라는 네덜란드어의 약자로 학습 교수 경로에서 중간 성취 목표라는 의미이다. 이 프로젝트는 네덜란드의 교육부가 1993년 처음 제정하고 1998년에 개정한 초등학교 수학을 위한 핵심목표를 구체화하기 위한 목적으로 시작되어, 초등학교 학생들이 거쳐야 할 대략적인 경로와 성취 목표를 제시하고 있다. 현재는 유치원과 초등학교를 위한 자연수와 연산, 유치원 1, 2학년과 초등학교 1, 2학년을 위한 측정과 기하가 완성되어 있다(van den Heuvel-Panhuizen, 2001a, van den Heuvel-Panhuizen, & Buys, 2005).
- 5) 방향 나타내기, 구성하기, 모양과 도형으로 조작하기 무엇을 의미하는지는 III장에서 설명하고자 한다.
- 6) 네덜란드에서는 교육과 관련해서는 학교와 교사들에게 많은 자유가 주어지고 초등학교말 시험은 있지만 의무적인 것은 아니며 학교 진로에 있어서도 교사의 조언이 가장 영향력이 크다. 이런 이유로 공식적인 초등 수학 교육과정 문헌이 존재하지 않고, 교과서는 교과서 저자들이 핵심목표를 고려하여 독립적으로 개발하는데, 핵심목표 또한 상세하지 않고, Proeve와 TAL의 아이디어를 활용할 수 있지만 강제력은 없다. 그럼에도 불구하고 많은 모임을 통해서 조정해 가는 관계로 초등학교 교과서의 내용은 약간의 차이가 있을 뿐 전체적인 내용은 흡사하다(van den Heuvel-Panhuizen, 2001b, 2005). 네덜란드에서 RME의 영향을 받은 교과서는 여러 가지가 있는데, 최근에 가장 중요한 교과서 시리즈는 Pluspunt, De wereld in getallen, Wis ed Reken, Rekenrij, Alles Telt, Talrijk 등이 있다(van den Heuvel-Panhuizen: 2001b). 또한 이런 교과서를 채택한 초등학교는 1990년대 이후로 네덜란드 초등학교 전체의 약 80%에 달하고 있다. 따라서 본고에서는 그 중 하나인 Pluspunt 교과서를 중심으로 지도되고 있는 내용을 구체적으로 살펴보고자 한다.

## 1. 네덜란드의 초등학교 기하 교육과정의 성취 목표

1998년 네덜란드의 교육부(Ministry of Education, Culture and Sciences)에서는 다음과 같이 수학교육이 지향해야 할 일반 목표를 다음과 같이 제시하고 있다(van den Heuvel-Panhuizen, 2001a: 249-250).

산술/수학교육은 학생들에게 다음과 같은 것을 가르치는 것을 목표로 한다.

- 산술과 수학을 일상 경험과 연결하기
- 기초기능을 획득하고, 간단한 수학 언어를 이해하며, 이를 실제 상황에 응용하기
- 자기 자신의 수학적 활동을 반성하고 이런 활동의 결과의 정확성을 점검하기
- 간단한 관계, 규칙, 구조를 인식하고 발견하기
- 탐구 전략과 추론 전략을 자기 자신의 언어로 기술하고 사용하기

위에 제시된 일반적인 목표는 문제해결, 연결성, 추론, 의사소통, 표현 등의 수학적 소양(NCTM, 2000)을 강조하는 세계적인 동향을 반영할 것일 뿐만 아니라 네덜란드의 대다수의 초등학교에서 적용되고 있는 RME의 철학을 반영한 것이라 할 수 있다.

이런 일반 목표 외에 기능, 산술, 비와 퍼센트, 분수와 소수, 측정, 기하의 각 내용 영역별로 초등학교 말까지 도달해야 할 핵심 목표를 제시하고 있는데 그 중 우리나라의 도형 영역에 해당하는 기하 영역의 핵심 목표를 살펴보면 <표 III-1>과 같다<sup>7)</sup>.

<표 III-1> 네덜란드의 초등학교 기하 영역 핵심 목표

영역	핵심 목표
기하	<ul style="list-style-type: none"> <li>· 학생들은 공간을 기하학적으로 조직하고 기술할 수 있는 간단한 개념과 관념을 자유롭게 다룰 수 있어야 한다.</li> <li>· 학생들은 공간적으로 추론할 수 있어야 한다. 공간 추론 과정에서 학생들은 모델 구성, 평면도, 지도, 사진, 위치, 방향, 거리, 척도에 대한 정보를 사용할 수 있어야 한다.</li> <li>· 학생들은 그림자를 설명하고, 여러 가지 도형들을 구성하며, 규칙적인 대상들의 전개도를 인식할 수 있어야 한다.</li> </ul>

## 2. 현실적 수학교육에 기초한 네덜란드 초등학교 기하 교과서의 내용 개관

현실적 수학교육을 반영한 초등학교 교과서는 앞에서 제시한 기하 영역의 핵심 목표를 성취하는 것을 포함하여 방향 나타내기, 구성하기, 모양과 도형으로 조작하기에 관련된 다양한 주제들로 이루어지는데, 그 주제와 심화의 정도는 교과서마다 다양하다. 이 절에서는 Pluspunt 교과서에서 지도되는 내용을 교과서, 안내서, 지도서를 바탕으로 구체적으로 살펴보고자 한다(Pap, Janssen, & Pap, 2003a, 2003b, 2003c, 2003d; Munsterman & de Weerd-Fourdraine, 2003a, 2003b, 2003c, 2003d; Van Gool, Janssen, & Munsterman, 2003a, 2003b, 2003c, 2003d; Groen, Rouvroye, van de Straaten, & de Weerd-Fourdraine, 2003a, 2003b, 2003c, 2003d; Janssen, Munsterman, & Rouvroye, 2003a,

7) 네덜란드 교육부에서는 2004년 초등학교 수학을 위한 핵심 목표를 다시 한 번 개정했는데, 이는 일반 목표와 이전의 기능, 산술, 비와 퍼센트, 분수와 소수, 측정, 기하의 6개의 영역에 대해 제시했던 핵심 목표를 일반 목표와 수와 연산, 측정과 기하의 2개의 영역으로 축소하여 제시하였다. 이에 따른 기하 관련 핵심 목표를 제시하면 '간단한 기하 문제를 해결하는 것을 학습하기'이다. 이는 1998년보다 더 간단하게 제시된 것으로 교사들에게 더 많은 자유를 부여한 것이며, 실제로 현행 지도되고 있는 내용에는 거의 영향력이 없을 것으로 보인다(van den Heuvel-Panhuizen, 2005).

2003b, 2003c, 2003d; Boersma, van Gool, Groen, van der Straaten, & de Weerd-Fourdraine, 2003a, 2003b, 2003c, 2003d).

가. Pluspunt 교과서의 기하 영역의 목표  
본 교과서에서는 지도서에 네덜란드의 교육  
부에서 제시하고 있는 핵심목표를 반영하여 기  
하 영역에 해당하는 기하와 공간 방향  
(Meetkunde en ruimtelijke oriëntatie)에 대해 학  
년별로 최소 목표를 제시하고 있다<sup>8)</sup>. 이를 방  
향 나타내기, 구성하기, 모양과 도형으로 조작  
하기로 분류하여 제시하면 <표 III-2>와 같다.

방향 나타내기(orienting)는 공간에서 자신의  
위치를 결정하거나 다른 물체들의 위치를 정하

고, 공간 내에서의 이동을 표현하는 것, 구성하  
기(constructing)는 스스로 무엇인가 만드는 모든  
활동, 즉 2차원 도형과 3차원 도형들을 어떤  
조건에 따라 결합하는 것, 모양과 도형으로 조  
작하기(operating with shapes and figures)는 기하  
학적 변환을 의미한다(de Moor, 1990, 2005).

최소 목표는 해당되는 학년까지 도달해야 할  
최소 목표로, 실제로는 최소 목표가 제시되지  
않은 학년에서도 기하 영역의 내용을 다양하게  
지도하고 있다.

나. Pluspunt 교과서 기하 영역의 학년별  
지도 내용

이 절에서는 방향 나타내기, 구성하기, 모양

<표 III-2> 기하 영역의 학년별 최소 목표

학년	관련영역	최소 목표(Minimundoel)
1	3A 구성하기	· 쌓기나무로 만든 간단한 건물 모양에서 개수 정하기
	3B 구성하기	· 평면도와 쌓기나무로 만든 건물 모양 사이의 관련짓기
2	방향 나타내기	· 공간에서 자신의 위치를 알기 · 왼쪽, 오른쪽, 가까이, 멀리와 같은 용어 사용하기 · 쌓기나무로 만든 건물 모양의 평면도/건물의 스케치 그리기
	4B 방향 나타내기 구성하기	
4	6A 방향 나타내기 방향 나타내기 방향 나타내기 모양과 도형으로 조작하기	· 자신의 주위 환경(생활주변)에서 수평과 수직 개념 알아내기 · 지도와 실제 사이의 관계 알기 · 좌표를 이용하여 지도 위의 장소를 나타내기 · 축척 기호법을 사용하기(예를 들면 1:100은 1cm가 실체는 100cm임)
	6B 방향 나타내기 방향 나타내기 구성하기 구성하기 모양과 도형으로 조작하기 모양과 도형으로 조작하기	
6	8A 구성하기 모양과 도형으로 조작하기	· 공간 모델을 이용하여 그것의 전개도를 파악하기 · 축척과 거리선을 이용하여 지도 위의 거리 구하기
	8B 방향 나타내기 방향 나타내기	

8) Pluspunt 교과서에서는 유치원 교과서가 1A, 1B, 2A, 2B이고, 초등학교 교과서가 3A부터 시작하기 때문에 우리나라 1학년에서 6학년까지의 내용이 3A부터 8B까지에 해당된다.

과 도형으로 조작하기와 관련하여 Pluspunt 교과서에서는 학년별로 어떤 내용을 어떤 관점으로 지도하고 있는지 몇 가지 예를 들어 살펴보고자 한다.<sup>9)</sup> 방향 나타내기에는 크게 위치, 지도와 좌표, 구성하기에는 공간 표현, 도형 인식, 도형 구성, 공간 통찰, 모양과 도형으로 조작하기에는 규칙성, 대칭·회전·평행, 축소와 확대를 구분해 볼 수 있다.<sup>10)</sup> 본고에서는 각 범주의 하위 범주에 따른 학년별 내용과 이전의 내용을 통합하고 확장하는 6학년의 주제 단위를 살펴보고자 한다.

