

비정렬 격자계에서 고차 정확도의 내재적 불연속 갤러킨 기법의 개발

이 희 동¹, 권 오 준^{*2}

DEVELOPMENT OF AN HIGH-ORDER IMPLICIT DISCONTINUOUS GALERKIN METHOD ON UNSTRUCTURED MESHES

H.D. Lee¹ and O.J. Kwon^{*2}

An implicit discontinuous Galerkin method for the two-dimensional Euler equations was developed on unstructured triangular meshes. The method can achieve high-order spatial accuracy by using hierarchical basis functions based on Legendre polynomials. Numerical tests were conducted to estimate the convergence order of numerical solutions to the Ringleb flow and the supersonic vortex flow for which analytic solutions are available. Also, the flows around a 2-D circular cylinder and an NACA0012 airfoil were numerically simulated. The numerical results showed that the implicit discontinuous Galerkin methods couples with a high-order representation of curved solid boundaries can be an efficient method to obtain very accurate numerical solutions on unstructured meshes.

Key Words : 불연속 갤러킨 기법(Discontinuous Galerkin Method), 내재적 시간 적분법(Implicit Time Integration), 고차 정확도 기법(High-order Method), 비정렬 격자계(Unstructured Meshes)

1. 서 론

최근 수십년간 급격한 발전을 거듭해온 전산유체역학은 대부분 유한차분법 및 유한체적법에 기초하고 있다. 특히 응용 공기역학의 주요 지배방정식인 압축성 Euler 방정식 및 RANS 방정식에 대한 수치기법은 대부분 Godunov계열의 유한체적법을 기반으로 개발되어 왔으며, Godunov 기법의 강건성과 정확성에 힘입어 최근에는 대규모 삼차원 전기체 형상에 대한 비정상 점성 해석도 보편적으로 수행되고 있는 실정이다.

그러나 현재 공기역학 분야에서 사용되고 있는 유한 체적법은 대부분 이차 정확도를 가진다. 이는 격자의 특성 길이가 감소함에 따라 수치오차가 이차로 감소함을 의미한다. 그러나 실제로 복잡한 형상을 가지는 응용 문제에서의 정확도는 격자 질의 저하 및 내삽 오차로 인해 이차보다 낮은 오차의 수렴성을 보인다. 특히 매우 낮은 수치 오차를 요구하는 전산

공력소음(CAA, Computational AeroAcoustics) 해석, LES(Large Eddy Simulation) 해석, 그리고 헬리콥터 끝단와류 포착 등의 문제에서는 이차의 정확도 기법으로는 불충분하며, 수치 소산 및 확산 등의 오차가 격자의 특성 길이 비에 비해 이차 이상으로 감소하는 고차 정확도 기법이 절실히 요구된다.

유한체적법에서의 고차 정확도 기법은 스텐실(stencil)을 확장하여 유동 분포를 고차의 다항식으로 재구성(reconstruction)함으로써 정확도를 높인다. 격자점이 규칙적으로 배열되어 있는 정렬 격자계에서의 공간 이산화는 물리적인 영역(physical domain)을 간극이 일정한 계산 영역(computational domain)으로 사상(mapping)한 뒤 이루어지게 된다. 그러므로 정렬 격자계에서의 고차 정확도 기법은 해석적인(analytic) 재구성 기법이 존재하게 된다. 정렬 격자계에서의 고차 정확도 기법은 MUSCL[1]을 필두로 하여 TVD[2], ENO[3], WENO[4] 기법 등으로 개발되어 왔다. 이러한 정렬 격자계에서의 고차 정확도 기법은 대부분 각 방향에 대해 일차원적으로 이루어지는 특성을 가진다. 이에 반해 비정렬 격자계에서의 유한체적법은 규칙적인 연결고리가 보장되지 않아 계산 영역으로의 사상이 불가능하다. 그러므로 재구성 과정은 물리적인 영역에서 이루어지게 되어 해석적인 고차 정확도 기법이 존재하지 않으며.

접수일: 2007년 4월 27일, 심사완료일: 2007년 8월 31일.

