

패턴탐구를 통한 일반화와 기호표현 -시각적 패턴을 중심으로-

강 현 영*

최근 대수 교육과정에서 패턴들을 표현하면서 일반적인 규칙을 인식하고 설명하는 것이 하나의 대안으로 제시되고 강조되고 있다. 우리나라 역시 제 7 차 교육과정에서 '규칙성과 함수' 영역과 관련하여 초등학교 과정에서 다양한 형태의 패턴활동을 지도하고 있다. 그러나 최근 패턴활동을 통한 학습에 대한 연구에서 학생들의 어려움과 문제점이 지적되고 있다. 이 글에서는 우리나라 초등학교 교육과정에 많이 도입되고 있는 시각적 패턴의 탐구 활동을 통한 일반화 과정을 중심으로 하여, 시각적 패턴의 일반화 과정에서의 다양한 접근과 학생들의 사고전략, 기호화 상태를 고찰한다. 그리고 시각적 패턴의 일반화, 기호화의 어려움을 논의하고 시각적 패턴의 탐구 활동 학습을 위한 몇 가지 제안을 하였다.

1. 서 론

최근 대수 교육과정에서 패턴들을 표현하면서 일반적인 규칙을 인식하고 설명하는 것이 하나의 대안으로 제시되고 있으며, 수학의 전반적인 부분과 관련을 맺으며 강조되고 있다. 특히 패턴에 기초한 대수 및 함수의 도입은 미국, 영국, 호주를 비롯한 각국의 교육과정에서 나타난 가장 중요한 변화 중 하나이다.

전통적인 대수 교육과정에서는 대수식을 단순화하면서 간단한 표현들을 나열하고, 미지수를 구하는 방정식을 풀면서 문자 사용을 경험한다. 반면에 패턴에 기초한 교육과정에서는 패턴의 일반화 과정을 통해 문자를 도입하고 함수적 관계들과 그것을 이해하고 설명하기 위하여 일반성을 언어로 또는 문자로 표현하고

있다. 그리고 패턴 탐구를 통해 패턴의 규칙을 서술하는데 언어적 규칙을 형식화하고 그 상황을 일반화하는 방법을 찾는 전형적인 패턴활동으로서 시각적 패턴¹⁾ 활동과 표에서 패턴을 찾는 활동 등이 제시되고 있다.

우리나라도 제 7 차 교육과정에서 '규칙성과 함수' 영역과 관련하여 초등학교 과정에서 다양한 형태의 패턴활동을 지도하고 있다. 이는 패턴의 일반화를 통해 대수적 함수적 사고와 추론 측면이 동시에 부각될 수 있다는 점에서 비롯되었다고 할 수 있다. 특히 변수는 일반화를 표현하기 위한 기초적인 도구로서, 변수 개념에 대한 이해는 학생들의 성공적인 대수 학습을 위한 기초이다. 전통적으로 변수는 방정식에서 처음 경험하였다. 그러나 최근에는 패턴을 탐구하는 비형식적이고 구체적인 활동을 요구하고 있다. 패턴을 통한 비형식적인 활동이 변수 개

* 홍익대학교 강사(sunyrak@empal.com)

1) 패턴 과제를 그림으로 표현되는 맥락에서 설정한 것을 도형 패턴, 기학적 패턴, 그림 패턴(pictorial/geometric pattern) 등으로 말하는 데, 이 글에서는 시각적 패턴이라고 한다.

념을 도입하고 등호와 대수적 단순화 아이디어를 도입하는 데 용이하다는 입장이다(Booth, 1990; English & Warren, 1998, p.166 재인용). 패턴에서의 양 사이의 관계가 연구될 때, 중요한 수학적 관계와 함수에 대한 지식이 구현되며 대수를 유도하는 자연스러운 방법이 되기 때문이다(김택현, 1999, 안중률, 1999, 김상미, 1997).

그러나 최근 패턴활동을 통한 학습에 대한 연구에서 학생들의 어려움과 문제점이 지적되고 있다. 전통적인 접근법에 비해 패턴에 기초한 접근법을 통해 학생들이 대수를 보다 잘 이해한다는 것은 확실하지 않으며, 단순하며 실제적이고 기초적이라고 생각되는 시각적 패턴의 일반화와 기호화 역시 쉽지 않다는 것이다(Stacey & Macgregor, 2001, Quinlan, 2001, English & Warren, 1998, Ishida, 1997, Stacey, 1989, Orton & Roper, 1999 등). 학생들은 대부분 패턴에는 재귀적 관계가 포함되어 있음을 인식하면서도 그것을 대수적으로 표현하는 것에 어려움을 느꼈다. 또한 우리나라의 경우 초등학교 과정에서 여러 가지 패턴 활동 지도를 위한 프로그램 개발을 위한 시도가 있었지만(김상미, 1997, 김택현, 1999, 안중률, 1999 등), 초등학교에서 도입되었던 시각적 패턴을 중심으로 일반화, 기호화를 위한 프로그램 개발을 위한 시도나 연구가 없는 상태이다.²⁾ 이에 따라, 이 글에서는 우리나라 초등교육과정에 많이 도입되고 있는 시각적 패턴의 탐구 활동을 통한 일반화 과정을 중심으로 하여, 시각적 패턴의 일반화 과정에서의 다양한 접근 방식을

생각해 보았다. 예비 테스트를 통해 학생들이 시각적 패턴을 일반화하는 방법, 기호화 상태를 살펴보고, 시각적 패턴의 일반화와 기호화의 어려움에 대하여 논의한다. 마지막으로 시각적 패턴의 탐구 활동을 통한 대수 학습을 위한 권고를 제시하도록 한다.³⁾

II. 패턴에 기초한 대수 교육과정

Devlin(2003)에 따르면, 수학은 단지 수에 대한 연구가 아니며, 삶 속에 숨겨져 있는 '패턴'을 깨닫고 발견하는 것이다. 물리학적 생물학적 사회적 패턴은 물론 정신과 사유의 패턴을 인식하고 설명함으로써 수학은 보이지 않는 것을 볼 수 있게 해준다고 말하고 있다. 따라서 패턴은 대수를 포함한 수학의 여러 분야에서 강조되는 주제 가운데 하나라고 할 수 있다.

특히 오늘날 패턴의 중요성은 대수 교육과정을 개선하기 위해 강조되고 있다. 미국, 영국, 호주를 비롯하여 각국의 대수 교육과정에서 방정식이나 대수식 등에 앞서 먼저 패턴의 관계 및 규칙을 표현하고 학습하는 것이 일반적인 원리로 인식되고 있다(Stacey & MacGregor, 2001, p.141). 전통적인 교육과정에서는 문자 사용 규칙에 대하여 학습한 뒤 변수와 함수에서 일반성의 개념을 다루게 된다. 반면에 패턴에 기초한 대수 교육과정에서는 일반성의 획득을 문자 자체에서 시작하는 것이 아니라 패턴들과 관계들의 설명을 표현하는 가운데 자연스럽게 강조되어야 함

2) 이 글은 초등학교에서 도입되었던 시각적 패턴을 중학교 수준에서 일반화, 기호화하기 위한 구체적인 지도안이나 프로그램 개발을 위한 예비적인 연구라고 할 수 있다.