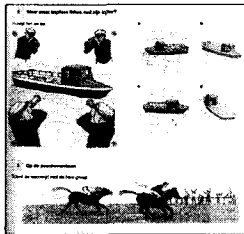
## 1) 방향 나타내기

### 가) 위치

위치는 1학년에서 6학년까지 계속 다루어지는 중요한 주제인데, 이는 공간 개념을 기초로 방향을 정하는 것으로, 직관적으로 알고 있는 것을 반성에 의해 의식하는 것과 관련된다. 이



[그림 III-1] 1학년 위치  
(Pap, Janssen, & Pap,  
2003a: 131)



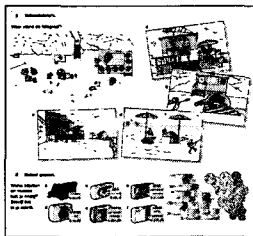
[그림 III-2] 2학년 위치  
(Munsterman, & de  
ceerd-Fourdraine 2003a: 83)

주제는 대부분의 내용이 사진들을 보고 그 사진을 찍은 위치가 어디인지를 알아보는 것이다. 이는 de Moor(1990, 2005)에 따르면 평행 개념과 각 개념 등과 관련된다. 1학년의 내용으로는 [그림 III-1]과 같이 농장에서 여러 사진사가 사진을 찍고 있는 모습과 그들이 찍은 사진을 비교해서 어느 사진을 어느 사진사가 찍은 것인지 알아내는 활동, 거리나 높이를 달리 해서 찍은 사진을 비교해서 사진사의 위치를 찾는 활동이나 눈 위의 발자국을 보고 어느 방향으로 간 것인지 추적해 보는 활동들을 포함한다. 2학년에서는 [그림 III-2]와 같이 동일한 대상에 대한 서로 다른 사진을 보고 사진사의 위치를 찾는 활동을 한다. 이 때 거리, 높이, 방향이 중요한 역할을 하며 각도에 따라 보이는 부분과 보이지 않는 부분에 대한 활동도 포함한다. 3학년에서는 2학년의 활동을 계속하면서 사진에 작게 보이는 것은 사진사로부터 멀리 떨어져 있고 크게 보이는 것은 가까이 있다는 것, 즉 멀어질수록 작아진다는 것을 이해한다. 4학년에서는 이전 학년의 활동이 더욱 심화되는데, [그림 III-3]과 같이 전망 사진을 보고 방향, 거리, 높이를 고려하여 사진사의 위치를 찾으며, 어떤 특정한 위치에서 보이는 것과 잘 보이지 않는 것이 무엇인지 살펴보고, 근접 촬영 개념이 주요 내용으로 다루어진다. 또한 태양의 위치에 따라 그림자의 길이와 방향이 달라진다는 사실을 이해한다.

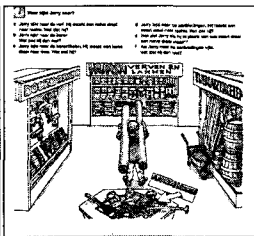
9) Pluspunt 교과서는 1년에 3종류의 교과서와 2종류의 연습책, 즉 수업 교재(Lesboek), 필수 교재(Opdrachtenboek), 심화 교재(Plusboek), 연습 교재(Werkboek), 심화 연습 교재(Pluswerkboek)로 구성되어 있고, 지도서에는 각 학년에서 사용할 컴퓨터 프로그램에 대한 설명도 제시되어 있다. 이는 필수적으로 해야 하는 활동과 학생들의 수준에 따른 다양한 활동으로 구분할 수 있는데, 본고에서는 교과서 중에는 수업교재, 필수교재, 연습교재를 중심으로, 안내서와 지도서를 참조해서 필수적인 내용만 살펴보고, 컴퓨터 프로그램에 대한 내용은 다루지 않는다.

10) 이런 구분은 앞에서 제시한 방향 나타내기, 구성하기, 모양과 도형으로 조작하기에 대한 설명을 바탕으로 Pluspunt 교과서와 지도서를 분석하여 연구자가 분류한 것이다. 현실적 수학교육의 특징상 한 가지 내용이 고립적인 것이 아니라 여러 영역에 연결되어 있음을 고려할 때, 이런 구분은 범주들이 서로 소인 것으로 구분되는 것이 아니라 서로 중복되어 있는 부분이 많이 있지만, 수학의 내용 요소를 추출하기 위해서 불가피하게 고려한 것이다.

5학년에서는 사진을 찍은 위치를 찾는 것과 그림자에 대한 탐구 외에 바라보기와 관련하여 시선에 대한 탐구가 이루어진다. 이는 de Moor(1990, 2005)에 따르면 직선이 중요한 역할을 하는 데, 직선은 눈으로 대상을 바라볼 때 눈과 대상을 연결하는 선이거나 빛이 따라가는 선이며, 이를 통해 점, 방향, 각, 거리, 평행, 직선의 교차 등의 개념과 이런 개념 사이의 관계가 다루어진다. 예를 들면 [그림 III-4]와 같이 한 아이가 어디를 바라보고 있는지, 한 곳을 응시하고 있을 때 보이는 부분과 보이지 않는 부분은 어디인지, 반 바퀴 회전하면 어디를 바라보게 되는지 등의 활동이 포함된다. 바라보기와 관련된 활동은 수학의 여러 영역과 복합적으로 관련되어 있어서 어느 한 범주에 포함시키기가 어렵다. 즉, 바라보기 활동은 시선, 그림자, 닳음, 확대와 축소, 투시, 축척 등 다양한데 이런 내용이 5학년의 주요 내용이 된다. 6학년에서는 시선과 그림자, 비를 이용하여 나무의 높이를 측정하는 활동을 포함하여 바라보기와 관련된 활동이 주요 내용이 된다.



[그림 III-3] 4학년 위치 (Groen, Rouvroye, van de Straaten, de eerd-Fourdraine, 2003a: 75)



[그림 III-4] 5학년 바라보기 (Janssen, Munsterman, Rouvroye, 2003e: 69)

### 나) 지도와 좌표

지도와 좌표는 2학년에서 6학년까지 다루어지는 중요한 주제이다. 위치가 공간에서의 위치와 방향을 의미하는 것이라면 지도와 좌표는

평면에서의 위치와 방향을 의미하는 것으로 다양한 지도에서 어떤 장소의 위치와 방향을 표시하거나, 한 장소에서 다른 장소로 이동하는 경로와 거리를 구하는 활동과 관련된다. 2학년에서는 모눈이 그려진 지도 위에서 여러 가지 경로를 읽고 표현하는 것이 주요 내용이다. 예를 들면 집, 교회, 빵집, 학교, 수영장이 있는 모눈이 표시된 지도에서 학교에서 수영장 가는 길을 찾거나 [그림 III-5]와 같이 Niels, Fatima, Marja, Jaap, Sandra, Kim의 집, 호수, 교회, 공장 등이 있는 모눈이 표시된 지도에서 경로 찾기, 걸리는 시간 구하기, 최단 경로 찾기, 왼쪽/오른쪽, 위/아래, 가까이/멀리 등의 용어를 사용한다. 이는 조금 시간이 지난 후 [그림 III-6]과 같이 가로에는 1, 2, 3, 4, 5, 세로에는 A, B, C, D, E, F와 같은 격자 좌표가 표시된 지도에서 지도 위의 장소를 (B, 3)과 같은 격자 좌표로 표시하고, 지도에 있는 대상간의 거리를 어렵으로 비교하는 활동을 한다. 3학년에서는 2학년에서 했던 격자 좌표가 표시된 지도에서 경로를 구하거나 지도 위의 대상을 격자 좌표로 표시하는 활동을 계속하면서 화살표를 사용해서 여러 가지 경로를 기술하는 활동이 주요 내용이 된다. 화살표는 오른쪽, 왼쪽, 위, 아래를 나타내는 화살표가 있는데, 화살표로 표시된 경로를 따라가 보거나 화살표로 경로를 표시하는 활동을 한다. 4학년에서는 3학년의 연속으로 네덜란드의 여러 도시의 격자 좌표가 표시된 지도에서 화살표를 사용한 경로에 대한 설명, 대상을 격자 좌표로 표시하는 활동, 장소간의 거리를 구하는 활동, 주어진 이정표에 맞는 장소를 찾는 활동이 심화된다. 이와 더불어 [그림 III-7]과 같이 좌표평면과 점좌표가 도입되고, 최단 경로를 찾는 방법을 좀더 다루며, 축척이 도입된다. 5학년에서는 4학년의 활동에 이어서 격자 좌표와 점좌표를 이용해서 경로를



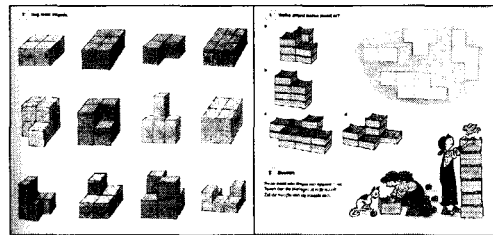
기술하고 장소의 위치를 나타내는 활동이 심화된다. 또한 지도에서 범례를 해석하고 만드는 활동과 마을 사진을 범례를 사용한 평면지도로 변환하는 활동도 제시된다. 6학년에서는 앞에서 배운 내용들을 계속 유지한다.

## 2) 구성하기

### 가) 공간 표현

공간 표현은 1학년에서 5학년까지 다루어지는 중요한 주제이다. 이는 3차원 대상을 2차원으로 표현하거나 2차원 표현으로부터 3차원 대상을 구성하는 것을 의미한다. 1학년에서는 처음에는 [그림 III-8]과 같이 상자를 쌓아놓은 모양이나 쌓기나무로 만든 모양의 2차원 표현, 즉 겨냥도를 보고 잘 보이는 부분과 잘 보이지 않는 부분을 구분해 가면서 쌓기나무의 개수를 구해보는 활동, 방이나 교실에 있는 물건들을 그림으로 나타낸 종이를 오려붙여서 평면도를 만드는 활동, 쌓기나무로 만든 모양과 이에 맞는 평면도 연결하는 활동, 쌓기나무로 만든 모양의 평면도 만드는 활동, 캠핑 장소를 위에서 찍은 사진을 보고 캠핑 계획 세우는 활동, 칸막이를 가운데 두고 한 아이가 쌓기나무로 모양을 만들면서 설명하는 것을 듣고 다른 아이가 쌓기나무로 만드는 활동 등이 포함된다. 2학년에서는 쌓기나무로 만든 모양을 보고 쌓기

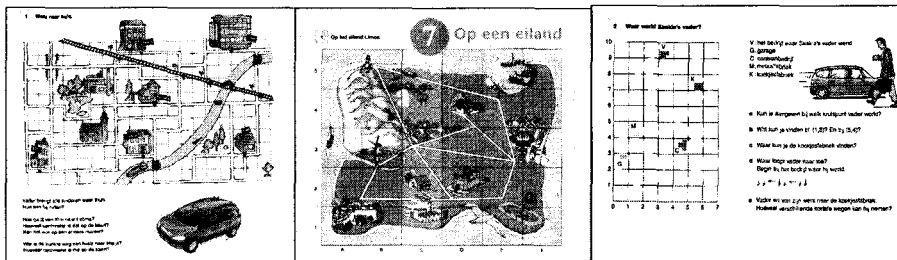
나무로 모양을 만드는 활동, 쌓기나무로 모양을 만들고 왼쪽/오른쪽, 앞/뒤, 위/아래 등의 용어를 사용하여 설명하는 활동, [그림 III-9]와 같이 쌓기나무로 만든 모양과 평면도 연결하는 활동, 층수가 표시된 평면도를 보고 쌓기나무로 모양 만드는 활동, 상자를 쌓아놓은 모양을 보고 직접 쌓은 후 평면도를 그리거나 스케치하는 활동을 포함한다. 이런 활동에서 학생들 자신의 방법에 대해 논의하도록 하는 것이 중요한데, 예를 들면 쌓기나무로 만든 모양을 보고 평면도를 만들 때 안 보이는 부분이 있기 때문에 평면도에 표시하는 층수가 정확하지 않을 수도 있음을 논의하는 것이 필요하다.



