論 文
56-9-22

제한된 구동기 용량을 갖는 시간지연 선형시스템의 H_∞ 제어

H_∞ Control of Time-Delayed Linear Systems with Limited Actuator Capacities

李 淵 圭* · 金 鎭 勳†
(Yearn-Gui Yi · Jin-Hoon Kim)

Abstract - In this paper, we consider the design of H_∞ high-gain state feedback control for time-delayed linear systems with limited actuator capacities. The high-gain control means that the control permits the predetermined degree of saturation. Based on new Lyapunov-Krasovskii functional, we derive a result in the form of matrix inequalities. The matrix inequalities are consisted of LMIs those confirm the positive definiteness of Lyapunov-Krasovskii functional, satisfaction of predetermined degree of saturation, reachable set and L_2 gain constraint. The result is dependent on the bound of time-delay and its rate, predetermined degree of saturation, actuator capacity, and the allowed size of disturbances. Finally, we give a numerical example to show the effectiveness and usefulness of our result.

Key Words : Time-delay, Actuator Saturation, Lyapunov-Krasovskii Function, LMI

1. 서 론

제어 시스템의 구성에 있어서 제어기의 입력신호를 받아 실제 제어 대상 시스템을 운용하는 구동기의 존재는 필수적이며 이러한 구동기는 대부분 물리적 혹은 경제적 등의 다양한 제한 조건들로 인하여 용량제한 특성을 갖게 된다. 구동기가 갖는 용량의 제한으로 인해, 구동기의 용량 범위 내에서는 대상 시스템이 선형시스템으로 동작하지만 용량 범위 밖에서는 비선형으로 동작하게 된다. 따라서 이러한 구동기 용량제한을 갖는 시간지연 선형시스템의 안정성 해석 혹은 안정화 문제는 시스템이 지닌 두 가지비선형적 요소 즉, 구동기 용량제한과 시간지연 요소가 시스템을 불안정하게 하거나 시스템 자체의 성능을 저해하는 요소로 작용할 수 있기 때문에 이론적 혹은 실제적인 제어 분야에 있어서 오랫동안 중요한 관심사로 대두 되어온 매우 흥미로운 문제들 중의 하나라고 할 수 있다[23].

구동기 용량제한 시스템에 대한 안정화 문제는 안정성을 보장할 수 있는 제어기를 설계하는 것으로서 구동기 용량제한이 없는 이상적인 선형제어기를 설계한 후, 제어기의 이득을 줄여서 제어 성능을 최소한도로 저하시키도록 하는 앤티-와인드업(anti-windup) 제어기 설계[16] 혹은 구동기의 비선형적인 용량제한 특성을 convex hull 형태로 표현한 후 주어진 폐루프 시스템의 동작 중에 절대로 구동기 포화를 허용하지 않는 저이득(low-gain) 제어기 설계[3][4][6], 구동기의 포화를 허용하는 고이득(high-gain) 제어기 설계[1][2][23] 등이 대표적인 기존의 접근 방법이라고 할 수 있으며 저이득 제어에 비해 고이득 제어가 비교적 높은 성능을 나타낸다고 할 수 있다.

시간지연 선형시스템에 대한 안정성 해석 혹은 안정화 문제는 크게 시간지연 독립과 시간지연 종속의 두 가지로 분류할 수 있다. 시간지연 독립은 모든 시간지연 요소의 크기에 대해 안정성 혹은 안정화를 보장하는 조건을 구하는 것이며 시간지연 종속의 경우에는 시간지연의 크기에 대한 정보를 결과적인 조건식에 포함하며 시간지연 독립 조건에 비해 덜 보수적인 결과를 줄 수 있음이 알려져 왔다. 이러한 시간지연 종속 안정성 및 안정화 조건을 구하는 데 있어서 중요한 문제는 시간지연 요소의 크기를 포함하는 결과적인 LMI의 보수성을 줄임으로서 더 큰 시간지연 값에 대해서도 안정성 혹은 안정화를 보장할 수 있는 LMI 조건식을 유도하는 것으로서 Newton-Leibniz 공식 및 descriptor를 이용한 시스템 변환[7][9][10][11], 적절한 형태의 Lyapunov-Krasovskii 함수의 정의[9][10][11], 벡터-행렬에 대한 부등식 관계를 이용한 불필요한 교차항의 제거[11][12][13], 안정조건 LMI의 음확정 가능성을 높일 수 있는 자유 행렬 변수의 도입[8][18][19] 등의 다양한 방법들이 시도되어 왔다. 이러한 접근방식에 있어서 가장 중요한 요소는 주어진 혹은 변환된 시간지연 선형시

† 교신저자, 正 會 員 : 忠北大學校 電氣電子工學部 敎授·工博
E-Mail : jinhkim@chungbuk.ac.kr
* 正 會 員 : 忠北大學校 大學院 制御計測工學科 博士課程
接受日字 : 2007年 4月 24日
最終完了 : 2007年 6月 29日

스템에 대하여 적절한 형태의 Lyapunov-Krasovskii 후보 함수를 정의하는 것이라고 할 수 있으며 바람직한 Lyapunov-Krasovskii 함수는 주어진 시스템의 특성을 잘 표현할 수 있을 뿐만 아니라 안정조건 LMI의 외부변수로서 적용 가능한 $x(t), x(t-d(t)), \int_{t-d(t)}^{t} x(s)ds$등의 변수들 간의 관계성을 효율적으로 표현할 수 있어야 한다. 이러한 외부 변수들 간의 관계성을 표현해주는 기존의 Lyapunov-Krasovskii 함수의 일반적인 형태는 아래와 같다.

