

< 논문 >

압전재료 내의 균열에 대한 그린함수

최 성 렬*

(2007년 7월 12일 접수, 2007년 8월 3일 심사완료)

Green's Function of Cracks in Piezoelectric Material

Sung Ryul Choi

Key Words: Piezoelectric Material(압전재료), Electric Displacement(전기변위), Intensity Factor(강도계수)

Abstract

A general form solution is considered for a piezoelectric material containing impermeable cracks subjected to a combined mechanical and in-plane electrical loading. The analysis is based upon the Hilbert problem formulation. Using this solution, typically for a central crack in transverse isotropic piezoelectric material, a closed form solution is obtained, where one concentrated mechanical and electrical load is subjected to the crack surface. This problem could be used as a Green's function to generate the solutions of other problems with the same geometry but of different loading conditions.

1. 서론

압전재료는 응력에 의해 전하가 발생되고 전기장에 의해 변형이 발생하는 전기기계적인 고유특성을 지니는 재료로서 센서, 액츄에이터, 지능형 구조물 등 많은 용도에 사용되고 있다. 압전성을 부여하기 위해 필요한 분극처리 과정이나 사용 중에 인가되는 반복적인 전기장으로 인해 균열과 같은 결함이 발생하게 되고, 이와 같은 결함은 재료 강도를 저하시키는 원인이 된다. 압전재료에 대한 연구는 Parton⁽¹⁾이 압전재료의 간단한 균열문제를 고려한 이후로 Pak,⁽²⁾ Zhang과 Hack⁽³⁾ 등 많은 국내외 연구자에 의하여 횡등방(transverse isotropic) 압전체에 대한 면외균열문제가 해석되었다.⁽⁴⁻⁹⁾

여기서 면외균열문제는 횡등방성 압전재료에서 분극방향과 직교하는 평면방향으로 전기장이 작용할 때, 이 전기장에 의해 면외 변형(anti-plane deformation)이 발생하게 되고 이와 관련된 균열문제를 말한다.

한편 압전재료가 이방성인 경우에는 일반적으로 인가되는 전기장에 의해 면외변형 및 면내변형이 함께 발생하게 된다. 이와 같은 연성변형(coupled deformation) 균열문제에 대하여 Sosa 및 Pak⁽¹⁰⁾은 균열선단의 응력장 및 전기변위장을 복소함수전개법으로 구하였다. 또한 Pak⁽¹¹⁾ 등 여러 연구자들은 복소함수로 표현된 경계치문제를 풀거나 경로 보존적분을 사용하여 균열선단의 응력 및 전기변위 강도계수에 대한 엄밀해를 구하는 연구를 수행하였다.⁽¹²⁻¹⁴⁾

이중에서 Suo 등⁽¹⁴⁾은 압전체 균열문제를 4개의 복소 포텐셜함수로 표현하여 무한체에 대한 일반해를 구하는 방법을 제시하고, 이로부터 응력 및 전기변위 강도계수에 대한 엄밀해를 구한 바 있

* 회원, 영남대학교 기계공학부
E-mail : srchoi@yu.ac.kr
TEL : (053)810-2443 FAX : (053)810-4627

다. 이들이 제시한 일반해는 경계조건이 균열 상하면에 동일한 크기의 기계적 전기적 하중이 작용하여 자기평형(self equilibrium)을 이루고 있는 조건이며, 균열면은 절연되어 있는 경우이다. 그러나 균열 상하면에 작용하는 하중이 동일하지 않아서 이들 하중만으로는 평형을 이루지 못하는 경우에는 해석된 바가 없다.

본 연구에서는 균열면에 작용하는 하중이 자기 평형이 유지되지 않는 경우에 대해서도 그 해석이 가능한 압전체 균열문제의 일반해를 구한다. 경계조건이 적용되기 전까지의 수식화 과정은 Suo 등⁽¹⁴⁾의 연구와 동일하므로, 이들의 전개과정을 따라 수식화 하고 경계조건을 적용하여 Hilbert문제를 구성하여 해석한다.