3) 패턴의 탐구 활동과 관련하여 대수 및 함수 학습과 관련된 구체적인 프로그램 개발에 대한 연구가 시도되어 왔다(안중률, 1999, 김상미, 1997, 김택현, 1999, 오순임, 2002, 이재우, 2000 등). 그러나 시각적 패턴 활동과 대수적 문자와 식을 연결하고자 하는 본격적인 연구는 아직까지 시도되고 있지 못하며 학교 수업에서 활용 가능한 구체적인 프로그램 역시 거의 없는 실정이다. 이에 따라 이 글에서는 시각적 패턴과 문자와 식의 연결을 위한 프로그램 개발에 앞서 먼저 시각적 패턴의 일반화 과정과 관련하여 학생들의 사고전략이나 어려움 등에 대해 고찰하고자 한다.

을 주장한다. 따라서 패턴의 일반화 과정에서 문자를 도입하고 있으며, 이 도입 방식은 함수적 관계들과 그것을 이해하고 설명하기 위하여 언어와 문자를 사용하여 표현하는 것이다. 패턴에 기초한 대수의 도입은 관계와 규칙을 강조하는 것으로 볼 수 있다(김성준, 2002, p.353).

우리나라 제 7 차 교육과정을 살펴보면, 초등학교 교육과정에서 '규칙성과 함수'라는 내용과 관련하여 다양한 형태의 패턴활동을 지도하고 있다. 특히 각 단계 별로 여러 가지 시각적 패턴의 탐구 활동을 지도하고 있다. 그 내용을 간략히 살펴보면 아래 <표 II-1>과 같다. 초등학교 과정에서는 주로 단순히 늘어나는 시각적 패턴이 주로 도입되고 있으며, 7단계 이후에는 시각적 패턴이 교과서의 주요한 내용으로 도입되

고 있지 않다. 그리고 중학교 과정에 해당되는 7-가 단계에서는 '문자와 식' 단원에서 문자를 도입하고 방정식을 통해 미지수로서 변수를 학습하게 되어 있다.⁴⁾

변수는 일반화를 표현하는 기본 도구이면서 변수 개념에 대한 이해는 대수 학습의 성공에 있어서 기본이 된다고 할 수 있다. 전통적인 대수 교육과정에서는 변수를 방정식에서 처음 접하게 되며 여기서 변수는 미지수를 대표한다. 그러나 이러한 도입방식은 학생들이 스스로 변수 개념을 구성하고, 탐구하고, 경험할 기회를 주지 않아 변수와 관련된 이후의 학습에서 장애를 일으킨다는 비판을 받는다. 이러한 문제를 보완하기 위해서 패턴에 기초한 대수 교육과정에서는 학생들이 도형과 수의 패턴을

<표 II-1>

단계	내 용
1학년	-생활주변의 여러 가지 물체나 무늬의 규칙적인 배열에서 규칙 찾기 -규칙을 정하고 그에 따라 배열하기
2학년	-물체나 무늬의 다양한 변화의 규칙을 찾아 설명하기 -♡♡♡♡♡♡♡♡♡♡♡♡♡♡♡♡와 같이 발전해가는 배열의 규칙을 알아보고 활용할 수 있게 한다.
3학년	-규칙에 따라 여러 가지 무늬 꾸며보기 -바둑돌을 규칙에 따라 늘어놓고 수의 규칙을 찾아 바둑돌의 개수 예상하기
4학년	-그림의 규칙을 수로 나타내고 설명하기 -다양한 형태로 바둑돌을 늘어놓고 수의 규칙을 찾고 설명하기 -성냥개비로 도형이 증가하는 규칙을 찾고 성냥개비의 수 예상하기 -여러 가지 소리를 듣고 수의 규칙을 바둑돌로 나타내어 보기 -쌓기 나무의 배열에 따른 규칙 및 개수 예상하기
5학년	-점과 선으로 그린 여러 가지 형태의 패턴에서 점과 선 사이의 규칙 또는 관계 찾기 -쌓기 나무의 배열에 따른 규칙 및 개수 예상하기 -성냥개비로 도형이 증가하는 규칙을 찾고 성냥개비의 수 예상하기
6학년	-삼각형을 배열하여 증가하는 패턴의 규칙과 도형의 수 예상하기

4) 물론 시각적 패턴 중 바둑돌을 배열하는 패턴의 경우 어떻게 배열하는가에 따라 계차수열이 개입되는 보다 복잡한 경우가 있다. 이러한 경우는 주로 수학 I의 계차수열의 학습과 관련된 문제에서 주로 다루어지고 있다. 초등학교 교과 과정에서는 이러한 경우를 피하여 단순하게 증가하는 삼각형, 사각형 모양의 배열이 주로 도입되고 있다. 이러한 점은 초등학교 과정이나 중학교 과정에서 시각적 패턴을 지도하는 경우에 유의해야 할 것이다. 이와 관련된 연구로서, 박교식(2002)의 '수열의 교수 학습을 위한 교수단원 소재 연구; 다각수와 각뿔수'가 있다.

조사하고, 이 패턴을 서술하는 데 언어적 규칙을 형식화하고, 그 상황을 일반화하는 방법을 찾는 구체적인 활동들을 비형식적으로 제시하고 있다. 특히 변수 개념을 도입하기 위한 전형적인 패턴 활동으로 시각적 패턴을 탐구하는 활동을 제시하고 있다.

학생들은 패턴 탐구 과정에서 패턴을 서술하는 일반적인 규칙을 찾게 된다. 이 과정에서 학생들은 기호로 일반화를 기록하기보다 먼저 일상 언어로 일련의 규칙을 설명한다. 그러나 패턴 형태가 복잡해지거나 일반화가 필요하게 되면서 학생들은 구어적 형태의 반복 접근 대신 규칙을 형식적으로 표현하는 방법을 요구하게 된다. 일반화 과정에서 규칙을 찾기 위해 다양한 전략이 사용되며 그 규칙을 서술하기 위해 변수 개념의 아이디어와 연결된다. 이를 통해 변수 개념이 확립되면, 학생들은 패턴을 일반화하는 과정에서 사용된 전략이나 방법 그리고 여러 표현들 사이의 동치관계를 파악할 수 있게 된다. 또한 대수식의 단순화에 대한 아이디어를 얻게 된다.

