

# L-curve를 이용한 광학 흐름 추정을 위한 정규화 매개변수 결정

김 종 대<sup>\*</sup> · 김 종 원<sup>\*\*</sup>

## 요 약

본 논문은 광학 흐름을 추정하는데 있어서 최적 정규화 매개변수를 결정하기 위한 L-curve 모서리 검출 방법을 제안한다. 기존의 곡률법은 L-curve의 곡률 그래프에서 최대 위치를 찾는 반면, 제안한 방법은 바로 우측 음의 계곡과의 곡률 차가 최대가 되는 양의 봉우리의 위치를 찾아서 매개변수 값을 결정한다. 이 방법으로 선정한 매개변수로 광학 흐름을 추정하면, 평균적으로 최소 오차로부터 단지 0.02 pixel/frame 차이가 나는 것이 실험을 통하여 보여진다. 또한 제안한 방법으로 기존의 모서리 검출법인 곡률법이나 적응 제거법에 비해 최소 오차에 가장 가까운 광학 흐름을 구할 수 있었다.

키워드 : 광학 흐름 추정, 정규화 매개변수, L-curve, 모서리 검출

## Regularization Parameter Determination for Optical Flow Estimation using L-curve

Jong Dae Kim<sup>\*</sup> · Jongwon Kim<sup>\*\*</sup>

## ABSTRACT

An L-curve corner detection method is proposed for the determination of the regularization parameter in optical flow estimation. The method locates the positive peak whose curvature difference from the just right-hand negative valley is the maximum in the curvature plot of the L-curve, while the existing curvature-method simply finds the maximum in the plot. Experimental results show that RMSE of the estimated optical flow is greater only by 0.02 pixels-per-frame than the least in the average sense. The proposed method is also compared with an existing curvature-method and the adaptive pruning method, resulting in the optical flow estimation closest to the least RMSE.

Key Words : Optical Flow Estimation, Regularization Parameter, L-Curve, Corner Detection

## 1. 서 론

영상에서 화소 단위의 움직임을 나타내는 광학 흐름(optical flow)은 통신, 로봇틱스 및 의용 영상 처리 등 많은 영역에 응용되어 왔다. 광학 흐름의 추정을 위하여 여러 가지 방법이 연구되어 왔으나, 추정 해상도와 정밀도가 높은 시공간 경사 방법이 선호되고 있다 [1-4]. 이 방법은 영상 밝기 함수가 국소 공간의 분포는 변하지 않은 채 프레임(frame) 간에 이동을 한다는 가정으로부터 화소 단위의 운동 방정식을 구하여 해를 구하는 방법이다. 그러나 이렇게

구한 운동 방정식은 틈 문제(aperture problem) 등으로 불안정(ill-posed)하기 때문에 정규화(regularization) 혹은 평탄화(smoothing)가 필요하며, 다음과 같이 운동 제한식(motion constraint)과 정규화 제한식(regularization constraint)의 가중치 합을 영상 전역에 관한 적분한 값을 최소화하는 문제로 바꾸어 광학 흐름을 추정한다 [1].

$$\min_{u,v} \iint M^2(u,v) + \lambda^2 R^2(u,v) dx dy \quad (1)$$

여기서,  $(u,v)$ ,  $M$ ,  $\lambda$ , 파  $R$ 는 각각 광학 흐름, 운동 제한식, 정규화 매개변수, 그리고 정규화 제한식이다. 식 (1)에서 운동 제한식으로는 변위 프레임 차(displaced frame difference, DFD)나 DFD의 1차 테일러 전개식을 사용한다

※ 이 논문은 2007년도 한림대학교 교비 학술연구비(HRF-2007-040)에 의하여 연구되었음.

\* 정 회 원 : 한림대학교 정보통신공학부 부교수

\*\* 정 회 원 : ㈜ 바이오메드랩 대표이사

논문접수 : 2007년 5월 2일, 심사완료 : 2007년 7월 10일

[1,2]. 한편 공간적으로 속도가 크게 변하지 않는다는 가정을 이용한 평탄화 제한식 (smoothness constraint)이 정규화 제한식으로 주로 채택된다 [1]. 식 (1)에 변분법 (calculus of variation)과 이산공간에서의 근사화를 적용하면, 대형 분산 선형 혹은 비선형 연립 방정식이 유도되고, 다양한 반복법으로 해를 구할 수 있다 [7].

식 (1)로부터 광학 흐름을 추정하기 위하여 정규화 매개변수 (regularization parameter)의 최적 값을 선정해야 한다. 그러나, 광학 흐름을 추정하는 반복법들의 수렴 속도나 정확한 해에 대한 많은 연구 결과가 보고된 데 비하여, 매개변수 결정에 대한 연구는 거의 찾아볼 수가 없다 [1-3]. 대신에 정규화 매개변수의 값을 주로 경험에 의해 결정하거나, 혹은 구하고자 하는 광학 흐름의 특성을 조절하는 데 사용한다 [8]. 예를 들면, 보다 평탄한 광학 흐름을 구하기 위해 큰 매개변수를 대입하여 해를 구하고, 평탄하지 않지만 DFD가 작은 광학 흐름을 얻기 위하여 작은 값을 취한다. 이에 반해 영상복원 (image restoration)이나 심전계 (electrocardiography) 재구성 (reconstruction)과 같은 일반적인 역해석 문제 (inverse problem)에 관한 연구에서는 매개변수 결정에 관한 연구 내용을 찾아볼 수 있다 [9,10,14].