또한 특별한 경우로서 균열면에 기계적 집중 하중과 전기적하중이 작용하는 문제를 택하여 이 문제에 대한 폐형(closed form)해를 구한다. 이 해는, 중첩의 원리를 적용함으로써, 균열면에 임의로 분포하는 하중에 대해서도 해석이 가능한 Green 함수로 사용이 가능하다.

2. 기본이론식

2.1 선형압전이론

압전성이란 기계적 변형에 의하여 전기분극이 야기됨을 의미하며, 이러한 압전재료에 대한 응력 σ_{ij} , 변형률 γ_{ij} , 전기장 E_i , 전기변위 D_i 에 대한 구성방정식은 다음과 같다.^(3,12,14)

$$\sigma_{ij} = C_{ijrs}\gamma_{rs} - e_{sij}E_s, \quad D_i = e_{irs}\gamma_{rs} + \epsilon_{is}E_s \quad (1)$$

여기서 C_{ijrs} 는 탄성계수, e_{sij} 는 압전계수, ϵ_{is} 는 유전율을 말한다. 기계적변위 u_i 와 전위 ϕ 을 사용하여 변형률과 전기장은 다음과 같이 표현된다.

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad E_i = -\phi_{,i} \quad (2)$$

체적력과 자유전하가 없을 때 응력과 전기변위의 지배방정식은 다음과 같다.

$$\sigma_{ij,i} = 0, \quad D_{i,i} = 0 \quad (3)$$

식 (2)를 적용하여 다시 쓰면 식 (1)과 식 (3)은 각각 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= C_{ijrs}u_{r,s} + e_{sij}\phi_{,s}, \quad D_i = e_{irs}u_{r,s} - \epsilon_{is}\phi_{,s} \quad (4) \\ (C_{ijrs}u_r + e_{sij}\phi_{,s})_{,si} &= 0, \quad (e_{irs}u_r - \epsilon_{is}\phi_{,s})_{,si} = 0 \quad (5) \end{aligned}$$

2.2 복소함수 해

변수 (x, y) 의 함수로 표현되는 2차원 평면문제에 대하여, 변위 $u_r (r=1,2,3)$ 와 전위 ϕ 를 한 개의 열벡터 $v = [u_1, u_2, u_3, \phi]^T$ 로 두고 복소함수를 도입하여 해를 구성하는 방법이 Suo 등의 문헌⁽¹⁴⁾에 제시되어 있다. 이절에서는 이들의 내용을 간략히 설명하고자 한다. 먼저 x 및 y 의 일차 결합으로 표현된 임의 함수 f 를 도입하여 열벡터 v 를 다음과 같이 둔다.

$$v = a f(\zeta_1 x + \zeta_2 y) \quad (6)$$

여기서 a 는 미지상수로 구성된 열벡터이고, 상수 ζ_1, ζ_2 는 다음과 같은 값을 말한다.

$$\zeta_1 = 1, \quad \zeta_2 = p(7)$$

식 (6)을 식 (5)에 대입하면 식 (8)과 같은 미분식을 얻게 된다.

$$\begin{aligned} (C_{\alpha jr\beta} a_r + e_{\alpha j\beta} a_4)\zeta_\alpha \zeta_\beta &= 0, \quad (8) \\ (e_{\alpha r\beta} a_r - \epsilon_{\alpha\beta} a_4)\zeta_\alpha \zeta_\beta &= 0 \end{aligned}$$

여기서 α 및 β 는 1과 2의 값을 취한다. 식 (8)은 4개의 식으로 구성된 고유치 문제가 되고, 여기서 상수 p 와 열벡터 a 는 각각 고유치와 고유벡터에 해당한다. 식 (8)은 매우 복잡하므로, 일반적으로 수치적인 방법에 의해 고유치와 고유벡터가 결정된다.

고유치 p 중에서 허수부가 양인 4개의 고유치 $p_\alpha (\alpha=1 \sim 4)$ 와 이에 대응하는 열벡터를 a_α 로 두고, 또한 대응하는 복소수를 $z_\alpha = x + p_\alpha y$ 로 둔다. 그러면 다음과 같이 임의함수 4개로 구성된 v 에 대한 일반해를 얻는다.

$$v = [u_r, \phi]^T = 2Re \sum_{\alpha=1}^4 a_{\alpha} f_{\alpha}(z_{\alpha}) \quad (9)$$

여기서 $Re(\cdot)$ 는 복소수의 실수부를 말하며, 임의함수 $f_{\alpha}(\alpha=1 \sim 4)$ 는 아직 미지함수로서, 향후 경계조건으로부터 결정된다.