$$V(x_t) = x^T(t)Px(t) + \int_{t-d(t)}^{t} x^T(s)Qx(s)ds + \int_{-d(t)}^{0}\int_{t+\theta}^{t} \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)dsd\theta. \quad (1)$$

(1)에서 두 번째항은 LMI 외부 변수인 $x(t), x(t-d(t))$에 대응되는 항을 생성하기 위해 필요하며 마지막 세 번째 항은 시간지연 종속항을 유도하기 위한 목적으로 첨가되었다. 그러나 마지막 세 번째 항의 경우 제어기 설계 시 이중 적분항에 포함된 $\dot{x}(s)$의 존재로 인해 안정화 조건을 보장하는 LMI의 표현이 더욱 복잡해 질 뿐만 아니라 결과의 보수성을 증가시키는 단점이 존재하므로 제어기 설계 시 나타날 수 있는 non-convex 항의 생성을 최대한 억제 가능한 동시에 $\dot{x}(s)$의 표현을 포함하지 않는 간결한 형태의 새로운 Lyapunov-Krasovskii 함수의 정의를 필요로 하게 된다.

따라서 이 논문에서는 이러한 기존의 결과들을 바탕으로 하여 크기가 제한된 왜란의 영향 하에 놓여있는 구동기 용량제한을 갖는 시간지연 선형시스템에 대한 안정화 조건을 구하고자 한다. 첫 번째로 구동기 용량제한 특성을 효율적으로 표현할 수 있는 convex hull 형태를 포함하는 시스템 변환을 수행한 후 변환된 시스템에 대하여 보다 효율적인 안정 조건의 유도가 가능한 개선된 형태의 새로운 Lyapunov-Krasovskii 후보 함수를 정의한다. 다음으로 적절한 벡터-행렬 부등식 조건을 적용하여 시간지연에 종속적이며 용량제한 조건을 만족하는 도달가능 집합 및 H_∞성능을 보장할 수 있는 LMI 조건식을 유도한다. 이 논문은 다음의 순서로 구성된다. 제2장에서는 convex-hull을 활용한 시스템 변환 및 주요 결과에서 중요하게 사용될 예비결과들을 제시한다. 제3장에서는 왜란의 영향 하에 놓여 있는 구동기 용량제한을 갖는 시간지연 선형시스템에 대한 주요 결과를 제시하고 제4장에서 수치예제를 통해 주요 결과의 효율성을 예시한 후 제5장에서 결론을 맺는다.

표기법 : 윗첨자 T는 행렬에 대한 전치를 의미하며, R^n은 벡터 놈 $\|\cdot\|$를 갖는 n-차원 유클리드 공간을 의미한다. $R^{n\times m}$은 $n\times m$ 차원의 실수 행렬들의 집합을 의미하며 $P>0$은 $P\in R^{n\times n}$에 대하여 $P=P^T$ 임과 동시에 양확정(positive definite)임을 나타낸다. $x_t(\theta)=x(t+\theta)$, $\theta\in[-h,0]$임을 나타내며 I_n은 $n\times n$ 차원의 항등행렬을 의미하며 행렬속의 (★)는 대칭임을 나타낸다.

2. 시스템 변환 및 예비 결과

구동기 용량제한을 갖는 시간지연 선형시스템을 아래와 같이 정의한다.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t-d(t)) + B_1 sat(u(t)) + B_2 w(t) \quad (2)$$
$$z(t) = C x(t) + D_{12} u(t). \quad (3)$$

시스템이 갖는 시간지연 값 $d(t)$는 시간에 따라 변화하는 변수로서 아래와 같이 정의된다.

$$0 \le d(t) \le h, \ |\dot{d}(t)| \le \mu < 1 \quad (4)$$

여기서 $x\in R^n$는 시스템의 상태로서 아래의 조건을 만족하며

$$x(t) = 0, \quad t\in[-h,0], \quad (5)$$

$u\in R^m$는 시스템의 입력, $z\in R^l$는 측정출력을 나타내며 $w\in R^d$는 아래의 크기 제한 조건을 만족하는 시스템 상의 왜란으로서 정의된다.

$$w^T(t)w(t) \le w_{max}^2, \ \forall t. \quad (6)$$

다음으로 (2)로 정의된 구동기 용량제한을 갖는 선형시스템을 구동기의 용량제한을 나타내는 꼭지점 변수들을 이용한 convex hull 표현으로 변환한다. 우선 구동기 용량제한을 나타내는 벡터 $sat(u(t))$는 아래와 같이 확장 가능하다.

$$sat(u(t)) = [sat(u_1(t)), sat(u_2(t)), \cdots, sat(u_m(t))]^T. \quad (7)$$

(7)에서 일반적인 입력항 $sat(u_i(t))$의 비선형성은 입력항 $u_i(t)$와 아래와 같은 성질을 갖는 $\phi_i(t)$와의 곱으로 표현 가능하다. 즉, $sat(u_i(t)) = \phi_i(t)\cdot u_i(t)$ 이고 ϕ_i는 아래와 같다.

$$\phi_i(t) = \begin{cases} \dfrac{u_{i,lim}}{u_i(t)} & u_{i,lim} < u_i(t) \\ 1 & -u_{i,lim} \le u_i(t) \le u_{i,lim} \\ -\dfrac{u_{i,lim}}{u_i(t)} & u_i(t) < -u_{i,lim} \end{cases}$$