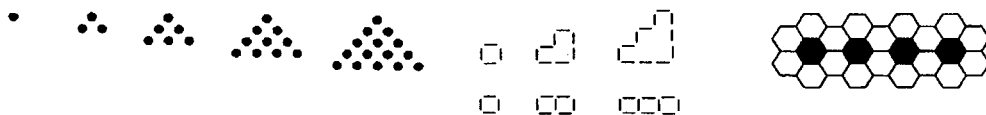
III. 시각적 패턴의 일반화

패턴에는 수의 열 또는 표에서 규칙을 찾는 패턴, 그림으로 표현되는 맥락 안에서 규칙을 찾는 패턴, 계산 절차에서의 패턴, 1차식이나 2차식으로 표현되는 패턴 등 여러 가지 종류가 있다. 특히 그림으로 표현되는 맥락에서 규칙

을 찾는 시각적인(모양) 패턴에는 다음 [그림 III-1]과 같은 점으로 된 패턴, 타일 패턴, 성냥개비 패턴 등이 대표적이라 할 수 있다.

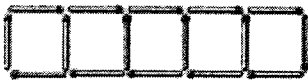
일반적으로 시각적인 패턴은 아이들에게 수의 열이나 표보다 더 생생하고 단순하며, 실제적이고 창조적이며 또한 상징기호보다는 더 기초적이라고 생각한다(Orton & Roper, 1999 p.121). 대수 교육에서 변수 개념을 도입하기 위한 전형적인 패턴 활동으로 도형 활동을 제시하기도 한다(English & Warren, 1998). 그러나 최근 어떤 맥락(context)에서 패턴을 끌어내거나 배열하는 것이 학생들에게 패턴을 일반화하거나 확장하는 것에 자동적으로 도움이 되는가에 대하여 재고의 필요성이 제기되고 있다. 어떤 맥락은 다른 것보다 더 어려울 수 있다는 점, 맥락과 패턴 사이의 어려움의 정도는 차이가 있다는 것, 패턴의 관계와 이전 지식의 맥락이 중요한 개인적 차이를 줄 수 있다는 점, 그리고 맥락과 패턴 사이의 관계와 이러한 관계가 학생들에게 이해되는 방식이 모두 문제가 될 수 있다는 것이다.

특히 최근 몇 가지 연구에서는 시각적 패턴의 도입을 통한 대수 학습에 대한 문제점을 지적하고 있다. 시각적 패턴에서 규칙을 찾는 전략이 여러 가지가 있으며, 학생들은 자신이 찾은 규칙을 일반화한 것을 표현하는 것에 어려움을 겪고 있음을 보여주고 있다(Quinlan, 2001, English & Warren, 1998, Warren, 1997, Stacey, 1989, Ishida, 1997, Stacey & Macgregor, 2001). 무엇보다도 패턴의 탐구를 통해 관계와 규칙을 찾는 방법에 있어서 수의 열이나 표에서 보다



[그림 III-1]

시각적인 패턴에서 다양한 접근 방법이 있을 수 있다. 또한 시각적인 패턴을 일반화하는 과정에서 그림에서 수로 전환할 경우 교사는 아이들의 여러 가지 접근 방법을 의식할 필요가 있다. 예를 들어 다음 [그림 III-2]와 같은 패턴에서 정사각형의 수와 성냥개비의 관계는 $3x+1$, $4+3(x-1)$, $2x+x+1$ 이라는 세 가지 일차식으로 표현 될 수 있는데, 이는 학생들이 규칙을 찾는 방법과 관련된다.



[그림 III-2]

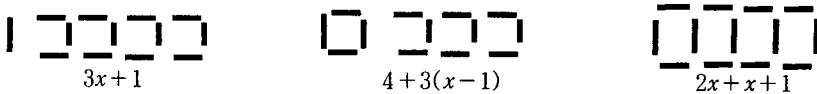
$3x+1$ 은 [그림 III-3]에서처럼 패턴을 첫 번째 성냥개비와 그 다음에 필요한 성냥개비의 개수로 보는 경우이다. $4+3(x-1)$ 에서 4는 첫 번째 사각형의 성냥개비의 개수이며 $3(x-1)$ 은 나머지 $(x-1)$ 사각형에서 필요한 성냥개비의 개수이다. 그리고 $2x+x+1$ 은 [그림 III-3]과 같이 사각형의 위에 있는 성냥개비의 수 x 와 가운데 성냥개비의 수 $x+1$ 그리고 아래의 성냥개비의 수 x 또는 수평으로 보이는 성냥개비의 수 $2x$ 와 수직으로 보이는 성냥개비의 수 $x+1$ 개를 의미한다.

또 다른 경우, 점으로 된 삼각형 패턴, 즉 삼각수-[그림 III-1]의 첫 번째의 경우도 여러 가지 방법으로 일반화할 수 있다. 첫 번째 방법은 각각의 삼각형을 이루는 점의 개수를 바로 수로 나타내는 것이다. 두 번째 방법은 새로운 삼각형을 만들 때 늘어나는 점의 개수를 세는

방법이다. 즉 새로 생기는 선에 포함된 점의 개수를 세는 것으로, 이것은 이전 삼각형의 점의 개수와 새로운 삼각형의 점의 개수 사이의 차이를 의미한다. 세 번째 방법은 형태를 지각하는 방법이다. 삼각형을 사각형의 반으로 보는 방법으로 곱셈이나 산술 연산과 관련된다.

우리나라 제 7 차 교육과정을 살펴보면, 초등학교에서 다양한 패턴활동을 도입하고 있는데, 시각적 패턴을 통해 규칙적인 배열을 찾는 활동이 1학년에서 시작되어 이후 4학년에서는 삼각형과 사각형 모양의 바둑돌 배열 및 여러 가지 시각적 패턴에서 규칙을 찾도록 한다. 그러나 닳음인 큰 도형을 만드는 그림에서 도형의 개수를 묻는 문제와 같이, 도형의 개수를 구하여 수 패턴을 찾는 데 초점을 두고 있다. 다시 말해 패턴의 인식보다 계산 방법에 치중되어 있다고 할 수 있다. 김성준(2002)에 따르면, 패턴은 대수적 사고를 개발하기 위한 도구로 제시되는 것이 아니라 계산을 위한 단순한 도구 다루어지고 있는 것이다.