식 (9)를 식 (4)에 대입하면 응력성분 및 전기변위로 표현된 열벡터 t 는 다음과 같이 주어지게 된다.

$$t = [\sigma_{2j}, D_2]^T = 2Re \sum_{\alpha=1}^4 b_{\alpha} f'_{\alpha}(z_{\alpha}) \quad (10)$$

여기서 (p, a) 에 대응되는 열벡터 b 의 원소는 식 (9)를 식 (4)에 대입함으로써 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} b_j &= (C_{2jr\beta} a_r + e_{\beta j2} a_4) \zeta_{\beta}, \\ b_4 &= (e_{2r\beta} a_r - \epsilon_{2\beta} a_4) \zeta_{\beta} \end{aligned} \quad (11)$$

식 (11)은 식 (8)로부터 다른 모양으로도 나타낼 수 있다.

열벡터 a_{α} 및 b_{α} 를 가지고 4×4 행렬 A, B 를 정의하자.

$$A = [a_1, a_2, a_3, a_4], B = [b_1, b_2, b_3, b_4] \quad (12)$$

행렬 Y 와 H 를 새로이 정의하여 다음과 같이 나타내자.

$$Y = iAB^{-1}, H = Y + \bar{Y} \quad (13)$$

여기서 $i = \sqrt{-1}$ 이고, Y 는 Hermitian 행렬로 알려져 있다.

또한 미지 해석함수를 묶어서 한 개의 열벡터 $f(z)$ 로 정의하자.

$$f(z_{\alpha}) = [f_1(z_1), f_2(z_2), f_3(z_3), f_4(z_4)]^T, z_{\alpha} = x + p_{\alpha}y \quad (14)$$

그러면 식 (9), (10)에 대한 x 축상의 변위-전위와 면력-전기변위의 열벡터의 표현은 다음과 같이 기술된다.

$$v(x) = [u_j, \phi]^T = 2Re [A f(x)] \quad (15)$$

$$t(x) = [\sigma_{2j}, D_2]^T = 2Re [B f'(x)] \quad (16)$$

3. 수식화 및 일반해

3.1 문제의 수식화

압전재료 내부에 유한크기의 n 개 균열들이 $y=0$ 인 x 축 선상에 배치되어 있다고 두고, 이 균열부분을 L 로 나타내자. 균열이 $x=a_1$ 에서 시작하여 $x=b_1$ 에서 끝이 나는 첫 번째 균열을 (a_1, b_1) 라고 나타내면, 차례대로 놓인 n 개의 균열은 $(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)$ 와 같이 들 수 있다. 경계조건으로 임의크기의 기계 및 전기적 하중이 균열 상하면에 작용하고 있고, 이때 균열은 전기적으로 절연되어 있다고 가정한다.

이와 같은 문제의 경계조건을 수식으로 표현하면, 먼저 균열을 제외한 x 축의 상하면에서는 변위 u_r 와 전위 ϕ 가 연속이어야 한다.

$$v^+(x) = v^-(x), \quad x \notin L \quad (17)$$

여기서 상첨자 + 및 -는 x 축의 상부와 하부의 극한값을 각각 말한다. 또한 면력 σ_{2j} 과 전기변위 D_2 가 연속이어야 한다.

$$t^+(x) = t^-(x), \quad x \notin L \quad (18)$$

한편 균열면의 상하면에서는 면력 σ_{2j} 및 전기변위 D_2 가 $p^+(x), p^-(x)$ 로 각각 주어져 있다고 하면, 그 식은 다음과 같다.

$$t^+(x) = p^+(x) \quad x \in L \quad (19a)$$

$$t^-(x) = p^-(x) \quad x \in L \quad (19b)$$

연속조건 식 (17) 및 (18)에 식 (15), (16)을 대입하여 해석접속을 이용하면, 균열 L 을 제외한 전 영역에서 해석적인 새로운 함수벡터 $\Theta(z)$ 및 $\Omega(z)$ 를 정의할 수 있다.^(14,15)

$$\begin{aligned} \Theta(z) &= A f'(z) - \bar{A} \bar{f}'(z), \quad z \notin L \\ \Omega(z) &= B f'(z) - \bar{B} \bar{f}'(z), \quad z \notin L \end{aligned} \quad (20)$$