여기서 상수 $u_{i,lim}$은 입력 $u_i(t)$가 선형성을 유지할 수 있는 최대값을 나타낸다. 따라서, $-\frac{1}{r_i}u_{i,lim} \le u_i(t) \le \frac{1}{r_i}u_{i,lim}$, $r_i\in(0,1]$의 범위내에서 $\phi_i(t)$는 다음의 범위를 취하게 된다.

$$r_i \le \phi_i(t) \le 1. \quad (8)$$

그리고 $\phi_i(t)$를 대각요소로 갖는 대각행렬 $\Phi(t)\in R^{n\times m}$은 다음으로 기술된다.

$$\begin{aligned}\Phi(t) &= diag\{\Phi_1(t),\Phi_2(t),\cdots,\Phi_m(t)\} \\ &= \sum_{i=1}^{2^m}\zeta_i(t)H_i;\quad \sum_{i=1}^{2^m}\zeta_i(t)=1,\quad \zeta_i\in[0,1]\end{aligned} \tag{9}$$

여기서 $H_i, i=1,2,\cdots,2^m$은 행렬 $diag\ \{[\phi_1,1],[\phi_2,1],\cdots,[\phi_m,1]\}$의 꼭지점 행렬이다. 결과적으로 구동기 용량제한을 갖는 시간지연 선형시스템(2)는 $|u_i(t)| \le \frac{1}{r_i}u_{i,lim}$의 범위에서는 아래의 식으로 변환할 수 있다.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= [Ax(t)+B_1\cdot\Phi(t)\cdot K]x(t)+A_dx(t-d(t))+B_2w(t) \\ &= \sum_{i=1}^{2^m}\zeta_i[A+B_1H_iK]x(t)+A_dx(t-d(t))+B_2w(t) \\ &= \tilde{A}x(t)+A_dx(t-d(t))+B_2w(t).\end{aligned} \tag{10}$$

다음으로 (6)으로 정의된 왜란의 영향을 받는 시스템 (2)의 도달가능 집합을 아래와 같은 타원의 형태로서 정의한다.

$$R_x(Z)=\{x\in R^n: x^TZx\le w_{max}^2;\ Z>0\}. \tag{11}$$

마지막으로 주요 정리를 유도하는데 유용하게 사용될 결과들을 보조정리로서 제시한다.

보조정리 1 (Rugh, 1996). $V_1(x)=\int_{a(t)}^{b(t)}f(t,s)ds$라 할 때, 다음이 성립한다.

$$\frac{d}{dt}V_1(x)=\dot{b}(t)f(t,b(t))-\dot{a}(t)f(t,a(t))+\int_{a(t)}^{b(t)}\frac{\partial}{\partial t}f(t,s)ds.$$

보조정리 2 (Gu, 2000). $M\in R^{n\times n}>0$ 이라 할 때, 다음이 성립한다.

$$\left(\int_{t-d}^{t}f^T(s)ds\right)M\left(\int_{t-d}^{t}f(s)ds\right)\le d\int_{t-d}^{t}f^T(s)Mf(s)ds.$$

3. 주요 결과

이제 앞 절에서 제시된 변환된 시스템과 보조정리를 이용하여 (2)로 정의된 구동기 용량제한을 갖는 시간지연 선형시스템에 대한 주요 결과를 아래와 같이 제시한다.

정리 1. (4)의 시간지연을 갖고 (6)의 왜란의 영향하에 놓여 있는 (2)로 정의된 구동기 용량제한을 갖는 시간지연 선형시스템에 대하여 아래의 LMI들을 만족하는 임의의 행렬 $X=X^T\in R^{n\times n}>0$, $Q=Q^T\in R^{n\times n}$, $R_1\in R^{n\times n}$, $R_2\in R^{n\times n}$, $S\in R^{n\times n}$, $W\in R^{n/2\times n}$ 및 임의의 실수 $\alpha>0,\sigma_1,\sigma_2>0,\gamma>0,\varepsilon\ge 0$이 존재하면

$$\begin{bmatrix} X & \sigma_1X \\ \star & Q+\frac{1}{h}e^{-\alpha h}(R_1-hR_2)\end{bmatrix}\ge 0 \tag{12}$$

$$\begin{bmatrix}\sigma_2X & 0 & W_j^T \\ 0 & (1-\sigma_2-\sigma_2\varepsilon)I & 0 \\ \star & \star & \left(\frac{u_{j,lim}}{r_j\cdot w_{max}}\right)^2\end{bmatrix}\ge 0,\quad j=1,2,\cdots,m \tag{13}$$

$$\begin{bmatrix}\widetilde{\lambda_{11}} & 2A_dX-\sigma_1X & \widetilde{\lambda_{13}} & 2B_2 & \sigma_1\mu X \\ \star & \lambda_{22} & \sigma_1XA_d^T-Q & 0 & 0 \\ \star & \star & \lambda_{33} & \sigma_1B_2 & \mu Q \\ \star & \star & \star & -\alpha(1-\mu\varepsilon)I & 0 \\ \star & \star & \star & \star & -\mu S\end{bmatrix}\le 0 \tag{14}$$

$$\begin{bmatrix}\widetilde{\pi_{11}} & 2A_dX-\sigma_1X & \widetilde{\pi_{13}} & 2B_2 & \sigma_1\mu X & \pi_{16} \\ \star & \pi_{22} & \sigma_1XA_d^T-Q & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & \pi_{33} & \sigma_1B_2 & \mu Q & 0 \\ \star & \star & \star & -\gamma^2I & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & \star & -\mu S & 0 \\ \star & \star & \star & \star & \star & -I\end{bmatrix}<0 \tag{15}$$