여러 가지 매개변수 최적화 방법 중에서  $L$ -curve법은 효율적이고 간단하여 널리 사용되고 있다 [9-12]. 매개변수를 변화시키면서 구한 광학 흐름으로부터 운동 제한식의 오차와 정규화 제한식의 오차를 구해,  $(\log|M|, \log|R|)$ 의 그래프를 그려보면 알파벳  $L$ 자와 같은 형태가 된다. 그 이유는 매개변수 값이 아주 작아지면, 식 (1)의 적분 값은 주로 운동 제한식의 오차에 지배를 받으므로 그래프 상에서 수직선 형태가 될 것이고, 반대로 큰 매개변수 값에 대하여는 수평선 형태가 되기 때문이다.  $L$ 자 형태의 그래프에서 모서리는 두 제한식 오차의 적절한 절충으로 해석될 수 있으므로, 그래프의 모서리를 구해서 매개변수의 최적 값을 선정하는 방법이  $L$ -curve법이다 [11].

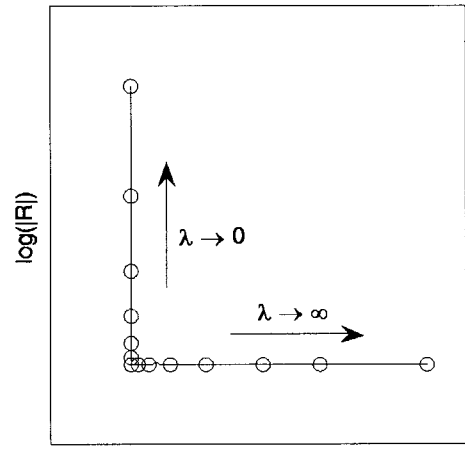
본 논문에서는 광학 흐름을 구하는 데 있어서, 최적 매개변수 값을 결정하기 위하여  $L$ -curve법을 도입하고, 모서리 검출법을 제안한다. 그리고 검출한 모서리에 해당하는 매개변수를 대입해서 구한 광학 흐름의 추정 오차는 최소 오차에 근접한 결과를 얻을 수 있음을 보인다. 2장에서 기존의 모서리 검출법의 문제를 검토하여 새로운 방법을 제안하고, 3장에서 본 실험에서 채택한 광학 흐름 추정법과 제안한 모서리 검출법의 구현에 대하여 기술한다. 4장에서는 속도를 알고 있는 합성 및 표준 연속 영상에 대한 실험과 결과를 보이고, 5장에서 결론을 맺는다.

## 2. $L$ -curve의 모서리 검출을 통한 정규화 매개변수의 결정

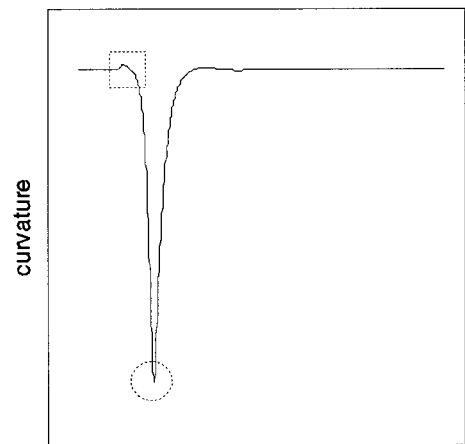
매개변수를 변화시키면서 구한 광학 흐름으로 제한식들의 오차를 구해서 데이터 점  $(\log|M|, \log|R|)$ 의 그래프를

구하면 (그림 1)(a)의 'O' 데이터 점들과 같이  $L$ 자 형태로 배치하게 된다. 매개변수가 아주 작아지면, 운동 제한식 오차는 더 이상 줄어 들지 않고, 정규화 제한식 오차만 커지게 되어 수평선을 이루게 되며, 큰 매개변수에 대하여는 반대로 수직선을 이룬다. 전술한 것과 같이 이  $L$ -curve의 모서리에 해당하는 두 개의 제한식의 적절한 절충으로 간주되어 이 모서리에 해당하는 정규화 매개변수가 최적이라고 생각하는 것이  $L$ -curve법이다.

$L$ -curve의 모서리를 구하기 위하여 데이터 점들의 스플라인 보간 선을 구하고, 그 선의 곡률(curvature)을 정규화 매개변수에 관하여 그래프를 그린다. 이렇게 구한 곡률 그래프는 (그림 1)(b)에서 보듯이  $L$ 자의 모서리에서 최소값을 보이므로 (그림 1)의 접원으로 표시한 부분, 이 부분에 해당하는 정규화 매개변수를 최적이라고 간주할 수 있다. 그러나 잡음이 있는 상황에서도 모서리를 안정적으로 구하기 위하여 (그림 2)(a)와 같이 원점을 포함한 스플라인 보간 선을 구해 곡률이 최대가 되는 곳 (그림 1)(b)와 2(b)의 점 사각으로 표시한 부분)에 해당하는 정규화 매개변수를 찾는다 [11].