식 (20)을 연립하여 역으로 표현하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} f'(z) &= D^{-1}[\bar{A}^{-1}\theta(z) - \bar{B}^{-1}\Omega(z)], \\ \bar{f}'(z) &= -\bar{D}^{-1}[A^{-1}\theta(z) - B^{-1}\Omega(z)] \end{aligned} \quad (21)$$

여기서 $D = (\bar{A}^{-1}A - \bar{B}^{-1}B)$ 이다.

3.2 Hilbert 문제와 해

식 (21)을 경계조건 식 (19a,b)에 대입하여 정리하면 다음과 같은 Hilbert 문제를 얻는다.

$$\begin{aligned} \Omega^+(x) - \Omega^-(x) &= [p^+(x) - p^-(x)] \quad (22) \\ [\theta^+(x) - \frac{(Y - \bar{Y})}{2i} \Omega^+(x) \\ + \theta^-(x) - \frac{(Y - \bar{Y})}{2i} \Omega^-(x)] &= \frac{H}{2i} [p^+(x) + p^-(x)] \quad (23) \end{aligned}$$

이러한 Hilbert문제의 일반해 $\Omega(z)$, $\theta(z)$ 를 다음과 같이 얻을 수 있다.⁽¹⁶⁾

$$\begin{aligned} \Omega(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{Q_0(t)}{t-z} dt \\ \theta(z) - \frac{(Y - \bar{Y})}{2i} \Omega(z) &= \frac{X(z)}{2\pi i} \int_L \frac{T_0(t) dt}{X^+(t)(t-z)} + P_n(z) X(z) \end{aligned} \quad (24a,b)$$

위 식 내의 Plemelj 함수 $X(z)$ 와 열벡터들은 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned} X(z) &= \prod_{i=1}^n (z - a_i)^{-1/2} (z - b_j)^{-1/2} \\ Q_0(t) &= [p^+(t) - p^-(t)] \quad (25) \\ T_0(t) &= \frac{H}{2i} [p^+(t) + p^-(t)], \\ P_n(z) &= c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n \end{aligned}$$

끝으로 미지 열벡터 $P_n(z)$ 의 계수들 또한 구해 질 수 있다. 즉, 기계하중 및 전기하중이 균열면에 작용함으로써, 무한거리 $|z| \rightarrow \infty$ 에서는 $\theta(z) = o(z^0)$ 의 점근거동을 보인다는 조건과 각 균열구간 (a_j, b_j) 마다 변위가 일가라는 다음의

조건을 적용함으로써 가능하게 된다.

$$\int_{a_j}^{b_j} [\theta^+(x) - \theta^-(x)] dx = 0 \quad (26)$$

위의 식 (24)와 식 (21)은 이방성 압전재료 내에 직선균열이 존재할 때의 연성문제에 대한 일반해가 된다. 이러한 일반해를 사용함으로써 구체적으로 명시된 균열문제의 엄밀해는 용이하게 얻을 수 있다.

4. 면외균열 문제

4.1 횡등방성 압전재료

다결정체인 세라믹재료를 큰 전기장을 가하여 분극처리하면 상용되는 횡등방성 압전재료가 된다. 분극방향을 x_3 방향으로 두면, x_1x_2 평면은 등방평면이 된다. 이 재료에 대한 식 (1)의 구성방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.^(2,14)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{22} \\ \gamma_{33} \\ 2\gamma_{13} \\ 2\gamma_{23} \\ 2\gamma_{12} \end{pmatrix} \\ &- \begin{pmatrix} 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{33} \\ 0 & e_{15} & 0 \\ e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (27a)$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{22} \\ \gamma_{33} \\ 2\gamma_{13} \\ 2\gamma_{23} \\ 2\gamma_{12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (27b)$$

여기서 $C_{66} = \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12})$ 이다.