또한 한 번 사용된 시각적 패턴은 다시 사용되거나 발전되지 못한 채 하나의 문제 상황에서 적용되는 단편적인 지식으로 그치고 있다. 우리나라 교육과정의 '문자와 식' 단원과 '규칙성과 함수' 단원에서 대수와 관련된 내용을 다루고 있다. 그 가운데 패턴과 관련된 내용은 주로 '규칙성과 함수'에서 다루어지고 있으며, 주로 표를 통해 함수적 관계를 파악하는 정도이다. 우리나라 교육과정에서는 시각적 패턴은 문자를 도입하는 대수적 표현으로 발전하지 못하고 있으며, 단순히 규칙을 찾아서 그 값을



[그림 III-3]

구하는 정도에 머물고 있다.⁵⁾ ‘문자와 식’에서는 문자와 대수식을 다루고 있으며 이어서 방정식의 학습으로 진행되고 있다. 즉 초등학교 수학에서의 패턴은 중학교 이후 대수와 연결되어 제시되지 않고 있다.

IV. 시각적 패턴과 기호적 표현

패턴 활동을 통한 학습에서의 어려움이나 문제점은 패턴의 규칙을 일반화하여 그 구조를 보는데 방해가 된다. 패턴을 일반화하는 단계에서 여러 가지 어려움이 발생할 수 있는데, 그 어려움을 인지 수준, 언어화 수준, 기호화 수준(Lee, 1996, p.105)으로 구분하기도 한다. 특히 학생들은 패턴을 일반화 하는데 있어서 대수적인 형태로 표현하는 것을 어려워하였으며, 상징기호를 사용하여 일반화 하는 것보다 언어적으로 더 쉽게 일반화하였다(Quinlan, 2001). 즉 언어화된 패턴을 기호를 이용한 대수적 표현으로 패턴을 일반화해서 나타내는 과정에서 학생들이 어려움을 겪는다는 것이다.

문자 기호와 관련된 대수적 사고는 미지수와 변수의 등장으로 나타난다. 미지수는 방정식과 관련된 개념으로, 문제해결 맥락에서 등장한다. 문제 해결에서 미지수의 사용은 분석적 사고와 관련되는 데 비해, 변수는 패턴의 일반화와 관련된 것으로 일반화하는 사고가 그 핵심에 놓여 있다. 분석적 사고와 일반화의 사고는 문자 기호와 관련된 대수적 사고의 두 측면이라 할 수 있다(김성준, 2004, p.35).

패턴을 일반화해 대수식으로 표현하는 과정에서 식의 변형과 동치 관계 속에서 변화 추론이 자연스럽게 나타난다. 시각적 패턴을 일반화하는 과정에서 패턴을 어떻게 파악하는가에 따라 대수식의 표현이 달라지고 이때 각각 다르게 표현된 식의 동치 여부를 생각하는 과정에서 변환추론이 작용한다. 뿐 만 아니라 시각적 패턴을 일반화하는 과정에서는 관점의 전환이 중요하며 이 점 역시 문자와 식의 학습 지도에서 중요하게 취급될 필요가 있는 것이다(김성준, 2004, p.74). 결국 시각적 패턴을 일반화하는 과정은 여러 가지 대수적 사고의 요소가 필요하게 되며 그것이 충분하지 못할 경우 일반화 과정이 쉽지 않은 것이다. 특히 기호를 이용한 대수적 표현을 한다는 것은 변수 학습과 관련되어 있다고 할 수 있다. 변하는 대상을 수학적으로 처리 가능하도록 문자화해 나가는 단계를 의식화하는 활동이 필요한 것이다.

학생들이 시각적 패턴을 일반화하여 기호로 표현하는 것과 관련하여, Quinlan(2001)은 호주 11-15세의 중등학교 학생들에게 많이 사용되고 있는 4 종류의 시각적 패턴에 대한 문제지를 통해 검사를 시행하였다.⁶⁾ 학생들은 시각적 패턴을 언어적으로 일반화하고 그 다음 대수적 상징기호를 사용하여 일반화하는데 있어서 매우 낮은 성공률을 보였다. 이러한 어려움은 사후 검사에서도 지속적으로 나타났다.

Stacey(1989), Ishida(1997)는 시각적 패턴을 일반화하는 전략과 단계에 대해 연구하였는데, 일차식으로 표현되는 패턴의 일반화 과정에는 단계가 있으며, 그러한 단계를 거쳐 일반화 과정에

5) 형식적이던지 비형식적이던지 간에, 시각적 패턴을 일반화하는 과정에서 문자를 도입하는 것은 중학교 교과서에서 거의 다루어지고 있지 않으며, ‘확인 그리고 한 걸음 더’(이준열 외 4인, p.93)과 ‘좀 더 알아보기’(강행고 외 9인, p.115)에서 다루고 있다.

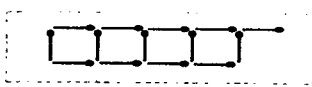
6) 1998년 초-중등학생을 위한 학습/교수 전략 연구를 위한 팀 연구 중 하나로서, 호주 여러 지역의 23개 학교에서 1156명의 7학년 학생(평균 12.64세; 11.33-15.17)에게 검사를 실시하였다.

서 학생들의 능력과 전략을 살펴보았다. 시각적 패턴을 일반화하는 단계에서⁷⁾ 도형의 개수가 5, 6개 미만인 단계('Warm-up' exercise), 단계적으로 그림을 그리거나 세어서 문제를 해결할 수 있는 'near-generation'(n=10 또는 20), 'near-generation'에서의 단계적 접근 방법을 넘어 일반화의 필요성이 제기되는 'far-generation'(n=100 이상) 단계가 있음을 말한다. 그리고 'near-generation' 단계의 문제(n=10 또는 20), 'far-generation' 문제(n=100 이상), 패턴의 규칙을 언어적으로 표현하고 식으로 표현하는 단계를 구분하여 검사를 시행하여 학생들의 패턴의 일반화 과정에서의 성취도와

어려움을 논의하였다.

우리나라 학생들도 역시 패턴의 일반화 과정에서 선행 연구와 유사한 사고 전략과 어려움을 보여 주고 있었다. 이미 앞에서 언급하였듯이 우리나라 초등학교 교육과정에서는 시각적 패턴에서 관계를 탐색하고 그 관계를 표현하는 활동을 하고 있다. 그러나 중학교 대수 교육과정에서는 시각적 패턴의 일반화하는 과정은 포함되어 있지 않다. 이에 따라 본 연구에서는 초등학교 4학년 나 익힘책(p. 123)에 도입되어 있는 문제를 선행 연구를 기초로 변형하여 우리나라 중학교 학생들에게 제시하였다.⁸⁾

★ 다음과 같이 성냥개비로 정사각형을 만들었습니다. 정사각형을 8개 만드는 데에 필요한 성냥개비는 몇 개인지 알아보시오.



● 대응표를 완성하시오.