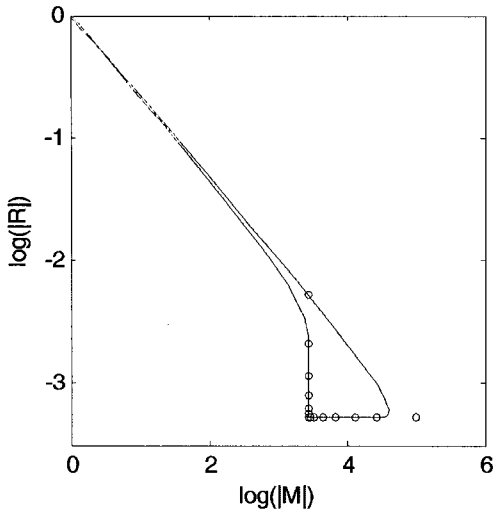


(a) 이상적인  $L$ -curve

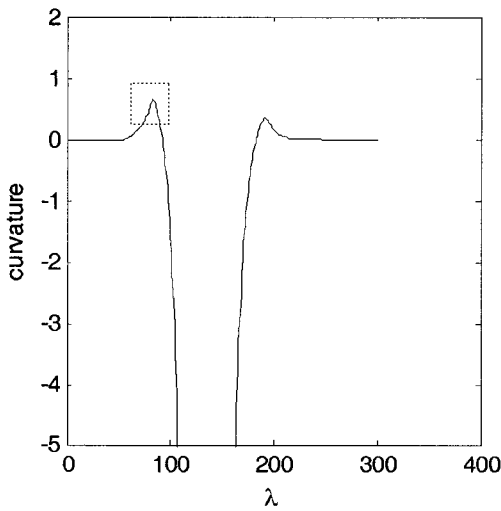


(b) 매개변수에 따른 곡률

(그림 1) 이상적인  $L$ -curve와 정규화 매개변수에 따른 곡률



(a) 원점을 포함한 스플라인 보간



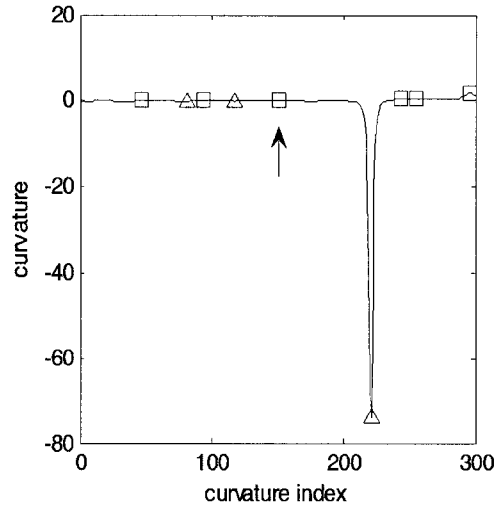
(b) 매개변수에 따른 곡률

(그림 2) 원점을 포함한 스플라인 보간과 곡률

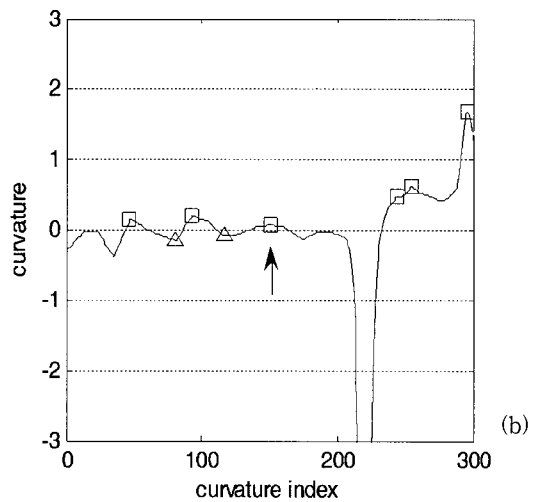
실제 연속 영상에서 L-curve를 구할 때는, 두 가지 문제가 발생한다. 매우 작은 매개변수 값을 사용하면, 광학 흐름이 불안정하게 추정되어 운동 제한식의 오차가 급격히 커지는 문제와 모서리가 불분명한 문제를 가지고 있다. 전자는 보통 모서리를 찾기 전에 L-curve의 단조 감소 특성을 이용하여 불안정한 데이터 점들을 제거하면 된다[11,12]. 그러나 모서리가 불분명한 경우, 곡률 검출법과 같은 잡음에 민감한 방법으로는 전역적으로 의미 있는 모서리를 찾기 어렵다. 이를 위하여 전역적 모서리(global corner)를 찾기 위한 다양한 방법이 개발되었다[12,15]. 예를 들어 가장 최근에 개발된 방법중의 하나인 적응 제거법(adaptive pruning algorithm)에서는 전역적 모서리를 찾기 위하여 두 단계의 방법을 제안하였다 [15]. 이 방법은 첫 번째 단계에서 데이터 점의 부분 집합들에서 모서리 후보 2개씩을 선택하고 두 번째 단계에서 선택된 후보들로부터 전역적 모서리를 찾는다.

두 제한식의 오차 특성이 응용마다 다르기 때문에 광학 흐름 추정 문제에 적합한 모서리 검출법을 찾아보는 것은

의미 있는 일이다 [9]. 본 논문의 실험 및 결과에서 알 수 있듯이, 곡률 검출법과 적응 제거법 모두 많은 예에서 모서리 검출에 실패하는 것을 예비 실험을 통하여 알아냈다. 여기서 검출 실패란 검출된 모서리에 해당하는 매개변수를 사용해서 구한 광학 흐름의 오차가 너무 큰 경우를 뜻한다. 한편 여러 가지 연속 영상에 대한 L-curve의 곡률 그래프를 조사하여 두 가지 사실을 관찰하였다. 첫째는 최소 오차의 광학 흐름을 구할 수 있는 정규화 매개변수는 곡률 그래프 상의 양의 봉우리 (peak) 중의 하나와 가깝다는 것이고, 두 번째는 그 봉우리와 오른쪽의 양의 봉우리 사이의 최소음의 계곡(valley)의 절대값이 매우 크다는 것이다. 상기한 두 가지 사실은 이상적인 L-curve의 곡률 그래프에서는 (그림 1)(b)와 2(b)에서 보듯이 명백하다. 그러나 실제 연속 영상에 적용하면 그렇지 않다. (그림 3)은 실제 연속 영상에서 구한 곡률 그래프와 상기한 두 가지 사실을 만족하는 모