[그림 III-8] 1학년  
쌓기나무의 개수 구하기  
(Pap, Janssen, & Pap,  
2003a: 19)

[그림 III-9] 2학년 상자  
모양과 평면도 연결하기  
(Munsterman, & de  
Weerd-Fourdraine, 2003a:  
58)

3학년에서는 [그림 III-10]과 같이 2학년에서 쌓기나무로 만든 모양을 층수가 표시된 평면도

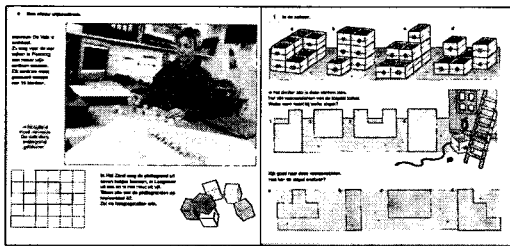


[그림 III-5] 2학년 경로 찾기와  
거리 구하기  
(Munsterman, & de  
Weerd-Fourdraine, 2003a: 70)

[그림 III-6] 2학년 격자 좌표와  
거리 구하기  
(Munsterman, & de  
Weerd-Fourdraine, 2003a: 74)

[그림 III-7] 4학년 점좌표와  
화살표로 경로 표시하기  
(Groen, Rouvroye, van de Straaten,  
de Weerd-Fourdraine, 2003a: 58)

로 나타내고, 그 개수가 몇 개인지, 보이지 않는 부분들이 있는지를 탐구했던 내용을 더욱 확장한다. 쌓기나무로 만든 모양을 다양한 위치에서 바라본 그림을 보고 다른 위치에서는 어떻게 보이는지 논의하며, 실제로 만들어 보고 다양한 위치에서 관찰한다. 새로운 중심 도시를 설계하면서 쌓기나무의 개수나 조건이 주어지면, 만들 수 있는 건물 모양의 수가 제한된다는 사실도 인식한다. 평면도를 충분히 다룬 후에 [그림 III-11]과 같이 입면도의 개념이 도입되고, 측면도도 다루어진다. 4학년에서는 3학년에서 다루었던 공간 추론의 내용을 더욱 확장해서 쌓기나무로 만든 모양의 층수가 표시된 평면도 그리기, 층수가 표시된 평면도로 쌓기나무로 모양 만들기, 쌓기나무로 만든 모양에서 쌓기나무의 개수 구하기, 쌓기나무로 만든 모양의 겨냥도와 투시도에서 보이는 것과 보이지 않는 것 나누어 개수 구하기, 쌓기나무로 만든 모양과 평면도를 회전 또는 대칭을 통해 서로 연결하기 등을 다룬다. 5학년에서는 쌓기나무로 만든 모양의 층수가 표시된 평면도 그리기를 간단하게 다룬다.



[그림 III-10] 3학년 평면도에 맞는 쌓기나무 모양 만들고 층수 표시하기 (Van Gool, Janssen, Munsterman, 2003a: 79)

[그림 III-11] 3학년 쌓기나무 모양에서 입면도 인식하기 (Van Gool, Janssen, Munsterman, 2003a: 130)

위에서 살펴본 바와 같이 공간 표현은 평면도 활동을 통해 3차원의 모양을 2차원으로 나타내는 공간 시각화 능력이나 2차원으로 표현

된 모양들을 결합해서 보이는 부분과 보이지 않는 부분들을 고려하면서 3차원 모양을 만들거나 생각하는 과정에서 가설을 세우고, 반박하거나 입증하는 공간 추론의 과정이 중요한 역할을 한다.

#### 나) 도형 인식

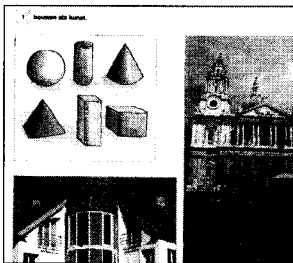
도형 인식은 장면이나 건물, 그림 등에서 입체도형이나 평면도형을 인식하는 것을 의미한다. 1학년에서는 [그림 III-12]와 같이 다양한 건물 모양에서 구, 원기둥, 원뿔, 삼각뿔, 직육면체, 정육면체 등의 입체도형 찾기, 서양 정원 사진의 다양한 나무 모양에서 입체도형 찾기, 정사각형을 여러 개의 도형으로 분할한 그림들 중에서 삼각형 두 개와 직사각형 세 개로 만든 성 모양을 만들 수 있는 그림 찾기 등을 다룬다. 2학년에서는 [그림 III-13]과 같이 직사각형을 여러 개의 선으로 분할한 그림에서 삼각형, 사각형, 오각형 모양 찾기, 도서관에 있는 서로 다른 모양의 책을 분류하기, 여러 모양으로 장식된 케이크 반쪽을 보고 모양들을 비교하여 나머지 반쪽 찾기, 여러 가지 상자 모양을 관찰하기, 다각형의 케이크 밀면 모양을 보고 변의 수에 따라 접힌 케이크 옆면에 붙일 종이띠 찾기 등을 다룬다. 3학년에서는 직사각형을 여러 개의 선으로 분할한 그림에서 삼각형과 사각형 찾거나 [그림 III-14]와 같이 텐트에 맞는 사각형, 삼각형, 원, 오각형, 육각형 등의 깔개 모양 찾기와 같은 3차원 도형의 밀면 모양 찾기를 하면서 종이본으로 다양한 텐트를 만들어 보기도 하고 텐트 모양과 측면의 모서리의 수에 주의를 기울이면서 밀면의 변의 수 등을 다룬다. 5학년에서는 여러 시각을 나타내고 있는 시계에서 두 바늘이 이루는 각이 예각인지, 직각인지, 둔각인지 인식하기, 여러 가지 상징 기호(맑음, 흐림 등)가 나타내는 것을 이해하기

등을 다룬다. 6학년에서는 안이 들여다보이는 정육면체의 대각선 방향으로 면들이 하나 또는 그 이상으로 들어가 있고 왼쪽 위-오른쪽아래면(빨강), 왼쪽 아래-오른쪽 위(초록), 뒤쪽 위-앞쪽 아래 면(파랑), 앞쪽 위 뒤쪽 아래 면(노랑)에 각각 색을 정했을 때, 빨강, 초록, 파랑, 노랑, 빨강과 노랑, 빨강과 초록, 빨강과 파랑, 초록과 노랑, 파랑과 초록, 파랑과 노랑, 노랑/초록/파랑/노랑 정육면체에서 안에 들어 있는 면들을 색에 맞추어 칠하기에서 정육면체의 관련된 면을 인식하기 등을 다룬다.

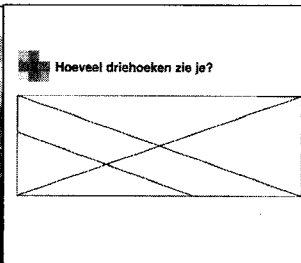
다) 도형 구성

도형 구성은 2학년에서 6학년까지 다루는 내용으로, 2차원 도형과 3차원 도형들을 어떤 조

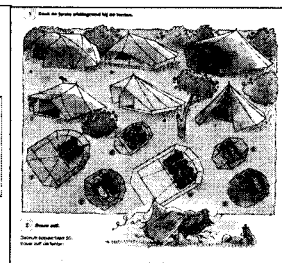
건에 따라 그리거나 직접 만드는 것을 의미한다. 2학년에서는 둘레의 길이가 24cm인 사각형 그리기, 시계의 눈금을 연결해서 세 변의 길이가 같은 삼각형과 별 모양 그리기, 조각들을 맞추어 정사각형 재구성하기 등을 통해 여러 가지 사각형과 삼각형을 다룬다. 3학년에서는 여러 조각들을 맞추어 사각형이나 원을 재구성하기, 전개도로 정육면체나 상자 만들기, 사각기둥, 삼각기둥, 정육면체, 팔각기둥의 전개도 찾기, [그림 III-15]와 같이 전개도의 각 면 위에 눈의 수를 표시하면서 주사위 만들기, [그림 III-16]과 같이 종이를 삼각기둥 모양으로 접어서 다리 만들고 설계하기 등을 다룬다. 이 때 학생들은 평면도형과 입체도형의 관계를 알게 되며, 전개도를 보고 어떤 모양을 구성할 수 있을지 머릿속



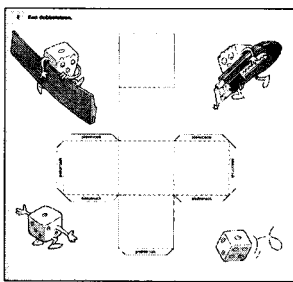
[그림 III-12] 1학년 건물에서 입체도형과 대칭 인식하기 (Pap, Janssen, & Pap, 2003a: 118)



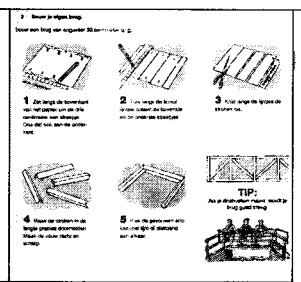
[그림 III-13] 2학년 분할된 직사각형에서 삼각형 인식하기 (Munsterman, & de Weerd-Fourdraine, 2003e: 37)



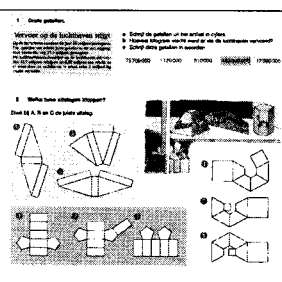
[그림 III-14] 3학년 3차원 도형의 밀면 모양 찾기 (Van Gool, Janssen, Munsterman, 2003a: 106)



[그림 III-15] 3학년 전개도로 주사위 만들기 (Van Gool, Janssen, Munsterman, 2003a: 11)



[그림 III-16] 3학년 삼각기둥으로 다리 만들기 (Van Gool, Janssen, Munsterman, 2003a: 83)



[그림 III-18] 6학년 다양한 상자 모양의 전개도 (Boersma, van Gool, Groen, van der Straaten, de Weerd-Fourdraine, 2003a: 56)

에서 그려보아야 하고, 그 이후에 모양을 직접 접으면서 알아보아야 한다. 4학년에서는 다양한 전개도를 이용해서 날개를 어떻게 붙여서 주사위를 만드는지를 탐구하기, 성냥개비로 만든 모양에서 몇 개의 성냥개비를 이동해서 다른 개수의 사각형을 만드는 성냥개비 퍼즐을 다룬다.