1 한국과학기술원 대학원 항공우주공학과

2 정희원, 한국과학기술원 항공우주공학과

* Corresponding author, E-mail: ojkwon@kaist.ac.kr

주위의 스텐실도 일정하지 않다. 비정렬 격자계에서 다차원의 고차 다항식 재구성은 대부분 최소자승문제(least-square problem)를 수치적으로 풀이함으로써 이루어진다[5]. 즉 비정렬 격자계에서 유한체적법에 기반한 이차 이상의 정확도 기법은 수치적으로 유동 변수를 재구성해야 하고 불규칙적으로 배열되어 있는 스텐실을 기억해야 하므로 매우 비효율적이고 실제적으로 비현실적이다. 비정렬 격자계에서의 고차 정확도 기법 중 규칙적으로 제어체적을 분할하여 해석적인 재구성이 가능한 스펙트럴 체적법(spectral-volume method)[6]이 최근 개발되었으나, 이 기법은 규칙적인 제어 체적 분할법이 사차 정확도까지만 개발되어 있는 상태로 아직 널리 적용되지 않고 있다.

비정렬 격자계에서의 고차 정확도 기법으로는 최근 많은 각광을 받고 있는 불연속 갤러킨 기법(discontinuous Galerkin method)[7,8]이 있다. 불연속 갤러킨 기법은 Reed와 Hill[9]이 선형 쌍곡선 방정식에 대해 최초로 개발된 이후 Euler 방정식 등의 비선형 쌍곡선 방정식에 대해 확장 개발되었으며[10], 이후 소산항이 포함되어 있는 Navier-Stokes 방정식에도 적용되고 있다[11,12]. 불연속 갤러킨 기법은 기존의 유한체적법의 특성과 유한요소법의 특성을 모두 내재하고 있다. 일반적인 유한 요소법에서 사용하는 연속 갤러킨(continuous Galerkin method) 기법과 달리 불연속 갤러킨 기법은 편미분 형태의 지배방정식의 weak form을 만족하는 근사해가 각 요소마다 불연속적으로 분포함을 가정한다. 그러므로 Godunov계열의 유한체적법에서와 같이 요소 경계면에서 두 유동값을 가지게 되므로, 유일한 유속을 결정하기 위해 수치 유속 함수를 사용한다. 불연속 갤러킨 기법에서는 근사해가 각 요소마다 불연속적으로 분포하게 되어 이산화에 필요한 스텐실은 수치 유속 함수 계산에 필요한 주위 요소로만 국한된다. 이러한 국부성(locality) 또는 집적성(compactness)은 정확도 차수에 무관하게 유지된다. 국부성을 가지는 불연속 갤러킨 기법은 유동 해석 코드의 병렬화가 매우 용이하고, 격자 질의 저하에 따른 정확도 저하가 적다. 그리고 hanging node가 이산화에 영향을 미치지 않아 격자 적응(h-refinement)이 매우 용이한 특성을 가지며, 자연스럽게 고차 정확도로의 확장이 가능하여 p-refinement를 적용할 수 있다. 또한 불연속 갤러킨 기법에서의 경계조건은 수치 유속을 통해 간접적으로 적용되므로 자연스럽게 고차의 정확도로 경계조건을 부과할 수 있다.

불연속 갤러킨 기법의 개발 초기 단계에서는 불연속 갤러킨 기법을 이용하여 공간 차분화를 하고 시간 적분은 외재적 TVD Runge-Kutta 방법을 이용하는 RKDG(Runge-Kutta Discontinuous Galerkin) 기법이 주로 개발되었으며[7], 시간 스케일이 작은 비정상 문제에 대해 널리 적용되어 왔다. 그러나 외재적 시간 적분법에서의 시간 간격 한계는 기법의 공간 정

확도가 증가함에 따라 더욱더 극심해진다. 그러므로 정상해석이나 시간 스케일이 매우 큰 비정상 문제에 대해서는 높은 시간 간격을 허용할 수 있는 내재적 시간 적분법이 요구된다. 본 연구에서는 잔류항의 선형화를 통해 선형 시스템을 구축하는 Newton계열의 내재적 시간 적분법을 적용하여 보다 효율적으로 수렴된 정상해를 얻고자 한다.