(a) positive peaks(□) and negative valleys (△)



enlarged view of (a)

(그림 3) 제안한 모서리 검출법으로 찾은 모서리의 예

서리의 예를 보인다. (그림 3)에서 양의 봉우리들은 ‘□’로 표시하고 양의 봉우리 사이의 최소 음의 계곡은 ‘△’로 표시하였다. (그림 3)(b)를 보면, 곡률이 최대가 되는 양의 봉우리는 그래프의 맨 우측에 있지만 그 봉우리 우측에는 우측에 음의 계곡이 없는 것을 알 수 있다. 우측에 음의 계곡이 있는 양의 봉우리 중에 곡률이 최대가 되는 것은 양의 봉우리 중에서 좌측으로부터 두 번째 양의 봉우리이지만 최소 음의 계곡과의 곡률 차가 최대가 되는 것은 화살표 표시부분의 세 번째 양의 봉우리가 된다. 이 예에서는 이 세 번째 양의 봉우리에 해당하는 정규화 매개변수를 적용한 것이 최소 자승 오차를 보이는 매개변수와 가장 가까웠다. 본 논문에서는 이상의 관찰을 바탕으로, 기존의 곡률법처럼 최대가 되는 위치를 선택하지 않고, 양의 봉우리 중에서 바로 우측에 오는 최소 음의 계곡과의 곡률 차가 최대가 되는 양의 봉우리를 찾아 모서리로 선택하는 모서리 검출법을 제안한다.

### 3. 광학 흐름 추정과 모서리 검출법의 구현

본 논문에서는 운동 제한식으로 DFD를 채택하고, 정규화 제한식으로는 가장 많이 채택하는 평탄화 제한식(smoothness constraint)를 적용하였다. 이 제한식들을 사용하면 식 (1)은 다음과 같이 표현된다.

$$\min_{u,v} \iint d(u,v)^2 + \lambda^2 (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2) dx dy \quad (2)$$

$$d(u,v) = f(x,y,t) - f(x-u,y-v,t-1) \quad (3)$$

여기서,  $f(x,y,t)$ 와  $(u,v)$ 가 각각 프레임  $t$ , 위치  $(x,y)$ 에서의 영상 밝기 함수와 속도이며, 식 (2)의  $\nabla$ 는 공간 미분 연산자이다. 식(3)의 첫 번째 항은 현재 프레임에 해당하고, 두 번째 항은 과거 프레임의  $(x,y)$ 에서의 밝기 함수를 속도  $(u,v)$  만큼 공간 이동시킨 함수에 해당한다. 식 (2)의 해는 [13]에서 제안한 중첩 다중 격자법(nested multi-grid method)을 사용하여 구했다. 이 방법은 연속 영상을 계층적으로 표현한 다음, 상위 층부터 반복법으로 광학 흐름을 구하고, 상위 층에서 구한 광학 흐름을 하위 층의 초기 값으로 사용하는 방법이다. 그리고 각 층에서는 다음과 같은 비선형 반복법을 사용하여 구한다.

$$\begin{aligned} u^{n+1} &= \bar{u}^n - \frac{f_x d(\bar{u}^n, \bar{v}^n)}{\lambda^2 + f_x^2 + f_y^2} \\ v^{n+1} &= \bar{v}^n - \frac{f_y d(\bar{u}^n, \bar{v}^n)}{\lambda^2 + f_x^2 + f_y^2} \end{aligned} \quad (4)$$

여기서  $f_x, f_y$ , 그리고  $\bar{(\cdot)}$ 는 각각 수평, 수직방향의 공간 경

사, 그리고 네 방향 평균(4-neighborhood average)를 뜻한다.

충분히 많은 데이터 점을 구하기 위하여 1부터 1.3배 간격으로 2000까지의 정규화 매개변수에 대하여 광학 흐름을 추정하고, 그로부터 운동제한식과 평탄화 제한식의 오차  $(\hat{\eta}_i, \hat{\rho}_i) = (\log|M_{\lambda_i}|, \log|R_{\lambda_i}|)$ 를 구하였다. 구한 데이터 점  $(\hat{\eta}_i, \hat{\rho}_i)$ 들 중에서 매개변수가 너무 작을 때의 불안정한 데이터들을 다음과 같은 조건으로 제거 하였다.

$$\hat{\eta}_i > (1 + \varepsilon) \min\{\hat{\eta}_{i+1}, \dots, \hat{\eta}_N\} \quad (5)$$

여기서  $\varepsilon$ 과  $N$ 은 각각 제거 경계치와 데이터 점의 개수이다. 식 (5)는 이상적인 L-curve라면 운동 제한식의 오차는 단조 감소한다는 성질을 이용한 것이다. 제거 경계치는 너무 많은 데이터 점이 제거되는 것을 방지하기 위한 것이고 본 논문에서는 0.1로 고정하여 실험하였다.