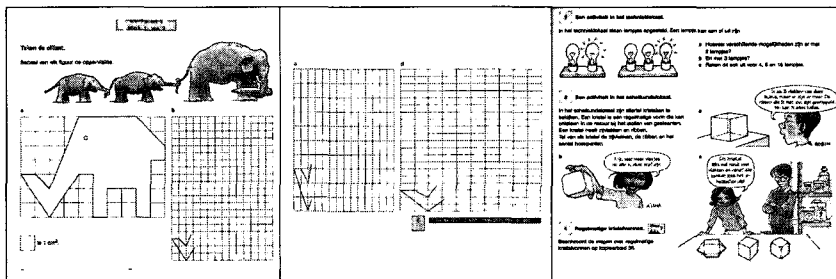
5학년에서는 [그림 III-17]과 같이 큰 정사각형과 작은 정사각형, 좁은 직사각형과 넓은 직사각형으로 이루어진 모눈종이 위에 모눈 수는 같게 코끼리 그림 그리고, 전개도를 이해하고 정육면체 모양의 상자 만들기 활동을 한다. 이때 학생들은 전개도를 이용하여 상자를 직접 구성하기보다는 정신적 수준에서 논의를 기초로 해결책을 찾는 여러 가지 상황과 과제에 접하게 된다. 따라서 학생들은 대상에 대한 정신적 표상을 회전하고 연결해서 생각해야 한다. 그러나 이 과정에서 어려움을 겪는 경우에는 전개도를 만들어서 모양을 만들어보는 활동을 하고 논의한다. 6학년에서는 5학년에서 했던 정신적 수준에서의 논의를 이어가면서 [그림 III-18]과 같이 사각뿔대, 삼각기둥, 오각기둥의 상자모양의 전개도 등 더 다양한 도형을 구성한다.

### 라) 공간 통찰

공간 통찰은 6학년에서 중점적으로 이루어지

는 것으로 대상을 직접 구성하기보다는 시각적 표상과 정신적 표상을 조작하여 정신적 수준에서 논의를 기초로 문제를 해결하는 것을 의미한다. 그러나 이는 이미 앞의 여러 범주, 공간 표현이나 도형 구성에서도 함께 다루어진다.

여기서는 지도서에서 분류된 부분만 생각하기로 한다. 2학년에서는 직접적인 구성이 같이 수행되지만 탱그램 조각으로 고양이, 새, 집, 새로운 다각형, 걸어가는 사람 등 다양한 모양 만들기에서 실제로 탱그램 조각을 놓아보기 전에 머릿속에서 여러 조각들을 놓아본 후에 직접 조각들을 맞추어 보는 활동이 다루어진다. 6학년에서는 다양한 과자 모양과 과자 굽는 틀을 펼쳐 놓은 모양을 보고 서로 맞는 것을 찾기, 가로 0.8cm, 세로 0.8cm, 높이 16m인 직육면체 모양의 상자과 6개의 그림을 제시하고 이 상자에 맞는 전개도를 찾기, 전개도가 되는 그림과 전개도가 되지 않는 그림 만들기, 정육면체와 정팔면체의 상자과 각 상자에 대해 3개씩 그림을 제시하고 각 상자에 맞는 전개도 찾기, [그림 III-19]와 같이 투명한 도형, 즉 직육면체, 직육면체의 각 꼭지점에서 삼각형을 잘라낸 도형, 육각기둥의 밑면에 육각뿔이 달린 도형의 면, 모서리, 꼭지점의 수 구하기, 18개의 쌍기 나무로 9개씩 2층으로 쌓은 모양에서 맨 위의



[그림 III-17] 5학년 여러 모양과 크기의 격자 위에 코끼리 그림 그리고

(Janssen, Munsterman, Rouvroye, 2003f: 4)

[그림 III-19] 6학년 공간통찰에 의해 투명한 입체도형의 면, 꼭지점의 수 구하기

(Bosma, van Gool, Groen, van der Straaten, de Weerd-Fourdaire, 2003a: 67)

층에 있는 쌓기나무에는 1부터 9까지의 숫자가 적혀 있을 때, 숫자가 적혀 있는 쌓기나무 하나를 빼낼 때 부피는 어떻게 되는지, 어떤 쌓기나무를 빼낼 때 겉넓이가 작아지는지, 작아지게 하는 것은 몇 개나 되는지, 어떤 쌓기나무를 빼낼 때 겉넓이가 커지는지, 그런 것은 몇 개나 있는지, 어떤 쌓기나무를 빼내면 겉넓이가 변하지 않는지 등을 통해 겉넓이와 부피 사이의 관계 알기, 주사위의 숫자가 일부 표시된 그림에서 전개도 완성하기, 서로 마주보는 수의 합이 9인 정팔면체 주사위의 전개도 완성하기, 여러 개의 그림에서 정육면체, 정사면체, 직육면체의 전개도 찾기, 정육면체의 서로 다른 전개도 4개를 제시하고 정육면체를 만들기 위해서는 몇 개의 날개를 어느 부분에 만들어야 하는지 찾기, 정육면체의 겨냥도에서 높이의 반에 해당되는 부분까지 색칠되어 있을 때 이에 맞게 여러 개의 전개도에 색칠하기 등을 다룬다.

### 3) 모양과 도형으로 조작하기

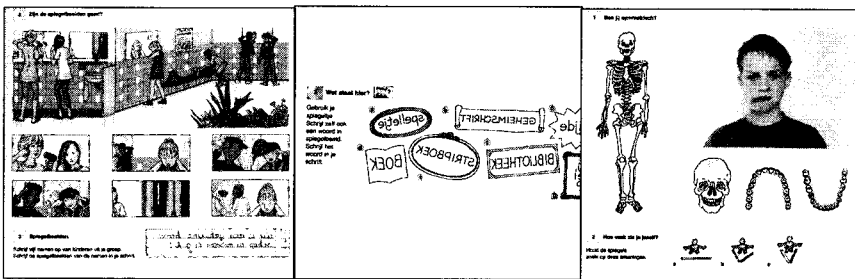
#### 가) 규칙성

규칙성은 평면이나 공간에서 제시된 대상들의 규칙을 발견하고 확장하는 활동으로 이루어진다. 규칙을 발견하고 확장하는 과정에서 학생들은 탐구하고, 분석하고, 논리적으로 설명을

할 수 있어야 한다. 1학년에서는 줄에 정육면체 모양, 구 모양이 반복되어 있을 때 규칙을 발견하고 확장하기, 케이크를 장식하기, 일부 제시된 타일 무늬를 보고 규칙을 발견하고 확장하기 등이 다루어진다. 2학년에서는 줄에 널린 여러 가지 모양의 깃발을 보고 규칙을 찾아 확장하기, 줄에 깃발로 다양한 규칙 만들기 등이 다루어진다.

#### 나) 대칭 · 회전 · 평행

대칭 · 회전 · 평행은 도형을 조작하고 이동하는 것과 관련된다. 1학년에서는 두 사람이 마주 보고 앉아 서로 상대방의 카드를 보면서 같은 모양을 찾기, 구, 원기둥, 원뿔, 삼각뿔, 직육면체, 정육면체 등 다양한 모양, 건물 사진에서 대칭을 인식하기, 서양 정원 사진에서 대칭 인식하기, 일부 무늬가 제시된 머플러의 무늬를 대칭이 되도록 완성하기, 종이를 접어서 일부를 오려낸 그림에서 대칭 인식하기 등을 다룬다. 2학년에서는 [그림 III-20]과 같이 수영장 탈의실에서 여러 사람들이 여러 거울에 비친 모습들을 살펴보기, 거울에 비친 글자 모습 쓰기, [그림 III-21]과 같이 거울로 비추어 볼 때 바로 보이는 경서 읽기, 탱그램 조각으로 다양한 모양 만들기 등이 다루어진다. 이 때 거울



[그림 III-20] 2학년 거울에 비친 모습 살펴보기  
(Munsterman, & de Weerd-Fourdraine, 2003a: 23)

[그림 III-21] 2학년 경서 읽기  
(Munsterman, & de Weerd-Fourdraine, 2003e: 44)

[그림 III-22] 5학년 신체에서 대칭과 대칭축 찾기  
(Janssen, Munsterman, Rouvroye, 2003a: 106)

을 직접 사용하여 도형들을 조작하고 이동하는 활동을 통해 원래의 모양과 거울에 비친 모양을 비교한다. 3학년에서는 단추 4개, 안경 5개가 놓여 있을 때 여러 군데 거울을 놓아보고 각각 몇 개의 단추와 안경이 생기는지 알아보기, 다양한 사선 무늬가 있는 종이들 중에서 가운데 세로 접선 부분에 거울을 놓았을 때 원래의 모양과 똑같은 모양이 생기는 종이 찾기, 여러 휘장에서 대칭인 것 찾기 등이 다루어진다. 4학년에서는 클럽을 상징하는 무늬에서 대칭축 찾기, 쌓기나무로 만든 모양들과 평면도들을 회전과 대칭을 통해 서로 같은 것끼리 찾기 등이 다루어진다.

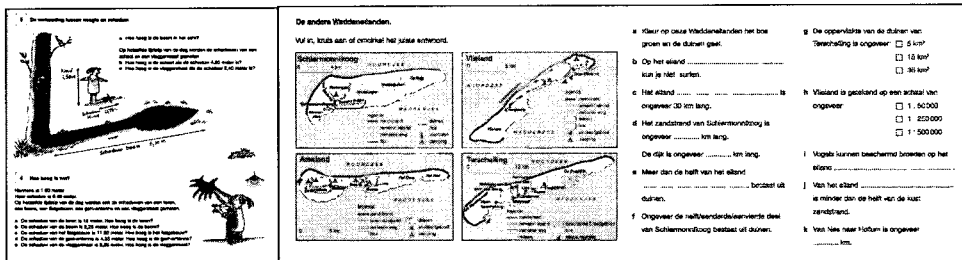
5학년에서는 [그림 III-22]와 같이 사람의 골격 사진, 얼굴을 실룩인 모습과 두개골, 이를 보고 대칭인 것과 대칭축 찾기, 거울 두 개를 평각, 직각, 예각으로 이어서 세워 놓고 가운데 한 사람이 서 있을 때 어떻게 보이는지 살펴보기 등이 다루어진다. 6학년에서는 모눈종이 위에 연 모양을 확대하고 대칭이동하기, 모눈종이 위에 8각형, 화살표, 돌고래 모양을 대칭축을 중심으로 평행이동하거나 대칭이동하기, 열쇠가 꽂혀 있는 자물쇠를 대칭, 반의 반 바퀴 회전, 반 바퀴 회전해서 찍은 사진을 제시하여 어떻게 이동한 것인지 설명하기 등이 다루어진다.