정사각형 수	1	2	3	4	5		
성냥개비 수	4	7	10				

- 정사각형 1개를 만드는 데에 필요한 성냥개비는 몇 개입니까?
- 정사각형 1개를 더 만드는 데에 필요한 성냥개비는 몇 개입니까?
- 정사각형 8개를 만드는 데에 필요한 성냥개비는 몇 개입니까?
- 정사각형 수와 성냥개비 수 사이의 관계를 말하여 보시오.

[그림 IV-1] 4학년 나 익힘책 문제와 검사지 문항

○ 다음과 같이 성냥개비를 연결하여 정사각형을 만들고 있습니다.



- (1) 정사각형 6개를 만드는 데 필요한 성냥개비는 몇 개입니까?
- (2) 정사각형 20개를 만드는 데 필요한 성냥개비는 몇 개입니까?
- (3) 정사각형 100개를 만드는 데 필요한 성냥개비는 몇 개입니까?
- (4) 성냥개비의 수를 어떻게 찾았는지 설명하시오.
- (5) 정사각형 수와 성냥개비 수 사이의 관계를 식으로 나타내시오.

- 7) 학생들은 시각적 패턴을 통한 활동보다 표를 통한 활동에서 보다 쉽게 일반화 하였다(English & Warren, 1998, Stacey, 1989, Ishida, 1997). Warren(1992)은 시각적 표상과 기호적 표상을 연결하기 위해 노력하는 것이 중요하지만 학생의 대부분은 이러한 목표를 성취하는 데 실패하는 것으로 보인다고 하면서 36명 학생에 대한 인터뷰에서 학생들은 시각적인 패턴보다는 표에서 일반화를 쉽게 기술하였다고 말하고 있다(Quinlan, 2001, p.429, 재인용). 그러나 이 글에서는 시각적 패턴을 일반화하는 과정에서 표를 의식적으로 사용하도록 하지 않았다. 그리고 표를 사용하던 하지 않던 간에 일반화 단계가 구분되고 있었다.
- 8) 서울시에 위치한 남부 지역의 두 개의 중학교에서 각각 두 개 학급 1학년 남·여학생 126명에게 정규 수업시간 중 질문지를 통해 10분-15분 정도 테스트를 시행하였고, 남부 지역의 한 개 중학교와 북부 지역의 한 개 중학교에서 각각 2학년 학생 2개 학급씩 모두 256명에게도 시행하였다. 우리나라 학생들의 시각적 패턴에 대한 일반화 기호화 능력을 살펴보기 위하여 선행연구를 바탕으로 우리나라 초등학교 과정에서 도입되었던 시각적 패턴 문제를 변형하였다. (1)번은 'Warm-up' 문제(n=6), (2)번은 'near-generation' 문제(n=20), (3)번은 'far-generation' 문제(n=100)에 해당되는 문제이며, (4)번은 언어적 표현에 관한 것이고 (5)번은 기호적 표현에 관한 문제로서 Ishida(1997), Quinlan(2001), English & Warren(1998), Stacey(1989)의 검사용 문항을 기초로 하고 우리나라 4-나 교과서 익힘책의 문항을 변형하였다. 그리고 제 7 차 교육과정 중 초등학교 과정에서는 기호를 사용하여 식을 표현하지 않기 때문에 중학교 1학년에게 문자와 식을 배운 후(2005, 11월) 테스트를 시행하였다. 이 문제에서 사용된 패턴의 관계식은 $ax + b$ 형태인데, 이는 중학교 2학년 과정에서 배우는 관계식이기 때문에 중학교 2학년에게도 검사를 시행하였다. 또한 2학년 130명 학생에게 실시한 결과, 주석 8의 설명에서와 같이 비만을 사용하여 (3)번 문제를 해결하는 경우가 많았기 때문에 질문지의 그림을 [그림 2]의 형태로 수정하였고 'far-generation' 문제에서 정사각형의 개수를 100개에서 150개로 수정하여 다시 제시하였다. 그러나 여전히 비만을 사용하여 (3)번 문제를 해결하려는 학생들이 있었다.

그 결과 1, 2, 3번 문항에서 높은 정답률을 보이고 있으나 4번은 중학교 1학년 31명(24.6%), 중학교 2학년 49명(37%), 5번은 중학교 1학년 68명(53.9%), 중학교 2학년 94명(72%)가 바르게 답하였다. 일반화 과정에 있어서 (1)번 ‘Warm-up’ 단계 (2)번 ‘near-generation’ 단계에서는 주로 그림을 그려서 세어보거나, 증가하는 수 3을 계속 더하여 성냥개비의 개수를 찾았다.

- (1) 정사각형 6개를 만드는데 필요한 성냥개비는 몇 개입니까? 197개
 $4+3+3+3+3+3$
- (2) 정사각형 20개를 만드는데 필요한 성냥개비는 몇 개입니까? 61개
 $4+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3$

[그림 IV-2] 학생의 풀이 예

그리고 (3)번 ‘far-generation’ 단계에서는 (1)번과 (2)번에서 사용하는 방법으로 할 수 없다는 것을 인식하고 패턴의 규칙을 찾거나 (2)에서 나온 결과에 산술적인 계산을 하였다. 즉 정사각형 20개를 만드는데 필요한 성냥개비의 수가 61개이면 정사각형 100개를 만드는데 필요한 개수는 20개의 5배인 61×5 를 계산하였고, 정사각형이 150개인 경우에는 (2)번에서 10개인 경우를 찾아 그 결과에 15를 곱하기도 하였다. 다음은 검사 결과를 <표 IV-1>로 정리한 것이다.

중학교 1학년 학생 중 5번 응답자 68명 중 24명이 $4+3(x-1)$ 로, 나머지 44명이 $3x+1$ 형태로 답하였으며 다른 형태로 답한 학생은 없었다. 그리고 외국의 선행연구와 비교하여 특이한 점은 언어적 일반화(4번)의 정답률이 기호적 일반화(5번)의 정답률보다 낮다는 점이다. 이는 초등학교 교과내용에서는 자신이 찾은 관계를 설명하도록 하고 있으나 중학교에서 이러한 내용이

지속적으로 학습되지 못하고 초등학교보다 형식적인 성향의 수학을 학습하기 때문이라 생각되지만 이 점에 대한 연구가 더 필요하다고 생각된다. 마지막의 규칙을 기호를 사용하여 식으로 표현하는데 있어서도 [그림 IV-4]과 같이 기호보다는 다양하게 식으로 표현하고 있었다. 기호를 사용하는 경우 주로 x, y, n 을 사용하였다. 그리고 주로 (사각형의 수), (성냥개비의 수)와 같이 언어를 직접 사용하여 식으로 표현하였다.

그리고 1학년 경우에는 \square, \triangle 를 사용하여 식으로 표현하는 경우가 있었고, 2학년의 경우에는 기호를 사용하여 식으로 표현하였는데, 자신이 찾은 규칙을 그대로 표현하는 경향이 있어서 주로 $4+3(x-1)$ 로 표현한 다음에 $y=3x+1$ 이라고 수정하였다.