불안정한 데이터가 제거된 데이터 점들로부터 [16]에서처럼 Matlab Spline Toolbox을 사용하여 order 4의 스플라인 보간과 1차 및 2차 미분을 구하여 다음과 같은 식을 사용하여 곡률  $\kappa$ 를 계산하였다.

$$\kappa = -2 \frac{\eta' \rho'' - \eta'' \rho'}{((\eta')^2 + (\rho')^2)^{3/2}} \quad (6)$$

여기서  $\eta'$ 과  $\rho'$  그리고  $\eta''$ 과  $\rho''$ 는 각각 보간된 스플라인 함수의 매개변수에 대한 x방향과 y방향으로의 1차 미분 그리고 2차 미분을 나타낸다.

모서리를 검출하기 위하여 먼저 식 (6)의 곡률로부터 다음조건을 만족하는 양의 봉우리의 순서집합  $P$ 을 구했다.

$$P = \left\{ i \in K \mid \kappa_i > 0, \kappa_i > \kappa_{i-1}, \kappa_i > \kappa_{i+1} \right\} \quad (7)$$

여기서  $K$ 는 곡률 표지자(curvature index)의 개수로 입력 데이터 점과 보간 order 등으로 결정된다. 다음에 양의 봉우리 각각에 해당하는 우측 음의 계곡을 찾기 위하여, 해당 양의 봉우리와 다음 양의 봉우리(다음 봉우리가 없을 때는 마지막 곡률 표지자)까지의 곡률 표지자 중에서 곡률 값이 최소인 지점을 택했다. 이때 곡률 값이 양이면 해당 봉우리에서의 곡률 값을 택하여 봉우리-계곡 차이 값을 구할 때 '0'이 되도록 했다. 구한 음의 계곡에서의 곡률 값  $v_i$ 을 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$v_i = \begin{cases} \kappa_i, & \text{if } \kappa_i = \min\{\kappa_j \mid p_i < j < p_{i+1}\} < 0 \\ \kappa_{p_i}, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (8)$$

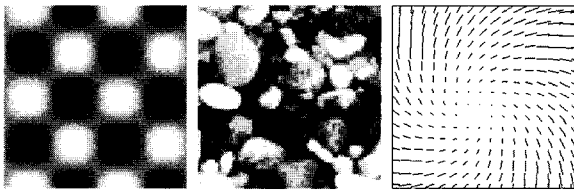
최종적으로 모서리  $c$ 로는 순서집합  $P$ 에서 다음과 같이 봉우리-계곡의 곡률 차이가 최대가 되는 봉우리를 선택했다.

$$c = p_i \in P, \text{ such that } (\kappa_{p_i} - \nu_i) \text{ is the maximum.}$$

#### 4. 실험 및 결과

광학 흐름은 두 개의 연속하는 프레임 쌍 (frame pair)으로부터 구했다. 이들의 실제 속도를 알고 있어야 하므로 인공 영상과 실제 영상을 인공 속도로 만들거나, 움직임 해석에 많이 사용되고 있는 SRI 연속 영상 중에서 translating tree, diverging tree, 그리고 Yosemite sequence에서 추출하여 만들었다. 본 실험에 사용한 프레임 쌍들은 영상이나 광학 흐름의 특성에 따라 명명해서 <표 1>에 정리했고, 각 프레임 쌍들의 첫 번째 프레임과 실제 광학 흐름을 (그림 4~5)에 표시하였다.

(그림 5)의 tree 연속 영상들에서 추출한 프레임 쌍들은 광학 흐름의 특성을 따서 'TRAN' (translating) 혹은 'DIV' (diverging)라고 명명하였다. 한편 SRI 연속 영상을 적용할 때 움직임의 크기에 대한 영향을 알아보기 위하여 각 연속 영상들의 2번 3번 프레임을 추출하여 첨자 'S'를 붙이고,



(a) SINE (b) STONE (c) optical flow

(그림 4) 연속 영상 SINE, STONE 그리고 실제 광학 흐름. 영상 크기는 64×64이다



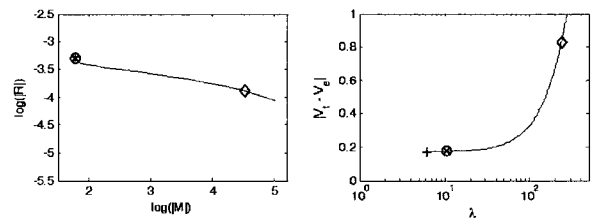
(a) TRAN<sub>s</sub> (b) DIV<sub>s</sub> (c) YOS<sub>s</sub>

(그림 5) TRAN<sub>s</sub>, DIV<sub>s</sub>, YOS<sub>s</sub>, 첫 프레임 (위)와 광학 흐름 (아래). 움직임이 큰 프레임 쌍들 (TRAN<sub>L</sub>, DIV<sub>L</sub>, YOS<sub>L</sub>)의 첫 프레임들은 이들과 같고, 광학흐름은 3배이다. 영상 크기는 128×128 이고, 광학 흐름은 표시 목적으로 확대하였다 (TRAN<sub>s</sub>: 1.5배, DIV<sub>s</sub>: 3배, YOS<sub>s</sub>: 3배)