다음의 제어규칙

$$u(t)=Kx(t);\quad K=WX^{-1}$$

를 적용한 (2)의 도달가능 집합은 $R_x(P)$의 영역에 머물며 입력은 $|u_i(t)|\le\frac{1}{r_i}\cdot u_{i,lim}$의 범위에 존재함과 동시에 왜란 $w(t)$로부터 측정출력 $z(t)$까지의 L_2게인이 γ를 초과하지 않음을 보장한다. 여기서 LMI 내의 각 성분은 아래와 같다.

$$\begin{aligned}
\widetilde{\lambda_{11}} &= 2(AX+XA^T+B_1H_iW+W^TH_i^TB_1^T)+2(\sigma_1+\alpha)X+R_1, \\
\widetilde{\lambda_{13}} &= \sigma_1XA^T+\sigma_1W^TH_i^TB_1^T+\alpha\sigma_1X+Q, \\
\lambda_{22} &= \pi_{22}=-e^{-\alpha h}(R_1-hR_2)+\mu S, \\
\lambda_{33} &= -\frac{1}{h}e^{-\alpha h}R_2+\alpha Q, \\
\widetilde{\pi_{11}} &= 2(AX+XA^T+B_1H_iW+W^TH_i^TB_1^T)+2\sigma_1X+R_1, \\
\widetilde{\pi_{13}} &= \sigma_1XA^T+\sigma_1W^TH_i^TB_1^T+Q, \\
\pi_{16} &= XC^T+W^TD_{12}^T, \\
\pi_{33} &= -\frac{1}{h}e^{-\alpha h}[(1-\alpha h)R_2+\alpha R_1],\quad i=1,2,\cdots,2^m.
\end{aligned}$$

증명. 우선 구동기 용량제한을 갖는 시간지연 선형시스템(2)에 대하여 아래와 같이 Lyapunov-Krasovskii 함수를 정의하자.

$$V(x_t)=V_0(x(t))+V_1(x_t)+V_2(x_t) \tag{16}$$

여기서

$$V_0(x(t))=x^T(t)Px(t)$$

$$V_1(x_t)=\left[x^T(t)\quad \int_{t-d(t)}^{t}x^T(s)ds\right]\begin{bmatrix}P & \sigma_1P \\ \star & PQP\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t) \\ \int_{t-d(t)}^{t}x(s)ds\end{bmatrix}$$

$$V_2(x_t)=\int_{t-d(t)}^{t} e^{\alpha(s-t)}x^T(s)P[R_1+(s-t)R_2]Px(s)ds$$

이며, 위 정의에 의해 $V(x_t)$는 아래와 같이 바꿔 표현할 수 있다.

$$V(x_t)=\tilde{x}^T(t)X\tilde{x}(t)+\tilde{\xi}_t^T\begin{bmatrix} X & \sigma_1 X \\ \star & Q\end{bmatrix}\tilde{\xi}_t + \int_{t-d(t)}^{t} e^{\alpha(s-t)}\tilde{x}^T(s)[R_1+(s-t)R_2]\tilde{x}(s)ds \quad (17)$$

여기서

$$\begin{cases} \tilde{x}(t)=Px(t) \\ \tilde{\xi}_t^T=\left[\tilde{x}^T(t) : \int_{t-d(t)}^{t}\tilde{x}^T(s)ds\right]\end{cases}$$

를 나타낸다. 다음으로 (5)의 조건에 의해 (16)으로 정의된 Lyapunov-Krasovskii 함수는 $V(x(0))=0$의 조건을 만족함을 쉽게 알 수 있으며 (4)로 정의된 시간지연 값과 Lyapunov-Krasovskii 함수의 변수 s에 대한 적분구간의 범위에 의해 아래의 조건이 성립한다.

$$-h \le -d(t) \le s-t \le 0 \quad (18)$$
$$R_1-hR_2 \le R_1-d(t)R_2 \le R_1+(s-t)R_2 \le R_1. \quad (19)$$

이제 (18),(19)의 조건과 보조정리 (2)에 의해 (16)으로 정의된 Lyapunov-Krasovskii 함수가 모든 상태에 대하여 항상 양확정임을 보인다.

$$\begin{aligned} V(x_t) &\ge \tilde{x}^T(t)X\tilde{x}(t)+\tilde{\xi}_t^T\begin{bmatrix} X & \sigma_1 X \\ \star & Q\end{bmatrix}\tilde{\xi}_t \\ &\quad + e^{-\alpha h}\frac{1}{h}\left(\int_{t-d(t)}^{t}\tilde{x}^T(s)ds\right)[R_1-hR_2]\left(\int_{t-d(t)}^{t}\tilde{x}(s)ds\right) \\ &= \tilde{x}^T(t)X\tilde{x}(t)+\tilde{\xi}_t^T\begin{bmatrix} X & \sigma_1 X \\ \star & Q+\frac{1}{h}e^{-\alpha h}(R_1-hR_2)\end{bmatrix}\tilde{\xi}_t>0. \quad (20)\end{aligned}$$

다음으로 (16)으로 정의된 Lyapunov-Krasovskii 함수의 각 항에 대한 (2)의 상태궤적에 따른 시간미분 결과를 각각 유도한다.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V_0(x_t) &= 2\tilde{x}^T(t)X\dot{\tilde{x}}(t) \\ &= 2\tilde{x}^T(t)\left[\tilde{A}X\tilde{x}(t)+A_dX\tilde{x}(t-d(t))+B_2w(t)\right] \\ &= \xi_t^T\Psi_0\xi_t \end{aligned}$$

여기서 $\tilde{x}(t-d(t))=Px(t-d(t))$를 나타내며 행렬 Ψ_0 및 벡터 ξ_t는 다음과 같다.