#### 다) 축소와 확대

축소와 확대는 2학년에서 6학년까지 다루는 주요 내용이며, 비와 측정과 관련되어 있다. 2학년에서는 모눈종이 위에서 그림과 글씨의 축소와 확대 등이 다루어지고, 3학년에서는 축척이 1:10으로 축소된 원 모양의 그림을 실제 크기로 확대하여 그리기, 4학년에서는 축척이 제시된 지도에서 축척 이해하고 실제 거리와 걸리는 시간 구하기와 도시와 도시간의 거리표 구하기, 5학년에서는 축척을 이용하여 두 지점 사이의 거리 구하기, [그림 III-23]과 같이 길이와 그림자 사이의 비를 이용하여 나무, 학교, 깃대의 높이를 구하기, 6학년에서는 모눈종이 위에서 연 모양 확대하기, 복사기에서 종이를 축소하고 확대하는 비율 구하기와 신문광고 비용 구하기, 여러 가지 축척으로 만들어진 지도 비교하기, [그림 III-24]와 같이 네덜란드의 Wadden 섬들의 다양한 축척으로 만들어진 지도에서 축척을 이용하여 거리 구하기, 길이와 그림자 사이의 비를 이용하여 나무의 높이 구하기 등이 다루어진다.

#### 4) 주제 단원

주제 단원 '지구는 큰 구이다(De aarde is een grote bol).'는 제시된 맥락에서 공간에 대한 논의에 초점을 맞춘다. 학생들은 공간 경험에 대해 탐구하고, 분석하고, 설명한다. 지구의 공



[그림 III-23] 5학년 길이와 그림자 사이의 비로 나무 높이 구하기 (Janssen, Munsterman, Rouvroy, 2003a: 107)

[그림 III-24] 6학년 여러 섬들의 다양한 축척 지도에서 거리 구하기 (Ebersma, van Gool, Groen, van der Straaten, de Waerd-Fourdraine, 2003e: 2)

모양에 대한 탐구가 이 단원의 출발점이다. 이 단원은 이전 학년에 기하학과 공간 방향 영역에서 다루었던 내용뿐만 아니라 지리학과 밀접한 관련이 있다. 그러나 수학에 초점이 맞추어지며, 공간 현상과 공간 개념에 대한 다양한 표현, 설명, 예측을 강조한다. 이 단원에서는 이전에 배웠던 지도와 좌표, 공간 표현, 도형 구성, 대칭·회전·평행 내용의 반복과 응용을 다룰 뿐만 아니라 구 위에서 위치, 방향, 좌표, 경로 기술 등 새로운 주제를 다룬다. 구체적으로 살펴보면, 네덜란드의 주요 도시들이 표시된 지도에서 Den Haag가 자신의 학교의 어느 방향에 있는지 방위를 써서 나타내기, [그림 III-25]과 같이 지구의 여러 가지 지도를 살펴보고 가장 긴 선과 짧은 선을 찾는 등의 질문을 통해 지구 위의 경선과 위선을 도입하고 여러 도시의 좌표 구하기, [그림 III-26]과 같이 축구공, 테니스공 등을 살펴보면서 곡면을 포함한 면의 수 구하기, 지구 모형을 여러 조각으로 오려서 펼쳐 보는 활동을 통해 지구의 전개도 이해하기, 다양한 준정다면체 알아보기, [그림 III-27]과 같이 태양의 위치와 빛을 보내는 방식에 따

라 달이 보이는 방향과 달의 모양 변화에 대한 실험, 표준시간대를 도입하고 각 도시의 시간 알아보기, 정육면체의 다양한 전개도 그리기와 꼭지점의 수 구하기 등을 다룬다.

### 다. 현실적 수학교육에 기초한 기하 영역 지도 방법의 특징

이 절에서는 앞에서 살펴본 네덜란드의 현실적 수학교육에 기초한 기하 영역에서 지도 방법의 특징을 현실 공간의 탐구 중시, 직관적·비형식적 접근의 중시, 직관에서 추론으로 점진적 접근, 다른 영역과의 연결 중시, 상호작용의 중시, 경험-설명-연결의 순환 과정<sup>11)</sup> 등으로 나누어 살펴보고자 한다.

#### 1) 현실 공간의 탐구 중시

현실적 수학교육에 기초한 초등학교의 기하는 우리를 둘러싸고 있는 공간과 그 안에서 발생하는 현상의 탐구이다. 따라서 모든 기하 개념과 내용은 현실적인 현상에서 출발하고 현실적인 현상과 지속적인 관련을 맺는다. 예를 들면, 방향과 관련해서 위치, 지도와 좌표에서 다



[그림 III-25] 6학년 지구의 경선과 위선 (Boersma, van God, Groen, van der Straaten, de Weerd-Furckaire, 2003a: 88) [그림 III-26] 6학년 여러 가지 공의 면의 수 구하기 (Boersma, van God, Groen, van der Straaten, de Weerd-Furckaire, 2003a: 90) [그림 III-27] 6학년 달의 모양 변화 (Boersma, van God, Groen, van der Straaten, de Weerd-Furckaire, 2003a: 92)

11) 이런 특징은 de Moor(1990, 2005)를 참조하면서 연구자가 교과서와 지도서를 살펴보면서 추출해낸 것이다. 물론 지도 방법의 이런 특징들은 현실적 수학교육에서 추구하는 일반적인 수업 이론과 중복되는 것들도 있지만, 이것이 기하 영역에서 구체적으로 어떻게 드러나는지에 초점을 맞추었다.

룬 사진사의 위치 찾기와 지도 위에서 경로 찾기, 구성과 관련해서 공간 통찰에서 다룬 3차원 건물, 3차원 공간에 대한 평면도 찾기, 변환과 관련해서 대칭·회전·평행에서 거울을 이용한 많은 활동과 주변의 사물에서 보이는 대칭 현상 등이 이에 해당한다. 이런 접근은 입체도형과 평면도형을 위주로 다루고 있는 우리나라의 교육과정과는 많은 차이가 있음을 알 수 있다. 특히 현실 공간 탐구와 관련하여 공간 방향과 관련된 활동이 매우 중시되고 있음을 알 수 있다.

## 2) 직관적·비형식적 접근의 중시

현실적 수학교육에 기초한 초등학교의 기하에서는 형식적 접근이 아니라 직관적이고 비형식적 접근을 강조한다. 즉, 기하에서 다루는 여러 가지 개념과 기능이 명시적으로 정의되지 않으며, 적절한 현실 맥락 속에 포함된 우리의 지각적 현실로부터 유도된다(de Moor, 1990). 예를 들면, 앞에서 살펴본 바와 같이 삼각기둥, 원뿔, 구 등의 입체도형은 건축물이나 다양한 물체를 관찰하거나 직접 만들어보는 활동을 통해 직관적 경험을 통해 도입하고 발전시켜나가며, 직선과 점도 시선을 통해 도입하며, 간단한 용어에 대한 소개는 있지만 이를 구체적이거나 명시적으로 정의하지는 않는다. 또한 좌표 개념도 처음부터 수의 순서쌍으로 정의하는 것이 아니라 격자가 없는 지도, 격자가 있는 지도 등 다양한 종류의 지도에서 직관적이고 비형식적으로 도입하고 격자좌표로부터 점좌표로 점진적으로 형식화해 나간다.

## 3) 직관적 활동에서 공간 추론으로의 점진적 접근

현실적 수학교육에 기초한 초등학교의 기하학은 학년이 올라가면서 직관적 활동에서 시각적

활동을 거쳐 정신적 활동으로 초점을 옮긴다(de Moor, 1990). 예를 들면, Pluspunt 교과서에서는 이런 방향으로 1, 2, 3, 4학년에서는 구체적 활동과 직관을 통해 알게 된 것을 반성에 의해 의식하고 설명하는 데 초점을 맞추다가 구체적 활동보다는 시각적 그림을 기초로 판단하는 시각적 활동으로 초점이 바뀌다가, 5, 6학년에서는 필요한 경우에는 구체적 활동이나 시각적 활동을 하기도 하지만 그전에 개념과 경험을 기초로 정신적 활동에 기초한 공간 추론을 중시하고 이에 대한 설명과 논증을 제시하도록 격려한다. 구체적인 교과서의 예를 살펴보면 다양한 입체도형의 전개도를 찾을 때 저학년에서는 주로 직접 만들어 보고 판단하지만, 고학년에서는 도형의 정신적 표상을 머릿속에서 회전하고 연결하는 공간 추론에 의해 해결하는 것 등이 이에 해당된다.

## 4) 다른 영역과의 연결 중시

현실적 수학교육에 기초한 초등학교의 기하학은 공간의 현실을 중시한다는 점을 고려하면 현실 자체가 여러 측면을 가지고 있기 때문에 여러 영역이 서로 연결되는 것은 자연스러운 특징이다. Pluspunt 교과서에서는 1, 2, 3, 4학년에서는 현실과의 연결성을 매우 중시하지만, 5, 6학년에서는 현실과의 연결성뿐만 아니라 여러 영역, 더 나아가서는 다른 교과와의 연결성도 매우 강조한다. 예를 들면 축척을 이용해서 여러 도시간의 실제 거리를 구하거나 길이와 그림자 사이의 비를 이용하여 나무의 높이를 구하는 활동에서는 측정과 비 영역과 관련되어 있으며, 특히 6학년의 주제 단원에서는 지리학과 밀접하게 관련된 활동들이 많이 제시되어 있다.

## 5) 상호작용의 중시

현실적 수학교육에 기초한 초등학교의 기하



는 학생들의 상호작용을 매우 중시한다(de Moor, 1990). 현실적 수학교육에 기초한 기하 영역에서는 구체적 활동뿐만 아니라 공간 현상을 설명하는 것이 중요한 특징이다. 이런 과정은 학생들 나름대로의 설명을 찾는 과정으로 이루어지기 때문에 학생들 간의 상호작용이 본질적인 역할을 한다. Pluspunt 교과서에서는 1학년부터 6학년까지 구체적 활동에 기초하든 정신적 활동에 기초하든 학생들 자신의 설명을 중시하면서, 학생들의 상호작용을 매우 강조하고 있다.

#### 6) 경험-설명-연결의 순환 과정

현실적 수학교육에 기초한 초등학교 기하에서 지도하는 내용을 구성하는 원리 중 하나는 경험-설명-연결의 순환 과정을 강조한다는 것이다(de Moor, 2005). 경험 단계는 새로운 공간 현상을 구체적 활동을 통해 경험하는 것이고, 설명 단계는 적절한 모델 등을 사용해서 공간 현상에 포함된 수학 개념이나 개념 사이의 관계를 직관적으로 찾아내는 것이고, 연결 단계는 앞 단계에서 알게 된 주제를 다른 개념과 현상에 연결하는 것을 의미한다. 이런 세 단계는 이전의 기하 교육에서도 강조해 왔던 것을 종합한 것이다.