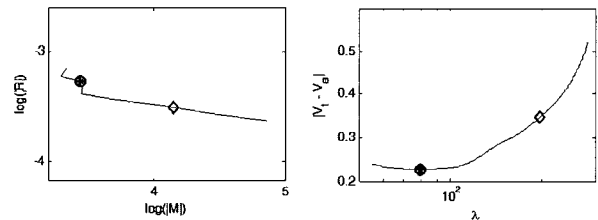
<표 1> 실험 연속 영상의 속성과 실제 속도

연속 영상 이름	영상의 속성	Optical flow
SINE	Sine 함수의 직교 곱	그림 4(c)
STONE	실제 조각돌 텍스처	그림 4(c)
TRAN <sub>s</sub>	SRI translating tree sequence의 2번과 3번 frame	그림 5(a)
TRAN <sub>L</sub>	SRI translating tree sequence의 2번과 5번 frame	그림 5(a)의 3배
DIV <sub>s</sub>	SRI diverging TREE sequence의 2번과 3번 frame	그림 5(b)
DIV <sub>L</sub>	SRI diverging TREE sequence의 2번과 5번 frame	그림 5(b)의 3배
YOS <sub>s</sub>	SRI Yosemite sequence의 2번과 3번 frame	그림 5(c)
YOS <sub>L</sub>	SRI Yosemite sequence의 2번과 5번 frame	그림 5(c)의 3배

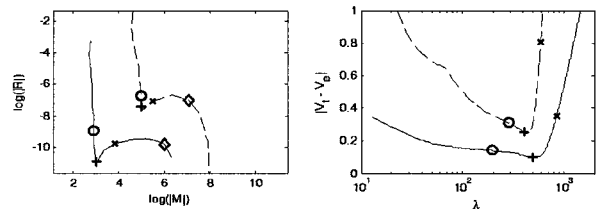
2번 5번 영상에 대하여 첨자 'L'을 붙여서 움직임이 작은 쌍과 큰 쌍을 만들었다. 움직임이 큰 쌍들의 광학 흐름은 (그림 5)에 보인 광학 흐름들의 각각 3배가 된다. SINE과 STONE은 64×64 크기로 만들었고, SRI 연속 영상으로부터 얻은 영상 쌍들은 원본 영상에서 128×128크기로 잘라 내었다.



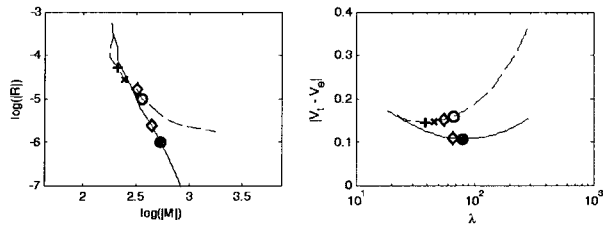
(그림 6) SINE에 대한 L-curve (좌측)와 추정오차 (우측). (+: 최소 오차, O: 제한한 방법, x: 곡률법, ◇: 적응 제거법)



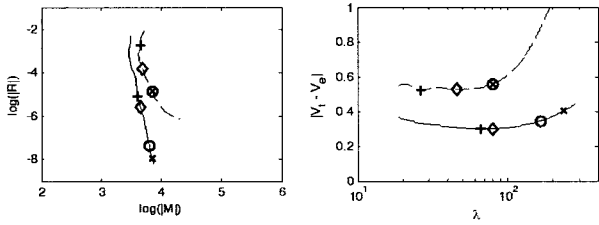
(그림 7) STONE에 대한 L-curve (좌측)와 추정오차 (우측). (+: 최소 오차, O: 제한한 방법, x: 곡률법, ◇: 적응 제거법)



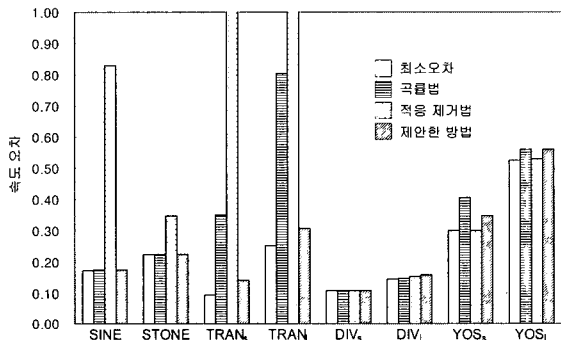
(그림 8) TRAN<sub>s</sub> (실선)와 TRAN<sub>L</sub> (파선)에 대한 L-curve (좌측)와 추정오차 (우측). (+: 최소 오차, O: 제한한 방법, x: 곡률법, ◇: 적응 제거법, 적응 제거법의 추정오차는 1보다 커서 그래프에 표시 안됨)



(그림 9) DIV<sub>s</sub> (실선)와 DIV<sub>L</sub> (파선)에 대한 L-curve (좌측)와 추정오차 (우측). (+: 최소 오차, O: 제안한 방법, x: 곡률법, ◇: 적응 제거법)



(그림 10) YOS<sub>L</sub> (실선)와 YOS<sub>s</sub> (파선)에 대한 L-curve (좌측)와 추정오차 (우측). (+: 최소 오차, O: 제안한 방법, x: 곡률법, ◇: 적응 제거법)



(그림 11) 모서리 검출법 들과 최소 오차와의 비교

본 실험에서는 제안한 모서리 검출법을 [16]의 곡률법, [12]의 적응 제거법과 함께 오차가 최소일 경우와 비교하였다. (그림 6~10)에 각 프레임 쌍에 대한 실험 결과를 보였으며, 각 그림의 좌측에 L-curve 그리고 우측에 정규화 매개변수에 대한 광학 흐름 추정 오차를 보였다. 광학 흐름 추정 오차는 추정속도와 실제 속도의 제곱평균제곱근 오차 (root mean squared error, RMSE)이다. (그림 8~10)에는 움직임의 크기에 대한 영향을 알아보기 위하여, SRI로부터 얻은 움직임이 작은 쌍과 큰 쌍 모두에 대한 결과를 각각 같이 표현하고, 작은 쌍에 대한 결과는 실선으로, 그리고 큰 쌍에 대하여는 파선으로 표시하였다.