$$\Psi_0=\begin{bmatrix} \tilde{A}X+X\tilde{A}^T & A_dX & 0 & B_2 \\ \star & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & 0\end{bmatrix},$$

$$\xi_t=\left[\tilde{x}^T(t) \quad \tilde{x}^T(t-d(t)) \quad \int_{t-d(t)}^{t}\tilde{x}^T(s)ds \quad w^T(t)\right]^T.$$

다음으로 두 번째 항에 대한 시간 미분항을 유도한다.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V_1(x_t) &= 2\tilde{\xi}_t^T\begin{bmatrix} X & \sigma_1 X \\ \star & Q\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}(t) \\ \tilde{x}(t)-(1-\dot{d})\tilde{x}(t-d(t))\end{bmatrix} \\ &= 2\xi_t^T\left(\begin{bmatrix} I & 0 & \sigma_1 I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_1 I & 0 & QP & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{A}X & A_dX & 0 & B_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ X & -X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\right)\xi_t \\ &\quad +2\tilde{\xi}_t^T\begin{bmatrix} I & \sigma_1 I \\ \star & QP\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ \dot{d}X\tilde{x}(t-d(t))\end{bmatrix} \\ &\le \xi_t^T\left(\begin{bmatrix} \tilde{A}X+X\tilde{A}^T+2\sigma_1 X & A_dX-\sigma_1 X & \sigma_1 X\tilde{A}^T+Q & B_2 \\ \star & 0 & \sigma_1 XA_d^T-Q & 0 \\ \star & \star & 0 & \sigma_1 B_2 \\ \star & \star & \star & 0\end{bmatrix}\right)\xi_t \\ &\quad +\mu\tilde{x}^T(t-d(t))S\tilde{x}(t-d(t))+\mu\tilde{\xi}_t^T\begin{bmatrix} \sigma_1 X \\ Q\end{bmatrix}S^{-1}[\sigma_1 X \quad Q]\tilde{\xi}_t \\ &= \xi_t^T(\Psi_1+\mu Y^TS^{-1}Y)\xi_t \end{aligned}$$

여기서 Ψ_1과 Y은 아래와 같다.

$$\Psi_1=\begin{bmatrix} \tilde{A}X+X\tilde{A}^T+2\sigma_1 X & A_dX-\sigma_1 X & \sigma_1 X\tilde{A}^T+Q & B_2 \\ \star & \mu S & \sigma_1 XA_d^T-Q & 0 \\ \star & \star & 0 & \sigma_1 B_2 \\ \star & \star & \star & 0\end{bmatrix},$$

$$Y=[\sigma_1 X \quad 0 \quad Q \quad 0].$$

마지막으로 세 번째항에 대한 시간미분의 결과를 아래와 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V_2(x_t) &= \tilde{x}^T(t)R_1\tilde{x}(t)-e^{-\alpha d(t)}\tilde{x}^T(t-d(t))[R_1-d(t)R_2]\tilde{x}(t-d(t)) \\ &\quad -\alpha\int_{t-d(t)}^{t} e^{\alpha(s-t)}\tilde{x}^T(s)[R_1+(s-t)R_2]\tilde{x}(s)ds \\ &\quad -\int_{t-d(t)}^{t} e^{\alpha(s-t)}\tilde{x}^T(s)R_2\tilde{x}(s)ds \\ &\le \tilde{x}^T(t)R_1\tilde{x}(t)-e^{-\alpha h}\tilde{x}^T(t-d(t))[R_1-hR_2]\tilde{x}(t-d(t)) \\ &\quad -\alpha V_2(x_t)-\frac{1}{h}\left(\int_{t-d(t)}^{t}\tilde{x}^T(s)ds\right)\left(e^{-\alpha h}R_2\right)\left(\int_{t-d(t)}^{t}\tilde{x}(s)ds\right) \\ &= \xi_t^T\left(\begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-\alpha h}(R_1-hR_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{h}e^{-\alpha h}R_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\right)\xi_t-\alpha V_2(x_t) \\ &= \xi_t^T\Psi_2\xi_t-\alpha V_2(x_t). \end{aligned}$$

이제 첫 번째로 LMI (13)이 $x^T(t)Px(t) \le (1+\varepsilon)w_{max}^2$의 조건하에서 $|u_i(t)| \le \frac{1}{r_i}u_{i,lim}$임을 보장함을 보인다. 우선 LMI (13)은 아래의 식과 동치이다.

$$\begin{aligned}
&\sigma_2\tilde{x}^T(t)X\tilde{x}(t)+(1-\sigma_2-\sigma_2\varepsilon)w^T(t)w(t)\\
&\quad-\left(\frac{r_iw_{max}}{u_{i,lim}}\right)^2\tilde{x}^T(t)W_i^TW_i\tilde{x}(t)\ge 0\\
&\Leftrightarrow \sigma_2x^T(t)Px(t)+(1-\sigma_2-\sigma_2\varepsilon)w^T(t)w(t)\\
&\quad-\left(\frac{r_iw_{max}}{u_{i,lim}}\right)^2x^T(t)K_i^TK_ix(t)\ge 0.
\end{aligned}\tag{21}$$

그리고 식 (21)에 $x^T(t)Px(t) \le (1+\varepsilon)w_{max}^2$의 조건을 부과하면 아래의 결과를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
&\sigma_2(1+\varepsilon)w_{max}^2+(1-\sigma_2-\sigma_2\varepsilon)w_{max}^2-\left(\frac{r_iw_{max}}{u_{i,lim}}\right)^2u_i^T(t)u_i(t)\ge 0\\
&\Leftrightarrow w_{max}^2-\left(\frac{r_iw_{max}}{u_{i,lim}}\right)^2u_i^T(t)u_i(t)\ge 0\\
&\Leftrightarrow |u_i(t)| \le \frac{1}{r_i}u_{i,lim}.
\end{aligned}\tag{22}$$