이러한 횡등방성 압전재료에 면내 전기장이 인가되어 한 개의 균열이 생성된 특별한 경우를 생각하자. 이때 인가된 전기장이 분극방향과 직교

하는 x_1x_2 평면으로 작용한다면, 생성되는 응력은 면외응력이 된다. 이들 문제에 대한 Green함수를 구하기 위해 Fig. 1과 같이 균열면의 한 점에 집중 면외하중과 집중 면내전기변위가 작용한다고 두었다.

4.2 해석함수의 결정

Fig. 1에서 보는 바와 같이 좌표계를 횡동방향 압전재료에 대한 좌표계 (x_1, x_2, x_3) 외에 $x = x_1$ 및 $y = x_2$ 인 또 다른 직각좌표계를 (x, y, z) 를 도입하자. 전기장이 x_1x_2 평면으로 작용한다면, 식 (27a,b)은 각각 면내변위 (u_1, u_2) 와 면외변위 및 전위 (u_3, ϕ) 의 독립적인 식으로 분리됨을 알 수 있다. 따라서 xy 평면내로 전기장이 인가되는 문제는 $u_1 = u_2 = 0$ 이 되고, 결국 2개 함수 (u_3, ϕ) 를 구하는 문제로 압축된다. 그러면 (u_3, ϕ) 는 다음과 같이 표현된다.^(2,14)

$$u_z = 2Re[f_1(z)], \quad \phi = 2Re[f_2(z)], \quad z = x + iy \tag{28}$$

이때 2장에서 설명한 고유치는 두 개 $p_1 = p_2 = i$ 가 되며, 또한 행렬 A, B 는 다음과 같이 압축된다.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = i \begin{pmatrix} C_{44} & e_{15} \\ e_{15} & -\epsilon_{11} \end{pmatrix} \tag{29}$$

Fig. 1에서 보는 바와 같이 길이 $2a$ 인 균열의 한 점 $x = b, y = 0^+$ 에 크기 S_0 인 집중 전단력과 균열면에 직교하여 크기 D_0 인 집중 전기변위가 작용한다고 하자. 그러면 식 (19)에 명시된 열벡터는 다음으로 주어진다.

$$p^+(x) = -p_0 \delta(x-b), \quad p^-(x) = 0 \tag{30}$$

여기서 $p_0 = [S_0, D_0]^T$ 인 열벡터를 말하고 $\delta(x-b)$ 는 델타함수를 말한다. 이를 식 (24)와 같은 일반해에 대입하고 식 (26)의 변위일가 조건과 해의 점근거동을 적용하여 계산하면 다음과 같은 $\Omega(z)$ 및 $\Theta(z)$ 에 대한 폐형 해를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \Omega(z) &= -\frac{p_0}{2\pi i(b-z)} \\ \Theta(z) &= -\frac{B^{-1}p_0}{2\pi} \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{(b-z)\sqrt{z^2-a^2}} \end{aligned} \tag{31}$$

4.3 강도계수

$x = a$ 인 균열선단에서 전방으로 거리 ρ 인 점의 응력 및 전기변위와 응력강도계수 K_{III} 및 전기변위 강도계수 K_D 관계는 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{pmatrix} \sigma_{23} \\ D_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} \begin{pmatrix} K_{III} \\ K_D \end{pmatrix}, \quad \rho \rightarrow 0 \tag{32}$$

식 (21) 및 식 (29)를 대입하여 식 (16)을 정리하면 열벡터는 다음과 같이 표현된다.

$$[\sigma_{23}, D_2]^T = Re[B\Theta(x) + \Omega(x)] \tag{33}$$

식 (33)에 식 (31)을 대입하여 균열선단의 점근 해를 구하고, 이를 식 (32)와 등식으로 두면 강도계수는 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{pmatrix} K_{III} \\ K_D \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{\pi a}} \begin{pmatrix} S_0 \\ D_0 \end{pmatrix} \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} \tag{34}$$

4.4 결과 검토

$D_0 = 0$ 인 전단하중만 작용하는 경우의 결과는 기존의 탄성문제의 해석결과와 일치함을 알 수 있다.⁽¹⁷⁾

한편 균일전단하중 p_0 와 균일 전기변위 D_0 이 균열상하면 전체에 작용하는 경우는 식 (34)를 가지고 적분을 수행함으로써 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$\begin{pmatrix} K_{III} \\ K_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_0 \sqrt{\pi a} \\ D_0 \sqrt{\pi a} \end{pmatrix} \tag{35}$$