주어진 패턴에서 규칙을 찾는 방법에 따라 그 규칙이 다르게 표현된다는 점이 바로 시각적 패턴 활동이 조기의 대수적 아이디어나 합수적 사고를 위해 의미 있다고 할 수 있지만, 선행 연구(English & Warren, 1998, p. 167)에 따르면 12-15세의 학생들에게 그 과정이 쉽다고 할 수만은 없다. 1차식으로 표현되는 패턴은 $x+c, ax, ax+c, ax-c$ 의 4가지 형태로 일반화되는데, 학생들은 $ax+c, ax-c$ 과 같이 좀더 복잡한 식으로 표현되는 패턴에서 규칙을 찾고 일반화하는 것을 어려워한다는 것이다.

학생들의 어려움은 일반적인 규칙을 결정하는데 사용하는 부적절한 전략에서도 드러난다. 능숙하지 못한 학생들은 단지 한 단계에서만 규칙을 관찰하고 비만을 사용하여 일반화하거나 각 단계에서 같은 양 만큼씩 증가한다는 것을 관찰하여 더하기를 통해서만 일반화하는 경향이 있다.⁹⁾ 학생들은 패턴을 표현하기보다

9) ‘비만을 사용하는 전략(ratio strategy)’의 예로써 3번째 단계에서 10개의 성냥개비가 필요하다고 보고 10번째 단계에서는 $3 \times 10 = 30$ 이므로 30개가 필요하고 100번째에서는 $10 \times 10 = 100$ 이므로 100개가 필요하다고 답하는 경우이다. ‘더하기 전략(additive strategy)’은 4,7,10,13...에서 각 단계에서 3씩 더해지므로 산술적인 사실을 다음과 같이 series로 기록하는 경우이다. $4+3=7, 7+3=10, 10+3=13, \dots$

산술에서 익숙한 계산을 이용해서 그 답을 나타내려는 경향을 보이고 있는데, 이는 패턴을 대수적 표현으로 나타내는데 장애가 된다.

패턴의 일반화 과정에서 큰 수는 산술에서 대수로 넘어가는 이행에서 인식한 패턴을 산술 계산에 의존하려는 경향에서 벗어나도록 하는데 도움을 준다. 큰 수는 대수적 표현을 이끌어 내기 위한 중간 단계에서 산술 과정과 대수 결과를 동시에 나타내기 위해 효과적으로 사용될 수 있다. 따라서 큰 수와 같은 도구의 적

절한 사용은 산술 패턴에서부터 대수적 표현을 이끌어내는데 도움이 되며, 이를 통해 패턴의 구조를 파악하는데 결정적인 역할을 한다(김성준, 2003, pp.349-350).

학생들은 시각적 패턴에서 산술 패턴에서처럼 그 값을 먼저 계산하려는 경향을 보이지만, 능숙한 학생들은 함수적 관계를 확인하려고 하고 일반화한 규칙을 대수적인 기호로 표현하려고 한다는 것이다. 즉 각 단계와 그 단계에서 필요한 성냥개비의 개수를 연결하는 함수적 관

<표 IV-1>

문제	정답률	
	중학교 1학년(126명)	중학교 2학년(130명)
(1) Warm-up 문제	122명	127명
(2) near-generation 문제	115명	126명
(3) far-generation 문제	113명	122명
(4) 언어적 기술	31명(24.6%)	49명(37%)
(5) 기호적 표현	68명(53.9%)	94명(72%)

(4) 성냥개비의 수를 어떻게 찾았는지 설명하십시오.

(4) 성냥개비의 수를 어떻게 찾았는지 설명하십시오.

(5) 정사각형 수와 성냥개비 수 사이의 관계를 식으로 나타내시오.

(5) 정사각형 수와 성냥개비 수 사이의 관계를 식으로 나타내시오.

[그림 IV-3] 일반화에 대한 언어적 표현과 기호 표현

(5) 정사각형의 수와 성냥개비의 수 사이의 관계를 식으로 나타내어 보세요.

(5) 정사각형의 수와 성냥개비의 수 사이의 관계를 식으로 나타내어 보세요.

(5) 정사각형의 수와 성냥개비의 수 사이의 관계를 식으로 나타내어 보세요.

(5) 정사각형의 수와 성냥개비의 수 사이의 관계를 식으로 나타내어 보세요.

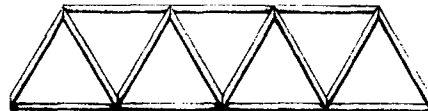
[그림 IV-4] 일반화에 대한 기호적 표현

계를 탐색하고 그 결과를 기호로 사용하여 형식화 한다. 그러나 학생들은 패턴을 일반화 하는데 있어서 대수적인 형태로 표현하는 것을 어려워하였으며 상징기호를 사용하여 일반화하는 것보다 언어적으로 더 쉽게 일반화하였다(Quinlan, 2001). 패턴을 일반화하는 과정을 학생 스스로 말로 설명하는 것은 패턴을 대수적으로 표현하고 함수를 재인식하는 과정에서 매우 중요하다(Stacey & Macgregor, 2001, p.150).

패턴 활동에 있어서 학생들에게 요구되는 것은, 먼저 유연하고 명료하게 표현할 수 있는 사고로서, 이는 구체적인 사례에서 일반적인 규칙으로의 전환과 패턴과 식을 동등하게 다루는 데 있어서 매우 중요한 요소이다. 또한 일반화 과정에서 등호 개념을 인식하는 것이 중요하다. 서로 다르게 찾은 규칙 사이에 동치관계를 인식해야 하기 때문이다.¹⁰⁾

무엇보다도 패턴의 일반화를 기호로 표현하기 위해서는 대수 언어에 대한 능숙함이 요구된다(Quinlan, 2001, p.461). 학생들이 대수적 기호로 패턴의 일반화를 표현하기 위해서는 먼저 대수적 언어에 친숙해야만 하는 것이다. Britannica 교과서의 대수 교육과정에서는 패턴을 대수학습의 출발점으로 보고 있으며, 변수, 대수식, 방정식 등의 형식적인 대수 학습으로 전개시키고 있다. 패턴이 단순히 반복되는 그림이 아니라 여러 가지 구체적인 활동을 통해 대수 언어를 필요성에 의해 도입하고 연습시키며 일반성을 표현하는 방법으로 발전시키고 있다. 「Building formulas」에서는 「Pattern and symbol」에서 사용하였던 블록 패턴을 이용하여 다른 상황에서 공식을 다르게 표현함으로써

대수식의 동치 및 분배법칙 등을 재발명하도록 하고 있다. 예를 들어 'Beam'이라는 소단원에서 다음과 같이 패턴을 보는 방법을 제시하고 그것을 식으로 표현하고 식에 대해 탐구하고 있다(p.12).