다음으로 LMI (13), LMI (14)가 성립할 경우 $R_x(P)$임을 보인다. 즉, 이것은 LMI (13), LMI (14)의 성립 조건이 $w_{max}^2 \le V(x_t) \le (1+\varepsilon)w_{max}^2$과 $w^T(t)w(t) \le w_{max}^2$의 조건하에서 $\frac{d}{dt}V(x_t)<0$임을 보장함을 보이는 것으로서 아래의 S-procedure를 이용한 결과가 성립함을 증명하는 것으로 충분하다.

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}V(x_t)-\alpha(1+\mu)\left[w_{max}^2-V(x_t)\right]\\
&\quad-\alpha\mu\left[V(x_t)-(1+\varepsilon)w_{max}^2\right]-\alpha(1-\mu\varepsilon)(w^T(t)w(t)-w_{max}^2)<0\\
&\Leftrightarrow \frac{d}{dt}V(x_t)+\alpha V(x_t)-\alpha(1-\mu\varepsilon)w^T(t)w(t)<0.
\end{aligned}$$

여기서 LMI (13)의 성립조건에 의해 convex hull을 이용한 시스템 방정식 (10)에 대하여 유도된 Lyapunov-Krasovskii 함수의 각 항에 대한 미분 결과를 적용하면 아래의 결과를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}V_0(x(t))+\frac{d}{dt}V_1(x_t)+\frac{d}{dt}V_2(x_t)+\alpha V(x_t)\\
&\quad-\alpha(1-\mu\varepsilon)w^T(t)w(t)\\
&<\xi_t^T(\Psi_0+\Psi_1+\Psi_2+\mu Y^TS^{-1}Y)\xi_t-\alpha V_2(x_t)\\
&\quad+\alpha\left[V_0(x(t))+V_1(x_t)+V_2(x_t)\right]-\alpha(1-\mu\varepsilon)w^T(t)w(t)\\
&=\xi_t^T(\Lambda+\mu Y^TS^{-1}Y)\xi_t\\
&=\xi_t^T\tilde{\Lambda}\xi_t
\end{aligned}\tag{23}$$

여기서

$$\Lambda=\begin{bmatrix}\lambda_{11} & 2A_dX-\sigma_1X & \lambda_{13} & 2B_2\\ \star & \lambda_{22} & \sigma_1XA_d^T-Q & 0\\ \star & \star & \lambda_{33} & \sigma_1B_2\\ \star & \star & \star & -\alpha(1-\mu\varepsilon)I\end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
\lambda_{11}&=2(\tilde{A}X+X\tilde{A}^T)+2(\sigma_1+\alpha)X+R_1,\\
\lambda_{13}&=\sigma_1X\tilde{A}^T+\alpha\sigma_1X+Q
\end{aligned}$$

이며 아래의 결과가 성립한다.

$$\begin{aligned}
\tilde{\Lambda}<0 &\Rightarrow \frac{d}{dt}V(x_t)<0\\
&\Rightarrow x^T(t)Px(t)\le w_{max}^2.
\end{aligned}\tag{24}$$

따라서 (2)로 정의된 구동기 용량제한을 갖는 선형시스템의 도달가능 집합은 (24)로 주어진 타원 영역 안에 포함되며 $R_x(P)$임을 나타낸다.

마지막으로 주어진 구동기 용량제한 시간지연 선형시스템의 도달가능 집합이 $R_x(P)$의 영역에 머물며 입력이 $|u_i(t)| \le \frac{1}{r_i}\cdot u_{i,lim}$의 범위에 존재할 때 왜란 $w(t)$로부터 측정출력 $z(t)$까지의 L_2 게인이 최소가 되는 조건을 구한다.

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}V(x_t)+z^T(t)z(t)-\gamma^2w^T(t)w(t)<0\\
&\Leftrightarrow\frac{d}{dt}V(x_t)+x^T(t)(C+D_{12}K)^T(C+D_{12}K)x(t)-\gamma^2w^T(t)w(t)<0\\
&\Rightarrow\xi_t^T(\Psi_0+\Psi_1+\Psi_2+\mu Y^TS^{-1}Y)\xi_t-\alpha V_2(x_t)\\
&\quad+\tilde{x}^T(t)(CX+D_{12}KX)^T(CX+D_{12}KX)\tilde{x}(t)-\gamma^2w^T(t)w(t)<0\\
&\Rightarrow\xi_t^T(\Pi+Y^TS^{-1}Y)\xi_t+\tilde{x}^T(t)(CX+D_{12}W)^T(CX+D_{12}W)\tilde{x}(t)<0\\
&\Leftrightarrow\xi_t^T(\Pi+\mu Y^TS^{-1}Y+T^TT)\xi_t<0
\end{aligned}\tag{25}$$

여기서 행렬 Π는 다음으로 주어지고

$$\Pi=\begin{bmatrix}\pi_{11} & 2A_dX-\sigma_1X & \sigma_1X\tilde{A}^T+Q & 2B_2\\ \star & \pi_{22} & \sigma_1XA_d^T-Q & 0\\ \star & \star & \pi_{33} & \sigma_1B_2\\ \star & \star & \star & -\gamma^2I\end{bmatrix}$$

또한 π_{11}, T는 다음으로 주어진다.

$$\begin{aligned}
\pi_{11}&=2(\tilde{A}X+X\tilde{A}^T)+2\sigma_1X+R_1,\\
T&=\left[(CX+D_{12}W)^T\ \ 0\ \ 0\ \ 0\right]
\end{aligned}$$

이제(20),(22)의 결과에 의해 (12),(13)의 결과는 자명하다. 다음으로 (23),(25)에 대하여 Schur complement를 연속적으로 적용한 후 $\tilde{A}=\sum_{i=1}^{2^m}\zeta_i[A+B_1H_iK]$와 $W=KX$의 관계식을 대입한 후 각 첨자에 대한 조건을 정리하면 (14),(15)의 결과를 얻을 수 있다. 이것으로서 증명을 마친다.