각 그래프에는 최소 오차, 제안한 방법, 곡률법, 그리고 적응 제거법을 적용했을 때 해당하는 데이터 점을 각각 '+', 'O', 'x', 그리고 '◇'로 표시하였다. 주의할 것은 (그림 9)의 TRAN<sub>s</sub>와 TRAN<sub>L</sub>에 대한 결과에는 적응 제거법 ('◇' 표시)이 없다는 것이다. 이는 시공간 경사 법으로 광학 흐름을 추정하면 RMSE가 1 pixel/frame 이하인 것이 보통이므

<표 2> 추정 오차의 평균

	최소오차	곡률법	제안한 방법	적용 제거법
SINE	0.17	0.17	0.17	0.83
STONE	0.23	0.23	0.23	0.35
TRAN <sub>s</sub>	0.10	0.35	0.14	1.28
TRAN <sub>L</sub>	0.25	0.81	0.31	2.65
DIV <sub>s</sub>	0.11	0.11	0.11	0.11
DIV <sub>L</sub>	0.15	0.15	0.16	0.15
YOS <sub>s</sub>	0.30	0.41	0.35	0.30
YOS <sub>L</sub>	0.52	0.56	0.56	0.53
평균	0.23	0.35	0.25	0.77

로 추정 오차 그래프를 1 pixel/frame 이하만 보였으나, 적응 검출법의 오차가 그 보다 크기 때문에 그래프에 나타나지 않은 것이다.

(그림 6~8)을 보면 L-curve들의 모서리가 확실하고, 이때 적응 제거법의 성능이 안 좋은 것을 알 수 있다. 반면에 diverging tree나 Yosemite 연속 영상의 경우 (그림 9)와 (그림 10), 모서리가 불확실하고 적응 제거법으로 구한 매개변수 값이 최소 오차에 가까움을 알 수 있다. 그러나 이 경우에도 곡률법에 근거한 방법들도 오차가 상대적으로 크지 않은 것을 알 수 있다. 한편 Yosemite의 경우 곡률을 이용한 방법으로 선정한 매개변수가 최소 오차일 때의 매개변수 보다는 비교적 크지만, 그에 해당하는 오차는 최소 오차와 비슷한 것을 알 수 있다.

제안한 방법과 곡률법은 translating tree를 제외하고는 비슷한 성능을 보인다. 이는 두 방법 모두 L-curve의 곡률에 근거하기 때문이다. 그러나 단순히 최대를 구하는 곡률법은 (그림 9)에서와 같이 실패할 경우가 생긴다. 또한 제안한 방법은 DIV<sub>L</sub> 한 경우만 제외하고 모든 경우에 최소 오차에 가깝거나 같다.

(그림 8~10)에는 움직임이 큰 경우와 작은 경우를 같이 비교했는데 추정 오차가 전반적으로 큰 것을 제외하고는 특별한 경향이 관찰되지 않았다.

(그림 11)에는 매개변수의 크기와는 관계없이 추정 오차만을 막대그래프로 비교하였다. (그림 11)에서는 전술한 것처럼 적응 제거법을 사용하면, 4개의 프레임 쌍에서 오차가 매우 큰 것을 눈에 띄게 관찰되었다. 나머지 4개의 프레임 쌍에서도 곡률법에 근거한 방법들과 크게 차이 나지 않는 것을 쉽게 알 수 있다. 그리고 곡률법과 제안한 방법을 비교하면 DIV<sub>L</sub>의 경우만 제외하고 모두 제안한 방법이 최소 오차에 가깝다는 것을 알 수 있다. 이 것은 <표 2>의 추정 오차의 평균 (표의 맨 아래 행)을 보면 더욱 명확하게 알 수 있다. 제안한 방법은 최소 오차와 RMSE의 평균이 0.02 pixel/frame인 반면, 곡률법은 0.12 pixel/frame 차이가 났다.

이상의 관찰로부터 광학 흐름 추정 문제에 있어서, L-curve를 이용하여 최적 매개변수를 찾을 경우, 곡률을 이용한 방법들이 전역적 모서리를 찾는 적응 제거법보다 우수함을 알 수 있었다. 또한 L-curve의 곡률에서 단순히 최대

를 찾지 않고 양의 봉우리 중에 우측으로 음의 계곡이 뚜렷한 것을 선택하는 제안한 방법이 안정적으로 최적 매개변수를 찾을 수 있음을 알았다.

## 5. 결 론

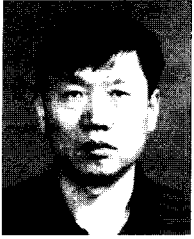
시공간 경사 법으로 광학 흐름을 추정 할 때, 최적 정규화 매개 변수를 찾는 L-curve 모서리 검출법을 제안하였다. 제안한 모서리 검출법은 기존의 곡률법과 달리 L-curve 곡률 그래프상의 최대 위치를 선정하는 대신에 그래프상의 우측에 음의 계곡과의 곡률차가 최대가 되는 양의 봉우리를 선정한다.