경험-설명-연결의 세 단계는 de Moor(2005)에 의하면 이전에 논의되어 왔던 Pierre van Hiele의 사고 수준, 즉 시각적 수준, 기술적 수준, 이론적 수준과 유사하다. 그는 시각적 수준을 매우 중요하게 생각했으며, 여기서 지각된 구조가 통찰을 얻기 위한 기초가 된다. 이 수준에서는 관찰이 주로 이루어지며, 따라서 언어를 사용하지 않는 직관적 방식으로 구조를 지각한다. 그의 부인인 Dina van Hiele-Geldof는 1950년대에 12학년과 13학년을 위한 첫 번째 기하 수업에서 이 이론을 적용하여, 삼각형 마

루 타일과 관련된 주제에서 지각 구조 단계, 언어 구조 단계, 사고 구조 단계의 학습-교수 단계로 발전시켰다. Treffers(1987)도 van Hiele의 이론을 적용하여 네덜란드의 초기 기하 교육과정을 설명하고 있다.

이런 단계는 교과서마다 적용하는 방식이 다를 수 있겠지만, Pluspunt 교과서에서는 이를 도입, 연습, 적용의 세 단계로 제시하고 있다. 이는 한 차시의 수업을 중심으로 구성되는 것이 아니라 한 주제를 여러 학년과 여러 단원에서 걸쳐 세 단계를 순환하여 적용하고 있다. 예를 들면, 위치 범주에서 속하는 위치 찾기 주제를 살펴보면, 도입에 해당되는 내용으로 1학년에서 일렬로 서 있는 키 차이가 나는 아이들 세 명이 종이 액자를 손에 높이 들고 약간 떨어진 거리에 있는 성을 액자를 사이로 바라본 성의 모양을 찍은 세 장의 사진에서 각각의 아이들이 본 성의 사진을 찾기, 연습에 해당되는 내용으로 1학년에서 어떤 마을 사진 세 장의 찍은 위치를 찾기, 가위, 의자, 인형, 서 있는 사람들, 사람 뒷머리 등을 다양한 위치에서 찍은 사진들을 보고 사진사의 위치 찾기, 농장에서 찍은 여러 사진에서 사진사의 위치 찾기 등이 다루어지고, 적용에 해당되는 내용으로 2학년에서 쌓기나무로 만든 건물 모양들을 다양한 방향에서 찍은 사진들과 연결하기가 다루어지며, 다시 도입에 해당되는 내용으로 2학년에서 섬 주변에 떠 있는 배 위에서 선장이 망원경으로 본 장소의 사진들을 보고 어디에서 보았는지 위치 찾기, 연습에 해당되는 내용으로 2학년에서 배를 여러 방향에서 본 사진들을 어느 쪽에서 찍은 것인지 찾기, 3학년에서 어떤 마을의 일부를 위치와 거리를 달리해서 찍은 사진을 보고 어디에서 찍은 것인지 찾기 등을 다루고, 적용에 해당되는 내용으로 캠핑 장소에서 텐트 사이를 버스가 지나가고 있을 때

여러 방향에서 버스를 찍은 사진을 보고 어디서 찍은 것인지 찾기 등을 다루고 있다. 이와 같이 주제를 한 번에 다루는 것이 아니라 세세한 변화를 주면서 경험, 설명, 연결의 단계를 순환하고 있다는 점이 특징이다.

#### IV. 초등학교 기하 교육과정과 교과서 개발을 위한 논의

이 장에서는 앞에서 살펴본 네덜란드 교육과정의 지도 내용과 지도 방법의 특징을 바탕으로 우리나라 초등 교육과정과 교과서 개발과 관련하여 몇 가지 사항에 대해 생각해 보고자 한다.

##### 1. 우리나라 초등학교 도형 영역의 지도 내용과 관련된 논의

우리나라의 제 7차 교육과정(교육부, 1997) 및 제 7차 부분 수정한 수학과 교육과정(교육인적 자원부, 2007)의 도형 영역의 내용을 앞에서 살펴본 Pluspunt 교과서의 방향 나타내기, 구성하기, 모양과 도형으로 조작하기의 틀과 전미수학교사협의회(NCTM, 2000)에서 제시하고 있는 네 가지 기준에 비추어 살펴보면, 몇 가지 논의할 부분들을 제안하고자 한다.

##### 가. 방향 나타내기

방향 나타내기와 관련하여 위치나 지도와 좌표의 내용은 우리나라 초등학교 도형 영역의 경우 해당되는 내용이 없다. 물론 좌표와 관련된 내용은 중학교에서부터 지도되기는 하지만, 앞에서 살펴본 바와 같이 공간에 대한 탐색으로서의 도형 영역의 내용으로는 초등학교 학생들에게 앞으로의 도형 영역의 개념을 다루는

데 기초가 되는 매우 풍부한 현상을 담고 있다. 이는 전미수학교사협의회(NCTM, 2000)에서 제시하고 있는 기준 중 좌표기하 및 다른 표현 체계를 이용한 위치 확인과 공간 관계 기술과 관련되는 것으로, 서론에서 언급한 연구자들이 주장하는 공간 감각의 내용의 중요한 측면을 차지하고 있는 공간 방향의 내용이고, 각, 직선, 좌표평면 등을 명시적으로 지도하기 전에 학생들이 자신들의 현실과 관련하여 쉽게 경험할 수 있는 내용들로 그 가치가 높다고 할 수 있다. 우리나라 교육과정은 우리나라 내부의 필요뿐만 아니라 세계적인 동향의 변화도 고려하여 이루어져 왔고 이루어져야 한다면, 앞으로의 도형 영역에서 방향 나타내기와 관련된 내용을 고려하는 것도 필요하다. 이 때 본 논문에서 살펴본 내용이 도움이 될 것으로 생각한다.

##### 나. 구성하기

###### 1) 공간 표현

구성하기와 관련해서 공간 표현에서는 우리나라 초등학교 도형 영역의 경우 제 7차 교육과정에서는 1-나 단계의 점판에서 공간 감각 기르기, 6-가 단계의 쌓기나무로 모양 만들기를 다루고 있다. 특히 쌓기나무와 관련된 활동은 앞의 서론에서 기술한 공간 감각 중 3차원 대상을 2차원으로 표현하거나 2차원 표현으로부터 3차원 대상을 구성하는 공간 시각화와 관련된 것으로 제 7차 교육과정에 새롭게 도입된 부분이다. 이와 관련하여 제 7차 교육과정에는 다루어야 할 기본 과정의 내용으로 주어진 모양을 보고 쌓기나무로 만들기, 심화 과정의 내용으로 앞, 옆, 위에서 본 그림을 보고 쌓기나무로 만들기 등을 제시하고 있다.

학년별로 다루는 내용은 생각하지 않고 전반적으로 다루는 내용 요소를 보면 앞에서 살펴

본 현실적 수학교육을 반영한 Pluspunt 교과서나 우리나라 제 7차 수학과 교육과정에 따른 수학 6-가 교과서(교육 인적 자원부, 2002c)나 비슷하다. 그러나 차이점은 첫째, 전자는 3차원 대상의 2차원 표현인 겨냥도나 평면도를 다루면서 2차원 표현으로는 3차원 대상의 보이는 부분과 보이지 않는 부분이 있을 수 있기 때문에 정확한 정보를 알 수 있는 경우도 있고 그렇지 않은 경우도 있음을 계속 강조하면서 평면도 위에 충수를 적은 방법이 필요함을 강조하고 있는 반면, 후자는 보이는 부분에 대한 정보가 정확한 경우만 다루면서 평면도 위에 충수를 적은 방법이 3차원 대상을 2차원으로 표현하는 한 가지 방법으로 다루어지고 있다는 점이고, 둘째, 전자는 3차원 대상으로 다양한 현실 속의 대상을 활용하는 반면, 후자는 쌓기나무로 만든 모양만을 다루고 있다는 점이다. 제 7차 교육과정을 부분 수정한 수학과 교육과정에서는 쌓기나무 활동과 관련하여 다루어야 할 내용 중 하나로 여러 가지 물체의 위, 앞, 옆에서 본 모양을 표현하기를 제시하고 있으며, 교수·학습 상의 유의점에서는 여러 가지 물체를 다룰 때에는 실생활과 밀접한 소재를 활용하는 것을 강조하고 있다. 이는 둘째 논의 내용을 고려한 것이지만, 첫째 논의 내용도 포함되는 것이 공간 시각화를 다루는 의의를 좀 더 살릴 수 있는 방향이라 생각한다.

## 2) 도형 구성과 도형 인식

도형 구성과 도형 인식에서는 우리나라 초등학교 도형 영역의 경우 1-가 단계의 입체도형의 모양, 1-나 단계의 평면도형의 모양, 2-가 단계의 기본적인 평면도형, 2-나단계의 입체도형의 구성, 3-가 단계의 각과 평면도형, 3-나 단계의 원의 구성 요소, 4-가 단계의 각과 여러 가지 삼각형, 삼각형과 사각형에서 내각의 크기,

4-나 단계의 여러 가지 사각형, 수직과 평행, 간단한 다각형과 정다각형, 5-가 단계의 직육면체와 정육면체의 성질과 전개도, 6-가 단계의 각기둥과 각뿔의 성질과 전개도, 6-나 단계의 여러 가지 입체도형이 다루어진다.

전반적으로 다루는 내용 요소를 보면 앞에서 살펴본 현실적 수학교육을 반영한 Pluspunt 교과서나 우리나라 제 7차 수학과 교육과정에 따른 교과서나 비슷하다. 그러나 차이점은 전자는 평면도형과 입체도형에서 실생활에서 볼 수 있는 물체와 더불어 도형의 종류나 전개도를 다양하게 다루지만 명확한 구성요소나 성질에 대한 명시적인 언급 없이 비형식적 탐구 수준에서 머무르는 반면, 후자는 실생활과 관련짓기는 하나 그보다는 도형의 종류나 전개도가 상대적으로 다양하지 않으며 도형의 구성요소나 성질과 그 관계를 다루는 데 초점이 맞추어져 있다. 우리나라의 경우도 실생활에서 쉽게 볼 수 있는 물체들로부터 도형을 인식하는 활동이 포함되어 있기는 하지만, 예를 들면 수학 1-가(교육 인적 자원부, 2002a)에서 상자 모양, 둥근 기둥 모양, 공 모양을 도입할 때, 수학 1-나(교육 인적 자원부, 2002b)에서 세모 모양, 네모 모양, 동그라미 모양을 도입할 때 실생활의 물체에서 이런 모양들을 찾아보게 하는 활동 등을 하고 있지만, 그 다양성에서 제한이 있는 점을 고려할 때, 도형의 구성요소나 성질과 그 관계를 집중적으로 다루되, 좀더 다양한 상황으로부터 도형을 인식하고 그 성질을 알아보는 활동이 다루어지는 것도 필요하다고 생각한다.

## 3) 공간 통찰

공간 통찰에서는 우리나라 초등학교 도형 영역의 경우 4-나 단계의 여러 가지 모양 만들기, 5-가 단계의 여러 가지 모양으로 주어진 도형 덮기, 직육면체와 정육면체의 성질과 전개도,

6-가 단계의 각기동과 각뿔의 성질과 전개도가 다루어진다.