4. 수치 예제

이번 장에서는 제시된 정리의 유용성을 보여주는 수치예제를 제시한다. 다음의 행렬값으로 주어지는 구동기 용량제한을 갖는 시간지연 선형시스템을 고려하자[6].

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1.5\\ 0.3 & -2\end{bmatrix}, A_d=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix}, B_1=\begin{bmatrix}10\\ 1\end{bmatrix}, B_2=\begin{bmatrix}0\\ 3\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}, D_{12}=\begin{bmatrix}0\\ 0.1\end{bmatrix}.$$

제시된 시스템에 대한 왜란의 크기 범위는 아래와 같다.

$$w^T(t)w(t) \le w_{max}^2 = 0.1.$$

다음으로 하나의 입력 u_1에 대하여 $u_{i,lim}=15$일 때 입력 범위를 선형구간의 2배까지 확장한 경우를 고려하면 $r_1=1/2$이 되고, (8)에 의해 $0.5 \le \phi_1(t) \le 1$이 된다. 따라서 convex hull 표현을 위한 2개의 꼭지점 행렬은 $H_1=0.5, H_1=1$의 값을 갖게 되고 주어진 시스템에 대하여 시간지연 값 $h=1$이며, 시간지연 값의 변화율이 없는 상수 시간지연인 경우 (즉, $\dot{d}(t)=0$) 정리(1)을 적용한 실험 결과는 아래와 같다.

표 1 예제에 대한 제어게인과 L_2 게인의 비교
Table 1 Comparison of control gain and L_2 gain

방법	제어 게인	L_2 게인
Fridman and Shaked [6]	$K=-[2.0743 \quad 0.1266]$	0.0714
정리 (1)	$K=-[15.4496 \quad 0.4787]$	0.0576

이 때 해당되는 도달 가능 집합의 크기를 나타내는 $w_m^2 \cdot X$의 고유치는 다음과 같다.

$$\lambda_1 = 3.7242, \quad \lambda_2 = 218.0633.$$

제시된 실험 결과를 이전의 방법[6]과 비교하면 정리(1)을 적용한 제어기를 사용했을 경우의 $\gamma=0.0576$ 값이 이전의 결과값인 $\gamma=0.0714$보다 작기 때문에 상당히 개선된 왜란 감쇄 효과를 얻을 수 있을 뿐만 아니라 제어기의 입력 구간을 구동기의 선형 범위를 넘어 비선형 구간까지 확장한 고이득 제어기 설계의 결과로서 이전의 제어 게인에 비해 보다 증가된 제어 게인 값을 갖게 됨을 확인할 수 있다.

다음으로 표2는 $r_1=1$ 일 때, 시간지연 h와 시간지연 값의 변화율 μ 값의 변화에 따른 L_2 게인의 변화를 기록한 것이며 h와 μ 값이 증가함에 따라 시스템에 대한 L_2 게인 역시 증가하는 경향을 보임을 확인할 수 있다.

표 2 h와 μ값의 변화에 따른 L_2 게인의 변화
Table 2 L_2 gains for various h and μ

	$\mu=0.1$	$\mu=0.3$	$\mu=0.5$	$\mu=0.7$
$h=0.3$	0.0265	0.0271	0.0277	0.0284
$h=0.5$	0.0268	0.0274	0.0280	0.0287

6. 결 론

이 논문에서는 Lyapunov-Krasovskii 방법에 기초하여 구동기 용량제한을 갖는 시간지연 선형시스템에 대한 고이득 상태궤환 제어기의 설계 기법을 제안하였다. 제안된 제어기 설계 방법은 기존의 접근 방법들에 비해 비교적 단순한 형태를 지니면서도 유도 과정 중에 필요한 항들을 효과적으로 생성할 수 있는 새롭게 정의된 Lyapunov-Krasovskii 함수에 기초하고 있다. 이러한 Lyapunov-Krasovskii 함수를 이용하여 설계된 제어규칙은 구동기의 용량제한과 도달가능 집합의 조건을 만족하고 제한된 크기의 왜란의 영향을 고려함과 동시에 L_2 게인을 최소화하는 행렬 부등식 조건으로부터 효율적으로 유도할 수 있었다. 유도된 조건식에 의하여 설계된 제어기를 잘 알려진 예제에 대하여 적용한 결과에 의하면 제안된 제어기가 기존의 결과보다 더 좋은 H_∞ 성능을 나타냄을 확인할 수 있었다.

감사의 글

이 논문은 2006학년도 충북대학교 학술연구지원사업의 연구비지원에 의하여 연구되었음.

참 고 문 헌

[1] P. O. Gutman and P. Hagander, "A new design of constrained controllers for linear systems," IEEE Trans. Autom. Contrl, vol. 30, pp. 22-33, 1985.

[2] J. -H. Kim and Z. Bien, "Robust stability of uncertain linear systems with saturating actuators," IEEE Trans. Autom. Control, vol. 39, pp. 202-207, 1994.