이는 기존 연구자의 결과와 일치함을 보인다.^(2,12,14)

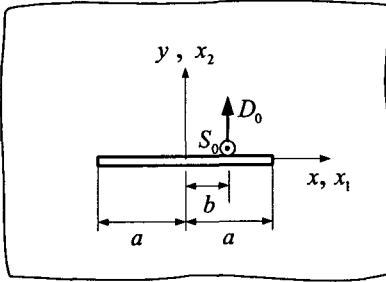


Fig. 1 Concentrated anti-plane shear and in-plane electrical loads on the crack surface perpendicular to the poling axis x_3

5. 면내균열 문제

5.1 해석함수의 결정

Fig. 2에서 보는 바와 같이 분극 방향이 x_3 인 횡등방성 압전재료에서, xy 축을 각각 $x = x_1, y = x_3$ 으로 두자. 이때 x_1x_3 평면 내로 전기장과 기계적하중이 작용한다면, 각 방향의 변위성분 u_r 과 전위 ϕ 는 다음으로 둘 수 있다.⁽¹⁴⁾

$$u_1 = u_1(x, y), \quad u_2 = 0, \quad u_3 = u_3(x, y) \quad (36)$$

$$\phi = \phi(x, y)$$

2.2절에서 언급한 식은 (x, y) 평면이 (x_1, x_2) 평면일 때의 식이지만, (x_1, x_3) 평면인 경우에서도 단지 수식의 하첨자 2를 모두 3으로 대치함으로써 그대로 적용하면 된다.

식 (36)으로 부터 변위와 전위성분은 4개의 성분에서 3개의 성분으로 압축이 되는바 식 (15) 및 (16)의 열벡터 역시 다음의 3개 성분으로 압축된다.

$$v = [u_1, u_3, \phi]^T, \quad t = [\sigma_{31}, \sigma_{33}, D_3]^T \quad (37)$$

또한 2.2절 내의 행렬 A, B 및 관련된 행렬 Y, H 는 모두 3×3 행렬로 압축된다.

재료 물성치 식 (27)을 사용하여 식 (8)과 같은 고유치 문제를 풀면 고유치와 고유벡터 (p, a) 를 얻을 수 있지만, 식이 복잡하므로 전산에 의한 수치적인 방법 구할 수 있고, 그러면 순차적으로

행렬 B, Y 및 H 가 결정된다.

Fig. 2와 같이 길이 $2a$ 인 균열에서 $x = b, y = 0^+$ 인 균열 면에 크기 P_0 및 R_0 인 집중 수직력과 전단력이 작용하고 또한 D_0 인 집중 전기변위가 작용한다고 하자. 그러면 경계조건인 식 (37) 및 (19)의 열벡터는 다음과 같이 주어진다.

$$p^+(x) = -p_0 \delta(x - b), \quad p^-(x) = 0 \quad (38)$$

여기서 $p_0 = [R_0, P_0, D_0]^T$ 인 열행렬을 말하고 $\delta(x - b)$ 는 델타함수를 말한다. 이를 식 (24)와 같은 일반해에 대입하고 식 (26)의 변위일가 조건과 해의 점근거동을 고려하여 계산하면 다음과 같은 함수벡터 Ω, Θ 에 대한 폐형 해를 얻게 된다.

$$\Omega(z) = -\frac{p_0}{2\pi i(b-z)} \quad (39)$$

$$\Theta(z) = -\frac{1}{4\pi i} \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{(b-z)\sqrt{z^2 - a^2}} H p_0$$

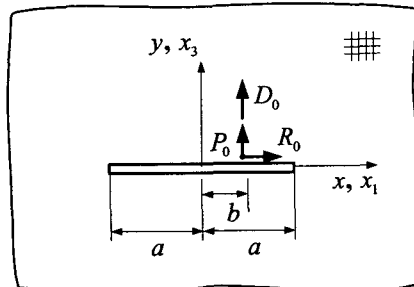
$$- \frac{Y - \bar{Y}}{4\pi\sqrt{z^2 - a^2}} p_0 + \frac{1}{2i} (Y - \bar{Y}) \Omega(z)$$