전반적으로 다루는 내용 요소를 보면 앞에서 살펴본 현실적 수학교육을 반영한 Pluspunt 교과서나 우리나라 제 7차 수학과 교육과정에 따른 교과서나 비슷하다. 그러나 후자는 모양 만들기와 전개도에 관련된 부분에 한정되어 있는 반면, 앞에서 살펴본 바와 같이 전자는 좀더 다양한 활동과 더불어 시각적 표상과 정신적 표현을 조작하여 정신적 수준에서의 논의를 통한 공간 추론을 좀더 강조하고 있다는 점에서 차이가 있다.

#### 다. 모양과 도형으로 조작하기

모양과 도형으로 조작하기에서는 우리나라 초등학교 도형 영역과 규칙성과 함수 영역의 경우 1-가 단계의 규칙적인 배열에서 규칙 찾기, 2-가 단계의 구체물의 이동에서 공간 감각 기르기, 3-가 단계의 평면도형의 이동에서 공간 감각 기르기, 3-나 단계의 거울을 통한 공간 감각 기르기, 규칙에 따라 여러 가지 무늬 만들기, 4-나 단계의 여러 가지 모양 만들기, 5-가 단계의 여러 가지 모양으로 주어진 도형 덮기, 여러 가지 이동을 이용하여 규칙적인 무늬 만들기, 5-나 단계의 합동과 대칭 등이 다루어지고 있다. 제 7차 교육과정을 부분 수정한 수학과 교육과정에서는 모양과 도형으로 조작하기와 관련해서 2-가 단계의 구체물의 이동에서 공간 감각 기르기가 3학년의 평면도형의 이동으로 합쳐지고, 3-나 단계의 거울을 통한 감각 기르기가 5학년의 합동과 대칭 부분으로 이동되고, 5-가단계의 여러 가지 모양으로 주어진 도형 덮기가 4학년으로 이동되었을 뿐 제 7차 교육과정과 전체적인 내용의 변화는 없다.

현실적 수학교육을 반영한 Pluspunt 교과서와 우리나라 제 7차 수학과 교육과정에 따른 교과

서를 모양과 도형으로 조작하기와 관련해서 비교하면, 규칙성의 경우 비슷한 내용을 다루며, 대칭·회전·평행의 경우 네덜란드의 경우 여러 학년에서 걸쳐서 지도하고 있는 반면, 우리나라의 경우는 일부 학년에서만 지도하고 있고, 확대와 축소의 경우는 네덜란드의 경우는 여러 학년에 걸쳐 지도하고 있는 반면, 우리나라에서는 초등학교 도형 영역에서는 지도하고 있지 않음을 알 수 있다.

지금까지 지도 내용과 관련해서 살펴본 내용을 전미수학교사협회(NCTM, 2000)에서 제시한 기하 영역의 기준, 즉 도형의 특징과 성질 분석, 좌표기하와 공간에서의 위치, 변환, 공간 시각화와 공간 추론에 비추어 보면 네덜란드의 경우는 좌표기하와 공간에서의 위치, 변환, 공간 시각화와 공간 추론의 많은 내용을 다루고, 도형의 특징과 성질 분석은 직관적으로 다루고 있는 반면, 우리나라의 경우는 도형의 특징과 성질 분석, 변환은 매우 중시하지만, 좌표기하와 공간에서의 위치, 공간 시각화와 공간 추론의 측면은 그다지 많이 다루지 않고 있다고 할 수 있다. 따라서 세계적인 초등학교의 기하 동향을 고려해볼 때, 공간 방향의 도입, 공간 시각화와 공간 추론을 좀더 강화하는 것에 대해 좀더 심도 있는 논의가 필요할 것으로 보인다.

#### 2. 우리나라 초등학교 도형 영역의 지도 방법과 관련된 논의

우리나라의 제 7차 수학과 교육과정에서는 최근 세계적으로 중요하게 인식되고 있는 구성주의를 배경으로 학습자의 활동을 중시하면서 수학적 소양을 기르는 것을 강조하고 있으며, 제 7차 교육과정을 부분 수정한 수학과 교육과정에서도 이를 더욱 강조하고 있다(교육부, 1999; 교육 인적 자원부, 2007). 제 7차 교육과

정에 따른 수학 교과서도 교육과정의 배경이 되는 방향에 따라 수학과 실생활과의 연결성을 중시하고 학생들의 활동을 강조하면서, 학생들 스스로 수학을 학습하는 데 중점을 두었다. 그러나 수학 교과서의 지도 방법이 학생들 스스로가 자신의 비형식적 지식을 바탕으로 수학적 지식을 구성하는 데 충분한지, 또한 학생들이 수학을 실생활을 포함하여 다양한 영역과 연결하는데 충분하지, 특히 도형 영역과 관련해서는 앞에서 논의한 바와 같이 초등학교에서 기하교육이 담당해야 할 한 측면이 학생들의 공간에 대한 통찰의 자연스러운 발달에 기여하는 것으로 보고 논리적 구조로서의 기하뿐만 아니라 공간에 대한 탐색으로서의 기하를 강조하는 최근의 경향을 고려할 때 충분한지에 대해서는 계속 반성적으로 고찰할 필요가 있다. 이런 점에서 현실적 수학교육을 반영한 Pluspunt에서 드러난 지도 방법의 특성에 비추어 몇 가지 논의할 점에 대해 살펴보고자 한다.

첫째, 도형 영역 지도에서 공간적 접근과 도형적 접근의 균형을 맞출 필요가 있다. 우리나라 제 7차 교육과정에 따른 교과서에서는 공간 감각이 새롭게 도입이 되는 했지만, 이는 구성하기에서 공간 시각화를 강조하는 공간 표현과 모양과 도형으로 조작하기에서 대칭·회전·평행에 대한 내용과 관련된 것이고, 앞에서 살펴본 바와 같이 방향 나타내기에서는 위치 찾기와 지도와 좌표로 표현된 공간 방향의 내용은 도입되지 않았다. 최근 기하 지도와 관련된 논의, 즉 논리적 구조로서의 기하와 공간 탐색으로서의 기하를 모두 중시하는 것과 전미 수학교사협의회에서 제시하고 있는 방향에 비추어 볼 때 공간 방향에 관련된 내용을 도입하는 것과 더불어 현실 공간에 대한 탐구와 도형의 특징과 성질 분석의 두 가지 내용을 어떻게 균형을 맞출 것인지 또한 어떻게 지도할 것인지

고려해볼 필요가 있다. 특히 전자와 관련하여 우리를 둘러싸고 있는 현실 공간과 그 안에서 발생하는 다양한 현상의 경험적 탐구와 반성적 설명에 의해 공간에 대한 통찰의 자연스러운 발달을 이끌어야 한다. 이런 점에서 현재 6-가 수학의 공간 시각화 관련해서 다루어지는 내용이 현실 공간에 대한 탐구가 아닌 이미 수학적으로 처리된 쌓기나무라는 구체물을 다루는 것에 제한되어 있는 점을 고려할 때, 공간 방향, 공간 시각화, 공간 추론을 중심으로 하는 공간 탐색으로서의 기하에서는 학생들에게 제시되는 실생활 상황이 수학적으로 정리된 현상이나 대상이 아닌 학생들이 생활하고, 호흡하고, 활동하는 공간과 그 안에서 일어나는 다양한 현상과 대상들을 다룰 필요가 있다.

둘째, 도형 영역 지도에서 형식적 접근보다 직관적 접근을 좀더 강조할 필요가 있다. 우리나라 제 7차 교육과정에 따른 교과서에서는 1학년에서 입체도형과 평면도형을 다룰 때는 직관적 접근이 강조되지만, 2학년에서 6학년까지 평면도형과 입체도형을 다루는 과정에서 물론 실생활 상황과 관련하여 도입하고는 있지만 약속하기를 통해서 도형에 대한 정의나 성질, 도형의 합동과 대칭의 정의와 성질 등을 명시적으로 제시하는 경향이 있다. 이는 학생들에게 개념이나 성질을 명확하게 인식시키는 긍정적인 측면도 있고 네덜란드의 경우처럼 초등학교에서는 형식적 접근을 하지 않도록 미루어 둘 필요까지는 없지만, 여러 학년에 걸쳐 많은 구체적 활동과 직관적 인식을 거쳐 자신의 비형식적 지식을 기초로 점진적으로 스스로 개념을 구성해갈 수 있도록 하는 방안도 고려해 볼 필요가 있다고 생각한다. 특히 앞에서 기술한 공간적 접근을 위해서는 많은 현상에 대한 직관적 경험이 매우 중요하며, 이에 대한 형식화는 이런 경험을 바탕으로 좀더 점진적으로 이루어

질 필요가 있고, 처음에는 구체적·시각적 활동을 기초로 학년이 올라갈수록 정신적 활동을 기초로 전개하는 것이 필요하다.

셋째, 도형 영역 지도에서 분리적 접근과 더불어 통합적 접근도 고려할 필요가 있다. 우리나라 제 7차 교육과정에 따른 교과서에서는 변환과 관련하여 무늬 꾸미기 등 실생활과 관련된 활동이 많이 도입되기는 하였지만, 전반적으로 평면도형과 입체도형의 특징과 성질 분석에 초점이 맞추어져 있기 때문에 도형 영역에서는 주로 도형의 내용만을 다루는 분리적 접근 방법이 우세하다고 할 수 있다. 따라서 도형 영역의 여러 아이디어를 다양한 맥락과 관련해서 생각할 수 있도록 여러 영역과 다른 교과 영역에 관련된 좀더 통합적인 활동이 다루어질 필요가 있다고 생각된다. 이를 통해서 학생들은 수학을 다양한 영역과 연결 지어 생각해 보는 경험을 통해 수학의 의미와 유용성을 더욱 체험할 수 있을 것이다. 특히 마지막 학년의 경우에는 지금까지 배운 내용들을 통합해서 고려하고 확장할 수 있는 경험을 제공하는 것을 고려해 볼 필요가 있다고 생각한다.

본 논문에서는 최근 기하 교육의 동향에 비추어 RME에 기초한 초등학교 기하 교육과정의 내용을 핵심 목표, 네덜란드의 교과서를 중심으로 살펴보고, 이에 따라 지도 내용과 지도 방법에서 논의해야 할 문제들을 제기하였다. 지도 내용의 측면에서는 공간 방향의 도입, 공간 시각화와 공간 추론의 강화, 지도 방법의 측면에서는 공간적 접근과 도형적 접근의 균형, 직관적 접근의 중시, 통합적 접근의 도입을 논하였다. 한 나라의 교육과정과 교과서를 개정하는 일은 여러 가지 변수를 포함한 매우 복잡한 일이다. 앞에서 살펴본 바와 같이 초등학교 기하 교육과정과 관련하여 고려해야 할 측면이 매우 많다. 따라서 본 논문에서 살펴본

내용들이 앞으로의 초등학교 기하 교육과정과 교과서 개발을 위한 참고 자료가 되기를 기대해 본다.