[3] D. S. Bernstein and A. N. Michel(Eds), "Special issue:saturating actuator," Int, J. Robust and Nonlinear Control, vol. 5, pp. 375-540, 1995.

[4] Z. Lin and A. Saberi, "A semi-global low-and-high gain design technique for linear systems with input saturation-stabilization and disturbance rejection," Int, J. Robust and Nonlinear Control, vol. 5, pp. 381-398, 1995.

[5] Y. xia and Y. Jia, "Robust control of state delayed systems with polytopic type uncertainties via parameter-dependent Lyapunov functionals," Syst. Control Lett., vol. 50, pp. 183-193, 2003.

[6] E. Fridman, A. Pila and U. Shaked, "Regional stabilization and H_∞ control of time-delay systems with saturating actuators," Int, J. Robust and Nonlinear Control, vol. 13, pp. 885-907, 2003.

[7] Niculescu, S. -I., neto, A. T., Dion, J. -M., and Dugard, L., 1995 "Delay-Dependent Stability of Linear Systems with Delayed State: An LMI Approach," Proc. 34th IEEE Conf. on Decision and Control, pp. 1495-1497.

[8] M. Wu, Y. He, J. H. She and G. P. Liu "Delay-dependent criteria for robust stability of time-varying delay systems," Automatica, vol. 40, pp. 1435-1439, Mar, 2004.

[9] E. Fridman and U. Shaked, "An improved stabilization method for linear time-delay systems," IEEE Trans. Autom. Control, vol. 47, no. 11,pp. 1931-1937, Nov. 2002.

[10] X. Li and C. E. de Souza, "Delay-dependent robust stability and stabilization of uncertain linear delay systems: A linear matrix inequality approach," IEEE Trans. Autom. Control, vol. 42, no. 8,pp. 1144-1148, Aug. 1997.

[11] E. Fridman and U. Shaked, "New bounded real remma for time-delay systems and their applications," IEEE Trans. Autom. Control, vol. 46, no. 12, pp. 1973-1978, Dec. 2001.

[12] Y. S. Moon, P. Park, W. H. Kwon and Y. S. Lee, "Delay-dependent robust stabilization of uncertain state-delayed systems," Int. J. Control, vol. 74 pp.1447-1455, 2001.

[13] P. Park, "A delay-dependent stability criterion for system with uncertain time-invariant delays," IEEE. Trans. Autom. Control, vol. 44,no. 4,pp. 876-877, Apr, 1999.

[14] S.-I. Niculescu, " H_∞ Memoryless control with an α-stability constrint for time-delay systems: An LMI approach," IEEE. Trans. Autom. Control, vol. 43,no. 5, pp. 739-743, May, 1998.

[15] J. H. Kim, "Delay and its time-derivative dependent robust stability of time-delayed linear systems with uncertainty," IEEE. Trans. Autom. Control, vol. 46, no. 5, pp. 789-792, May, 2001.

[16] L. Zaccarian and A. R. Teel, "A common framework for anti-windup, bumpless transfer and reliable design," Automatica, vol. 38, pp. 1735-1744, 2002.

[17] H. Gao and C. Wang, "Delay-dependent robust H_∞ and L_2-L_∞ filtering for a class of uncertain nonlinear time-delay systems," IEEE. Trans. Autom. Control, vol. 48,no. 9, pp. 1661-1666, Sep, 2003.

[18] Y. He, M. Wu, J. H. She and G. P. Liu "Parameter-dependent Lyapunov functional for stability of time-delay systems with polytopic-type uncertainties," IEEE. Trans. Autom. Control, vol. 49, no. 5,pp. 789-792, May, 2004.

[19] S. Xu and J. Lam "Improved delay-dependent stability criteria for time-delay systems," IEEE. Trans. Autom. Control, vol. 50, no. 3,pp. 384-387, Mar, 2005.

[20] M. S. Mahmoud and A. Ismail "New results on delay-dependent control of time-delay systems," IEEE. Trans. Autom. Control, vol. 50, no. 1,pp. 95-100, Jan, 2005.

[21] X. M. Zhang, M. Wu, J. H. She and Y. He "Delay-dependent stabilization of linear systems with time-varying state and input delays," Automatica, vol. 41,pp. 1405-1412, May, 2005.

[22] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*. Philadelphia, PA: SIAM, 1994.

[23] T. Hu and Z. Lin, *Control Systems with Actuator Saturation*, Birkhauser, 2001.

[24] W. J. Rogh, *Linear System Theory*. Upper Saddle River, New Jersey:Prentice Hall, 1996.

저 자 소 개

이 연 규(李 淵 圭)

1970년 6월 28일생. 1998년 충북대학교 전자공학과 졸업. 2000년 동 컴퓨터과학과졸업(석사). 2000년~2003년 한국전자통신연구원 연구원. 2004~현재 충북대 대학원제어계측공학과 박사과정.

Tel : 043-286-7329

E-Mail : hobii@nate.com

김 진 훈(金 鎭 勳)

1961년 10월 8일생. 1985년 서울대 전기공학과 졸업. 1985년~1987년 신영전기(주) 연구원. 1989년 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 졸업(석사). 1993년 동 전기 및 전자공학과 졸업(공박). 1993년~1994년 경상대 공대 제어계측공학과 전임 강사. 1998년~1999년 미국 UCI 방문교수. 1995년~현재 충북대학교 전기전자 및 컴퓨터공학부 교수.

Tel : 043-261-2387, Fax : 043-268-2386

E-Mail : jinhkim@chungbuk.ac.kr