5.2 강도계수

$x = a$ 인 균열선단에서 전방으로 ρ 인 점의 응력 및 전기변위의 점근거동과 응력강도계수 K_{II}, K_I 및 전기변위 강도계수 K_D 의 관계는 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{pmatrix} \sigma_{13} \\ \sigma_{33} \\ D_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} \begin{pmatrix} K_{II} \\ K_I \\ K_D \end{pmatrix}, \quad \rho \rightarrow 0 \quad (40)$$

식 (21)을 식 (16)에 대입하면 다음으로 표현



된다.

$$[\sigma_{13}, \sigma_{33}, D_3]^T = 2Re [iH^{-1}\Theta(x) + H^{-1}\bar{Y}\Omega(x)] \quad (41)$$

식 (41)에 식 (39)를 대입하여 균열선단의 점근해를 구하고, 이를 식 (40)과 등식으로 두면 강도계수는 다음과 같이 계산된다.

Fig. 2 Concentrated in-plane mechanical and in-plane electrical loads on the crack surface parallel to the poling axis x_3

$$\begin{pmatrix} K_{II} \\ K_I \\ K_D \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{\pi a}} \begin{pmatrix} R_0 \\ P_0 \\ D_0 \end{pmatrix} \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} + \frac{i}{2\sqrt{\pi a}} H^{-1}(Y - \bar{Y}) p_0 \quad (42)$$

5.3 결과 검토

몇몇 경우에 대한 기존연구자의 결과와 비교하여 봄으로써 식 (42)를 검증하여 본다.

균일한 수직응력 및 전단응력 P_0, R_0 와 균일 전기변위 D_0 이 균열상면 및 하면 전구간에 작용하는 경우의 강도계수는 식 (42)를 가지고 중첩법으로 적분함으로써 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{pmatrix} K_{II} \\ K_I \\ K_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0 \\ R_0 \\ D_0 \end{pmatrix} \sqrt{\pi a} \quad (43)$$

이는 기존 연구자의 결과와 일치함을 보인다.^(12,14)

또한 특별한 경우로서 등방성 압전 재료라고 하면, 이때 행렬 Y 는 다음으로 주어진다.⁽¹⁴⁾

$$Y = \frac{1}{4\mu} \begin{pmatrix} \kappa+1 & (\kappa-1)i & 0 \\ -(\kappa-1)i & \kappa+1 & 0 \\ 0 & 0 & -4\mu/\epsilon \end{pmatrix} \quad (44)$$

여기서 μ 는 전단계수, κ 는 프와송비 ν 와 $\kappa = 3 - 4\nu$ 로 표시되는 상수이고 ϵ 은 유전율을 말한다.

식 (44)와 $H = Y + \bar{Y}$ 을 가지고 식 (41)에 대입

하면 다음과 같은 폐형으로 주어지는 결과를 얻는다.

$$\begin{pmatrix} K_{II} \\ K_I \\ K_D \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{\pi a}} \begin{pmatrix} R_0 \\ P_0 \\ D_0 \end{pmatrix} \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} + \frac{1}{2\sqrt{\pi a}} \begin{pmatrix} \kappa-1 \\ \kappa+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_0 \\ P_0 \\ D_0 \end{pmatrix} \quad (45)$$

특히 $D_0 = 0$ 인 경우일 때 식 (45)는 기존의 균열면의 한 점에 집중하중이 작용하는 탄성재료 문제의 해로 귀결됨을 알 수 있다.⁽¹⁷⁾

따라서 식 (42)는 균열면에 임의로 작용하는 하중문제에 대한 그린함수가 됨을 알 수 있다. 이는 또한 면력과 전기변위가 존재하지 않는 자유면에 대한 해석에도 사용될 수 있다.

6. 결론

선형 압전 재료의 균열면에 작용하는 기계 및 전기적 하중이 자기평형이 유지되지 않는 경우에 대해서도 해석이 가능한 균열문제의 일반해를 구하였다. 기존연구자의 전개과정을 사용하고 경계조건을 적용하여 Hilbert 문제를 구성하고 해석하였다.