## 참고문헌

- 교육부(1997). *수학과 교육과정*(교육부 고시 제 1997-15호 [별책8]). 서울: 대한 교과서 주식회사.
- \_\_\_\_\_(1999). *초등학교 교육과정 해설(IV)-수학, 과학, 실과*. 서울: 대한 교과서 주식회사.
- 교육 인적 자원부(2002a). *수학 1-가*. 서울: 대한 교과서 주식회사.
- \_\_\_\_\_(2002b). *수학 1-나*. 서울: 대한 교과서 주식회사.
- \_\_\_\_\_(2002c). *수학 6-가*. 서울: 대한 교과서 주식회사.
- \_\_\_\_\_(2007). *수학과 교육과정*(교육인적자원부 고시 제 2007-79호 [별책8]). 서울: 대한 교과서 주식회사.
- Boersma, G., van Gool, A., Groen, J., van der Straaten, H., & de Weerd-Fourdraine, A. (2003a). *Pluspunt Reken-Wiskundemethode voor de Basisschool Lesboek voor Groep 8*. 's-Heterogenbosch: Malmberg.
- \_\_\_\_\_(2003b). *Pluspunt Reken-Wiskundemethode voor de Basisschool Leerlijnen voor Groep 8*. 's-Heterogenbosch: Malmberg.
- \_\_\_\_\_(2003c). *Pluspunt Reken-Wiskundemethode voor de Basisschool Handleiding 8A*. 's-Heterogenbosch: Malmberg.
- \_\_\_\_\_(2003d). *Pluspunt Reken-Wiskundemethode voor de Basisschool Handleiding 8B*. 's-Heterogenbosch: Malmberg.

- \_\_\_\_\_(2003e). *Pluspunt Reken-Wiskunde-methode voor de Basisschool Werkboek voor Groep 8*. 's-Heterogenbosch: Malmberg.
- Clements, D. H. (1999). Geometric and spatial thinking in young children. In V. C. Juanita(ed.), *Mathematics in the early years*(pp. 66-79). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws(ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*(pp. 420-464). NY: Macmillan Publishing Co., Inc.
- De Moor E. (1990). Geometry instruction in the Netherlands(ages 4-14)-the realistic approach-. In L. Streefland (ed.), *Realistic mathematics education in primary school*(pp. 119-138). Culemborg: Technipress.
- \_\_\_\_\_(2005). Domain description geometry. In M. van den Heuvel-Panhuizen & K. Buys(Eds.), *Young children learn measurement and geometry. A learning-teaching trajectory with intermediate attainment targets for lower grades in primary school*(pp. 115-144). Amersfoort: Drukkerij Wilco.
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- \_\_\_\_\_(1991). *Revisiting mathematics education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Freudenthal, H., Janssen, G. M., & Sweers, W. J. (Eds.) (1976). Five Years IOWO. *Educational Studies in Mathematics*, 7(3), 187-367.
- Gravemeijer, K. (1990). Realistic geometry instruction. In K. Gravemeijer, M. van den Heuvel-Panhuizen, & L. Streefland(Eds.), *Contexts Free Productions Tests and Geometry in Realistic Mathematics Education*(pp. 79-91). Utrecht: CD β Press.
- Groen, J., Rouvroye, R., van de Straaten, H., & de Weerd-Fourdraine, A. (2003a). *Pluspunt Reken-Wiskundemethode voor de Basisschool Lesboek voor Groep 6*. 's-Heterogenbosch: Malmberg.
- \_\_\_\_\_(2003b). *Pluspunt Reken-Wiskunde-methode voor de Basisschool Leerlijnen voor Groep 6*. 's-Heterogenbosch: Malmberg.
- \_\_\_\_\_(2003c). *Pluspunt Reken-Wiskunde-methode voor de Basisschool Handleiding 6A*. 's-Heterogenbosch: Malmberg.
- \_\_\_\_\_(2003d). *Pluspunt Reken-Wiskunde-methode voor de Basisschool Handleiding 6B*. 's-Heterogenbosch: Malmberg.
- Hershikowitz, R. (1990). Psychological aspects of learning geometry. In P. Neshet & J. Kilpatrick(ed.), *Mathematics and cognition* (pp. 70-95). Cambridge: Cambridge University Press.
- Janssen, D., Munsterman, B., & Rouvroye, R. (2003a). *Pluspunt Reken-Wiskundemethode voor de Basisschool Lesboek voor Groep 7*. 's-Heterogenbosch: Malmberg.
- \_\_\_\_\_(2003b). *Pluspunt Reken-Wiskunde-methode voor de Basisschool Leerlijnen voor Groep 7*. 's-Heterogenbosch:

- Malmberg.
- \_\_\_\_\_(2003c). *Pluspunt Reken-Wiskunde-methode voor de Basisschool Handleiding 7A*. 's-Heterogenbosch: Malmberg.
- \_\_\_\_\_(2003d). *Pluspunt Reken-Wiskunde-methode voor de Basisschool Handleiding 7B*. 's-Heterogenbosch: Malmberg.
- \_\_\_\_\_(2003e). *Pluspunt Reken-Wiskunde-methode voor de Basisschool Opdrachtenboek voor Groep 7*. 's-Heterogenbosch: Malmberg.
- \_\_\_\_\_(2003f). *Pluspunt Reken-Wiskunde-methode voor de Basisschool Werkboek voor Groep 7*. 's-Heterogenbosch: Malmberg.
- Kennedy, L. M., Tipps, S., & Johnson, A. (2004). *Guiding children's learning of mathematics*. Belmont, CA: Wadsworth.
- Munsterman, B., & de Weerd-Fourdraine, A. (2003a). *Pluspunt Reken-Wiskundemethode voor de Basisschool Lesboek voor Groep 4*. 's-Heterogenbosch: Malmberg.
- \_\_\_\_\_(2003b). *Pluspunt Reken-Wiskunde-methode voor de Basisschool Leerlijnen voor Groep 4*. 's-Heterogenbosch: Malmberg.
- \_\_\_\_\_(2003c). *Pluspunt Reken-Wiskunde-methode voor de Basisschool Handleiding 4A*. 's-Heterogenbosch: Malmberg.
- \_\_\_\_\_(2003d). *Pluspunt Reken-Wiskunde-methode voor de Basisschool Handleiding 4B*. 's-Heterogenbosch: Malmberg.
- \_\_\_\_\_(2003e). *Pluspunt Reken-Wiskunde-methode voor de Basisschool Opdrachtenboek voor Groep 4*. 's-Heterogenbosch: Malmberg.
- National Council of Teachers of Mathematics (2007). *학교수학을 위한 원리와 기준*. (류희찬 · 조완영 · 이경화 · 나귀수 · 김남균 · 방정숙, 역). 서울: 경문사. (영어 원작은 2000년 출판).
- Pap, W., Janssen, D., & Pap, L. (2003a). *Pluspunt Reken-Wiskundemethode voor de Basisschool Lesboek voor Groep 3*. 's-Heterogenbosch: Malmberg.
- \_\_\_\_\_(2003b). *Pluspunt Reken-Wiskunde-methode voor de Basisschool Leerlijnen voor Groep 3*. 's-Heterogenbosch: Malmberg.
- \_\_\_\_\_(2003c). *Pluspunt Reken-Wiskunde-methode voor de Basisschool Handleiding 3A*. 's-Heterogenbosch: Malmberg.
- \_\_\_\_\_(2003d). *Pluspunt Reken-Wiskunde-methode voor de Basisschool Handleiding 3B*. 's-Heterogenbosch: Malmberg.
- Treffers, A. (1987). *Three dimension. A model of goal and theory description in mathematics instruction-The Wiskobas Project*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.
- Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2001a). *Children learn mathematics. A learning-teaching trajectory with intermediate attainment targets for calculation with whole numbers in primary school*. Utrecht/Enschede: Freudenthal Institute/SLO.
- \_\_\_\_\_(2001b). A learning-teaching trajectory description as a hold for mathematics teaching in primary schools in the Netherlands. In M. Tzekaki(Ed.), *Didactics of Mathematics and Informatics in*



- Education. 5th Panhellenic Conference with International Participation*(pp. 21-39). Thessaloniki: Aristotle University of Thessaloniki/ University of Macedonia/ Pedagogical Institute.
- \_\_\_\_\_(2005). Mathematics standards and curricula in the Netherlands. *Zeitschrift für Didaktik der Mathematik*, 37(4), 287-307.
- Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Buys, K. (2005). *Young children learn measurement and geometry. A learning-teaching trajectory with intermediate attainment targets for lower grades in primary school*. Amersfoort: Drukkerij Wilco.
- Van Gool, A., Janssen, D., & Munsterman, B. (2003a). *Pluspunt Reken-Wiskundemethode voor de Basisschool Lesboek voor Groep 5*. 's-Heterogenbosch: Malmberg.
- \_\_\_\_\_(2003b). *Pluspunt Reken-Wiskundemethode voor de Basisschool Leerlijnen voor Groep 5*. 's-Heterogenbosch: Malmberg.
- \_\_\_\_\_(2003c). *Pluspunt Reken-Wiskundemethode voor de Basisschool Handleiding 5A*. 's-Heterogenbosch: Malmberg.
- \_\_\_\_\_(2003d). *Pluspunt Reken-Wiskundemethode voor de Basisschool Handleiding 5B*. 's-Heterogenbosch: Malmberg.

# Reflections on the Elementary School Geometry Curriculum in the Netherlands

## -Based on the Realistic Mathematics Education-

Chong, Yeong Ok (Gyeongin National University of Education)

The study aims to reflect the elementary school geometry education based on the Realistic Mathematics Education in the Netherlands in the light of the results from recent researches in geometry education and the direction of geometry standards for school mathematics of the National Council of Teachers of Mathematics in order to induce implications for improving Korean geometry curriculum and textbook series.

In order to attain these purposes, the present paper reflects the history of elementary school geometry education in the Netherlands, sketches the elementary school geometry education based on the Realistic Mathematics Education in the Netherlands by reflecting general goals of the mathematics education, the core goals for geometry strand of the Netherlands, and geometry and spatial orientation strand of Dutch Pluspunt textbook series for the elementary school more concretely.

Under these reflections on the documents, it is analyzed what is the characteristics of geometry strand in the Netherlands as follows: emphasis on realistic spatial phenomenon, intuitive and informal approach, progressive approach from intuitive activity to spatial reasoning, intertwining of mathematics strands and other disciplines, emphasis on interaction of the students, cyclical repetition of experiencing phase, explaining phases, and connecting phase.

Finally, discussing points for improving our elementary school geometry curriculum and textbook series development are described as follows: introducing spatial orientation and emphasizing spatial visualization and spatial reasoning with respect to the instruction contents, considering balancing between approach stressing on grasping space and approach stressing on logical structure of geometry, intuitive approach, and integrating mathematics strands and other disciplines with respect to the instruction method.

\* key words : realistic mathematics education(현실적 수학교육), geometry education(기하 교육), orienting(방향 나타내기), constructing(구성하기), operating with shapes and figures(모양과 도형으로 조작하기), spatial reasoning(공간 추론), spatial visualization(공간 시각화), spatial orienting(공간 방향)

논문접수 : 2007. 5. 15

심사완료 : 2007. 6. 17