[그림 IV-5] 「Building formulas」 중 패턴 탐구의 예

V. 마치며

최근 수학교육과정에서 대수적 함수적 사고 교육을 위해, 패턴들을 표현하면서 일반적인 규칙을 인식하고 설명하는 것이 하나의 대안으로 제시되고 있으며 수학의 전반적인 부분과 관련을 맺으며 강조되고 있다. 특히 패턴에 기초한 대수의 도입은 미국, 영국, 호주를 비롯한 각국의 교육과정에서 나타난 가장 중요한 변화 중 하나이다. 패턴에 기초한 교육과정에서는 패턴의 일반화 과정을 통해 문자를 도입하고 함수적 관계들과 그것을 이해하고 설명하기 위하여 언어로 또는 문자로 표현하고 있다. 패턴 탐구를 통해 패턴의 규칙을 서술하는데 언어적

10) 표를 통한 패턴의 일반화는 등호 개념을 탐구하는 기회를 제공하는 데 제한점이 있다. 학생들은 표에서 패턴의 함수적 관계의 탐색에 있어서 주로 시행착오 접근방식을 사용하는 경향이 있으며, 시각적 패턴에서처럼 다양한 방법으로 관계를 일반화하는 것을 고려하지 못한다는 제한점이 있다(English & Warren, 1998, p.169).

규칙을 형식화하고 그 상황을 일반화하는 방법을 찾는 전형적인 패턴활동으로서 시각적 패턴과 표에서 규칙을 찾고 일반화하는 활동을 제시하고 있다. 우리나라 7 차 교육과정에서도 시각적 패턴과 표를 통해 관계와 규칙성을 찾고 일반화하도록 하고 있다.

앞서 살펴보았듯이, 7학년 과정에서는 표를 통하여 반비례와 비례 관계를 통해 함수 개념을 도입하고 있으나 초등학교 과정에서의 다양한 패턴 활동과 일반화하는 여러 가지 방식들이 중학교 과정의 함수교육과정과 자연스럽게 연결되지 못하고 있다. 또한 패턴 활동에서 규칙을 찾아 일반화하고 그것을 수학적으로 표현하는 부분에서 학생들이 어려움을 느끼고 있으며 이에 대한 많은 연구가 필요하다. 여러 가지 맥락과 다양한 패턴의 어려움의 정도에 있어서도 차이가 있으며 이에 따라 각 연령과 단계 맞는 패턴을 찾아야 하며, 여러 가지 종류의 패턴의 특징과 어려움의 정도 그리고 각 패턴에서 학생들이 일반화하는 전략이나 형태 등과 같은 문제들을 여러 가지 측면에서 연구해야 할 것이다.¹¹⁾

패턴 탐구 활동을 통한 대수 학습과 관련하여 몇 가지 권고를 제시하면서 이 글을 마치고자 한다.

첫째, 학생들에게 시각적 패턴의 규칙에 대한 수치적인 관계를 말로 표현하고 이러한 관계를 기호 형태와 관련시키는 경험을 지속적으로 제공하도록 한다. 학생들은 패턴 활동 전에 정확한 기호표기법과 관련하여 다른 여러 방식의 언어적 표현으로 수치적 관계를 기술하는 경험을 하도록 한다. 이미 언급한 바와 같이 현재 초등학교 과정에서 도입하고 있는 시각적

패턴들은 중학교 과정에서는 도입되지 않는다. 그러나 초등학교 과정에서 시각적 패턴의 규칙을 일반화하는 활동을 중학교 과정에서 다시 도입하여 기호화하는 활동으로 발전시킨다. 예를 들어 앞에서 언급하였던 검사 문항들은 초등학교 교육과정에서 도입된 것을 중학교 과정으로 변형한 것이다. 초등학교 과정에서는 시각적 패턴의 규칙을 Δ , \square 를 사용한 식으로 표현할 수 있다. 중학교 과정에서도 초등학교 과정에서 학습하였던 시각적 패턴들의 규칙을 먼저 Δ , \square 또는 여러 가지 언어적 방식(예를 들어 삼각형의 개수, 바둑돌의 개수 등)을 통해 규칙을 기술하는 과정을 경험한 후에 기호를 사용하여 규칙을 다시 표현하도록 지도하도록 한다.

둘째, 학생들이 시각적 패턴의 반복적인 성질을 인식하는 것만이 아니라 이러한 인식을 넘어 관계적인 성질을 탐구할 수 있도록 한다. 앞에서 언급하였듯이 학생들이 패턴의 일반화에 있어서 '더하기 전략(additive strategy)'에만 고착된다면 함수적 관계를 찾는 것이 어려워진다. 따라서 두 가지 전략이 연결되도록 해야 하는 데, 수치적 패턴을 통한 활동이 필요하다. 이미 초등학교 교육과정에서는 시각적 패턴을 수로 표현하도록 지도하고 있으며, 앞에서 본 바와 같이 표로 표현하도록 지도하고 있다. 표에서는 변수의 값으로 실수까지 사용할 수 있으며 일반화된 수로서 변수의 아이디어를 도입할 수도 있다. 그리고 표에서는 투입과 산출의 관계를 즉각적으로 고찰할 수 있다. 그러나 이미 언급하였지만, 표에서는 일반화 된 규칙과 동치인 식을 탐구하는 데 있어서 제한점이 있다. 따라서 시각적 패턴과 표를 적절하게 사용

11) Radford(2000)의 경우, 학생들이 기호를 가지고 패턴을 일반화하는 과정을 기호학적 측면에서 연구하였고, Martinon, A & Carcia-Cruz, J A(1997)은 Dubinsky의 이론을 바탕으로 패턴을 일반화하는 과정을 연구하였다.

하여 규칙을 일반화하고 표현하도록 해야 할 것이다.

셋째, 하나의 패턴을 완성하고 여러 패턴 안에서 패턴을 발견하는 경험을 하도록 한다. 이는 관점의 전환과 패턴을 보는 능력과 관련된 사고의 유연성 그리고 반복되는 부분을 볼 수 있는 공간적 능력과 관련된다. 초등학교 교육과정에서는 1단계부터 시각적 패턴을 통해 반복, 변형, 확장하는 활동을 하고 있다. 기존의 패턴을 여러 가지 방법으로 변형하거나 확장하여 또 다른 새로운 패턴을 만들어 보는 활동을 하도록 한다. 주어진 기본 단위를 여러 차원으로 반복하거나 주어진 기본 단위를 변형하거나 자신의 새로운 패턴을 만들어 보는 등의 활동을 하도록 지도한다.