기존의 모서리 검출법 중에서 곡률법과 전역적 모서리 검출법인 적응 제거법을 8개의 프레임 쌍에서 제안한 방법과 비교 실험한 결과, 제안한 방법이 가장 우수한 성능을 보였다. 또한 제안한 방법으로 선정한 매개변수를 적용하여 광학 흐름을 구하면, 평균적으로 최소 추정 오차와 단지 0.02 pixel/frame 밖에 차이가 나지 않으므로, 광학 흐름 추정 문제에서도 최적 정규화 매개변수를 찾는 작업은 의의가 있는 것을 알 수 있었다.

전역적 모서리를 찾는 적응 제거법은 지역적인 모서리가 확실한 실험 영상에서 실패했으므로, 이 경우 제안한 방법과 곡률법과 같은 지역적 모서리를 찾는 방법으로 생각된다. 특히 지역적 모서리가 뚜렷할 경우에는 그 모서리를 선택하는 것이 유리할 것으로 보인다. 추후에 L-curve의 지역적 모서리의 뚜렷한 정도를 분류(classify)할 수 있는 알고리즘을 개발하여 두 가지 검출법을 적용적으로 적용해 보는 것은 의미 있는 연구가 될 것이다.

## 참 고 문 헌

- [1] B.K.P. Horn and B.G. Schunck, "Determining optical flow," *Artificial Intelligence*, Vol. 17, pp.185-203, 1981.
- [2] J.D. Kim and S.K. Mitra, "A local relaxation method for optical flow estimation," *Signal Processing: Image Communication*, Vol. 11, pp.21-38, 1997.
- [3] F. Heitz and P. Bouthemy, "Multimodal estimation of discontinuous optical flow using Markov random fields," *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 15, pp.1217-1232, 1993.
- [4] G.L. Besnerais and F. Champagnat, "B-spline image model for energy minimization-based optical flow estimation," *IEEE Transactions on Image Processing*, Vol. 15, pp.3201-3206, 2006.
- [5] A. Mitiche and H. Sekkati, "Optical Flow 3D Segmentation and Interpretation: A variational method with active curve evolution and level sets," *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 28, pp.1818-1829, 2006.
- [6] Y.-H Kim and A.C. Kak, "Error analysis of robust optical flow estimation by least median of squares methods for the varying illumination model," *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 28, pp.1418-1435, 2006.
- [7] H. Foroosh, "Pixelwise-adaptive blind optical flow assuming nonstationary statistics," *IEEE Trans. on Image Processing*, Vol. 14, pp.222-230, 2005.
- [8] I. Patras, M. Worring, and R. Boomgaard, "Dense motion estimation using regularization constraints on local parametric models," *IEEE Trans. on Image Processing*, Vol. 13, pp.1432-1443, 2004.
- [9] P.R. Johnston and R.M. Gulrajani, "A new method for regularization parameter determination in the inverse problem of electrocardiography," *IEEE Trans on Biomedical Engineering*, Vol. 44, pp.19-39, 1997.
- [10] P.R. Johnston and R.M. Gulrajani, "Selecting the corner in the L-curve approach to Tikhonov regularization," *IEEE Trans on Biomedical Engineering*, Vol. 47, pp.1293-1296, 2000.
- [11] P.C. Hansen and D.P. O'Leary, "The use of the L-curve in the regularization of discrete ill-posed problems," *SIAM J. Sci. Comput.*, Vol. 14, pp.1487 - 1503, 1993.
- [12] C. Hansena, T. K. Jensen, and G. Rodriguezb "An adaptive pruning algorithm for the discrete L-curve criterion," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 198, pp.483 - 492, 2007.
- [13] J.D. Kim, "Stable Multi-Grid Method for Optical Flow Estimation," *IEICE Trans. On Inform. And Sys.*, Vol.E87-D, No.11, pp.2513-2516, 2004.
- [14] A.M.Thompson, J.C. Brown, J.W. Kay, and D.M. Titterington, "A study of methods of choosing the smoothing parameter in image restoration by regularization," *IEEE Trans on PAMI*, Vol. 12, No. 4, pp.326-339, April 1991.
- [15] J.L. Castellanos, S. Gomez, and V. Guerra, "The triangle method for finding the corner of the L-curve," *Appl. Numer. Math.*, Vol. 43, pp.359 - 373, 2002.
- [16] P.C. Hansen, "Regularization Tools: A Matlab package for analysis and solution of discrete ill-posed problems," *Numer. Algo.*, Vol. 6, pp.1-35, 1994.



**김종대**

e-mail : kimjd@hallym.ac.kr

1988년 서울대학교 전자공학과(학사)

1982년 한국과학기술원 전자 및 전자공학과  
(공학석사)

1990년 한국과학기술원 전자 및 전자공학과  
(공학박사)

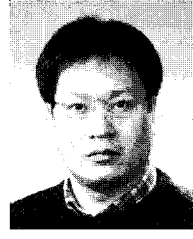
1988년~2000년 삼성전자 수석연구원

1995년 UCSB 방문연구자

1996년 UCLA 방문연구자

2000년~현재 한림대학교 정보통신공학부 부교수

관심분야: 신호 및 영상처리, 멀티미디어 통신, 의용생체공학



**김종원**

e-mail : jwkim@bio.bmelab.co.kr

1985년 서울대학교 물리학과(학사)

1987년 서울대학교 물리학과(이학석사)

1992년 서울대학교 공과대학 의공학협동과정  
(공학박사)

1987년~1992년 서울대학교병원 의공학과 연구원

1994년~현재 ㈜바이오메드랩 대표이사

관심분야: 바이오칩, Lab-on-Chip, 인공장기