특별한 경우로서 균열면에 작용하는 기계 및 전기적 하중이 집중하중일 때, 일반해를 적용하여 면외문제와 면내문제에 대한 폐형 해를 각각 구하였다. 이때 압전재료는 횡등방성 재료이고, 균열면은 절연되어 있다고 두었다.

이 해는 동일한 균열에 분포하는 임의 하중에 대해서도 그 해석이 가능한 Green 함수가 된다.

참고문헌

- (1) Parton, V. Z., 1976, "Fracture Mechanics of Piezoelectric Materials," *Acta Astronautica*, Vol.3, pp. 671-683.
- (2) Pak, Y. E., 1990, "Crack Extension Force in a Piezoelectric Materials," *Journal of Applied*

- Mechanics*, Vol.57, pp. 647~653.
- (3) Zhang, T. -Y and Hack, J. E., 1992, "Mode-III Cracks in Piezoelectric Materials," *J. Appl. Phys.*, Vol.71, No.12, pp. 5865~5870.
- (4) Zhang, T. -Y and Tong, P., 1996, "Fracture Mechanics for a Mode III Crack in a Piezoelectric Material," *Int. J. Solids Structures*, Vol.33, No.3, pp. 343~359.
- (5) Choi, S. T. and Earmme, Y. Y., 1998, "Antiplane Problem of Interfacial Circular-Arc Cracks in Transversely Isotropic Piezoelectric Media," *Trans. of the KSME(A)*, Vol. 22, No. 5, pp. 868~876.
- (6) Kwon, J. H., Kwon, S. M., Shin, J. W. and Lee, K. Y., 2000, "Determination of Intensity Factors in Piezoelectric Ceramic Strip with Impermeable Crack," *Trans. of the KSME(A)*, Vol. 24, No. 6, pp. 1601~1607.
- (7) Kwon, J. H. and Lee, K. Y., 2001, "Crack Problem at Interface of Piezoelectric Strip Bonded to Elastic Layer under Anti-Plane Shear," *KSME International Journal*, Vol. 15, No. 1, pp. 61~65.
- (8) Shin, J. W., Kwon, S. M. and Lee, K. Y., 2001, "Eccentric Crack in a Piezoelectric Strip under Electro-Mechanical Loading," *KSME International Journal*, Vol. 15, No. 1, pp. 21~25.
- (9) Kwon, S. M. and Lee, K. Y., 2004, "Dynamic Response of an Anti-plane Shear Crack in a Functionally Graded Piezoelectric Strip," *KSME International Journal*, Vol. 18, No. 3, pp. 419~431.
- (10) Sosa, H. A. and Pak, Y. E., 1990, "Three-Dimensional Eigenfunction Analysis of a Crack in a Piezoelectric Material," *Int. J. Solids Structures*, Vol.26, No.1, pp. 1~15.
- (11) Pak, Y. E., 1992, "Linear Electro-elastic Fracture Mechanics of Piezoelectric Materials," *Int. J. Frac.*, Vol.54, pp. 79~100.
- (12) Park, S. B. and Sun, C. T., 1995, "Effect of Electric Field on Fracture of Piezoelectric Ceramics," *Int. J. Frac.*, Vol.70, pp. 203~216.
- (13) Beom, H. G. and Atluri, S. N., 1996, "Near-tip Fields and Intensity Factors for Interfacial Cracks in Dissimilar Anisotropic Piezoelectric Media," *Int. J. Frac.*, Vol.75, pp. 163~183.
- (14) Suo, Z., Kuo, C. -M. and Willis, J. R., 1992, "Fracture Mechanics for Piezoelectric Ceramic," *J. Mechanics. Physics. Solids*, Vol. 40, No. 4, pp. 739~765.
- (15) England, A. H., 1971, *Complex Variable Methods in Elasticity*, John Wiley & Sons, London.
- (16) Muskhelishvili, N. L., 1963, *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*, Noordhoff, Groningen.
- (17) Tada, H., Paris, P. and Irwin, G., 1973, *The Stress Analysis of Cracks Handbook*, Del Research Corp., Hellertown.