넷째, 단순한 대수식을 조작하는 경험을 한 후 시각적인 요소와 동등한 개념을 표현하도록 한다. 중학교 교육과정에서는 7-가 단계의 ‘문자와 식’ 단원에서 기호와 기호로 표현하는 식을 도입하고 있다. 시각적 패턴의 규칙을 언어로 설명한 후 바로 기호로 표현하는 것이 그리 쉽지 않다는 것은 이미 고찰하였다. ‘문자와 식’ 단원을 배운 후에 이미 초등학교 교육과정에서 도입하였던 시각적 패턴의 규칙을 문자나 식으로 표현하는 발전적인 경험을 하도록 지도한다.

다섯째, 시각적 패턴을 통해 대수식을 구체적인 맥락과 관련시킨다. 시각적 패턴의 제한점은 일반화를 표현한 식에서 변수로 0과 자연수의 값만을 갖는다는 점이다. 이러한 제한점이 오히려 장점이 될 수 있는데, 123.45장 또는 92.5대의 버스와 같은 답으로 인해 문제의 맥락과 현실의 맥락이 분리되는 경우를 피할 수 있다.(또한 선행연구에서 학생들은 시각적 패턴에서 특별한 변수만이 부여된다는 제한점을 인식할 수 있었다) 또한 단순히 그림이 반복, 확

장되는 상황이 아니라 구체적인 상황 속에서 반복되는 패턴을 찾고 수 관계로 파악하여 일반화하도록 한다. 예를 들어, 우리나라 초등학교에서 도입되었던 성냥개비로 구성된 삼각형 패턴이, 앞에서 언급하였던 Britannica 교과서의 「Building formulas」 중에서는 영화세트를 만들기 위한 철 구조물을 만드는 상황에서 도입되고 있다. 따라서 영화세트를 만들기 위해 100개 이상의 강철 막대의 필요성을 느낄 수 있으며, 자연스럽게 구조물을 위한 강철 막대의 개수를 예상하게 된다. 보다 현실적이고 구체적인 상황 속에서 시각적 패턴을 인식할 수 있는 기회와 인식한 패턴에 대한 일반화, 기호화의 필요성을 느낄 수 있도록 지도해야 할 것이다.

참고문헌

- 강행고 외 9인(2001). 중학교 수학 7-가. (주) 중앙교육진흥연구소
- 교육인적 자원부(2002). 초등학교 수학교과서 1-가, 1-나, 2-가, 2-나, 3-가, 3-나, 4-가, 4-나, 5-가, 5-나, 6-가, 6-나. 대한교과서 주식회사
- 교육부(1999). 초등학교 교육과정 해설
- 교육부(1999). 중학교 교육과정 해설
- 김택현(1999). 패턴 활동으로 구성된 함수 단원 개발과 적용; 중학교 1학년 함수 단원을 중심으로, 한국교원대학교 석사학위 논문
- 김상미(1997). 수학적 패턴에 관한 학습 프로그램 개발 연구: 초등학교 4 학년을 대상으로, 한국교원대학교 석사학위 논문
- 김남희(1997). 변수 개념의 교수학적 분석 및 학습-지도 방향 탐색, 서울대 대학원 박사학위논문
- 김성준(2002). 대수 교육과정의 변화에 관한 고

- 찰, *수학교육학연구*, 12(3), 353-369.
- _____(2003). 패턴의 일반화를 강조한 대수 접근법 고찰, *학교수학*, 5(3), 343-360.
- _____(2004). 대수적 사고 요소 분석 및 학습-지도 방향 탐색, 서울대 대학원 박사학위논문
- 박교식(2002). 수열의 교수 학습을 위한 교수단원 소재 연구: 다각수와 각뿔수, *학교수학* 4(3), 361-373.
- 안종률(1999). 5학년 아동을 위한 수학적 패턴 프로그램 개발과 적용, 한국교원대학교 석사학위논문
- 오순임(2002). '규칙성과 함수' 영역의 교수·학습 방법 탐색, 부산교육대학교 석사학위논문
- 이재우(2000). 규칙성 영역의 지도 내용 계열 분석, 서울교육대학교 교육대학원 석사학위논문
- 이준열 외 4인(2001). 중학교 수학 7-가, 8-가, 9-가, (주)디딤돌
- Britannica(1998), *Patterns and Symbols*, Encyclopedia Britannica Education Corporation
- Britannica(1998), *Patterns and Figures*, Encyclopedia Britannica Education Corporation
- Quinlan, C (2001). 'From geometric patterns to symbolic algebra is too hard for many', Proceeding of the 24th annual conference of MERGA, p.457-464
- Ishida, J (1997). 'The teaching of general solution methods to pattern finding problem through focusing on evaluation and improvement process', *School Science and Mathematics* 97(3), p.155-162
- Stacey, K (1989) 'Finding and Using patterns in linear generalising problem', *Educational studies in mathematics* 20, p.147-164
- Lyn D, English & E A, Warren(1998) 'Introducing the variable through pattern exploration', *The mathematics teacher* Vol. 91, No 2, p.166-170
- Zazkis, R & Liljedahl, P(2002) 'Generalization of patterns'; The tension between algebraic thinking and algebraic notation, *Educational studies in mathematics* 49, p.379-402
- Radford, L(2000) 'Signs and meaning in students' emergent algebraic thinking', *Educational studies in mathematics* 42
- Orton, J, Orton, A, Roper, T(1999) 'Pictorial and practical contexts and the perception of pattern', *Pattern in the Teaching and learning of mathematics*, p.121-136, Redwood Books Ltd.
- Stacey, K & MacGregor, M(2001) 'Curriculum reform and approaches to algebra', *Perspectives on school algebra*, p.141-153, Kluwer Academic Publisher.

Generalization and Symbol Expression through Pattern Research - Focusing on Pictorial/Geometric Pattern -

Kang, Hyun Yyoung (lecturer at Hong-ik University)

Recently in algebra curriculum, to research activity of pictorial/geometric pattern recognizes and explains general rule that is introduced much on elementary school expressing patterns is presented as the one mathematics curriculum and investigates alternative and is emphasized. In the seventh various approach and strategy of student's School Mathematic Curriculum regarding thinking, state of symbolization in 'regularity and function' area, in elementary generalization process of pictorial/geometric school curriculum, is guiding pattern activity pattern. And discusses generalization of of various form. But difficulty and problem pictorial/geometric pattern, difficulty of of students are pointing in study for learning symbolization and suggested several through pattern activity. In this article, proposals for research activity of pictorial/ emphasizes generalization process through geometric pattern.

* key words : pictorial/geometric pattern(시각적 패턴), pattern research(패턴 탐구),
generalization and symbolization(일반화와 기호화)

논문접수 : 2007. 5. 10

심사완료 : 2007. 6. 22