통상적으로 사용되는 이차정확도의 유한차분법 및 유한체적법에서는 곡면의 물체 경계를 선형으로 근사화 하여 격자계를 구성한다. 그러나 불연속 갤러킨 기법을 포함하는 고차의 유한요소법에서 곡면의 물체 경계를 선형으로 근사화하게 되면 이산화 기법이 가지는 고차 정확도가 저해될 수 있다. 그러므로 곡면의 물체 경계를 포함하는 문제에 대해 고차 정확도의 유동해를 얻기 위해서는 물체 곡면을 선형 이상의 고차 다항식으로 근사하여야 한다. 본 연구에서는 초음속 와류 유동 문제, 이차원 실린더 및 익형 주위의 유동을 해석함에 있어 곡면의 물체 경계를 고차의 다항식으로 근사해야만 고차의 정확도를 얻을 수 있음을 보인다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서는 본 연구에서 해석하고자 하는 지배방정식과 이를 해석하기 위한 수치기법에 대해 정리하였다. 이는 공간 이산화를 위한 불연속 갤러킨 기법과 시간 이산화를 위한 내재적 시간 적분법, 삼각형 유한 요소에 대한 기준 요소 및 계층적 기저함수, 그리고 기준 요소로부터 물리적 유한 요소로의 사상과 수치 적분에 대한 내용을 포함한다. 3장에서는 개발된 내재적 불연속 갤러킨 기법을 이용한 유동 해석 결과를 제시한다. 수치 계산은 엄밀해가 존재하는 Ringleb 유동과 초음속 와류 유동, 그리고 엄밀해가 존재하지 않는 원형 실린더 및 익형 주위의 유동에 대해 수행하였다. 마지막으로 4장에는 결론을 기술한다.

2. 지배방정식 및 수치기법

본 연구에서 사용되는 이산화 기법은 공간 이산화와 시간 이산화를 독립적으로 수행하는 method of lines에 기초하고 있다. 공간 이산화는 불연속 갤러킨 기법을 이용하여 수행하고, 이후 생성되는 상미분 방정식은 후방 시간 차분에 근거한 내재적 시간 적분법으로 이산화하는 방법을 택하였다.

2.1 지배 방정식

본 연구에서 해석하고자 하는 이차원 압축성 Euler 방정식을 공간영역 Ω 와 시간 영역 $(0, T)$ 에 대해 미분 형태로 나타내면 다음과 같다.

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U}(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot \vec{\mathbf{F}} = 0 \quad (1)$$

여기서 보존 유동 변수 U 와 비점성 유속 $\vec{F} = \{F_1, F_2\}$ 은 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} U &= (\rho \quad \rho u_i \quad E)^T \\ F_j &= (\rho u_j \quad \rho u_i u_j + p \delta_{ij} \quad u_j (E + p))^T \end{aligned} \quad (2)$$

여기서 ρ , p , E 는 밀도, 압력, 전 에너지를, u_1 , u_2 는 직교 좌표계의 각 방향 속도 성분을 나타내고, 유속항의 δ_{ij} 는 kronecker delta를 의미한다. 주어진 지배 방정식은 다음의 이상 기체 상태 방정식을 포함함으로써 닫힌계가 된다.

$$p = (\gamma - 1) \left(E - \frac{1}{2} \rho u_i u_i \right) \quad (3)$$

여기서 γ 는 비열비를 나타내고 공기의 경우 1.4의 값을 가진다.

2.2 불연속 갤러킨 기법

불연속 갤러킨 기법에 사용되는 유한 요소와 그 공간은 다음과 같이 정의된다. 주어진 공간 영역 Ω 는 중복되지 않는 유한 요소 K 들의 분할(tessellation) T_h 로 근사된다. 물리적인 영역(physical domain)에서의 각 요소 K 는 표준 영역(reference domain)에서의 기준 요소(reference element) \hat{K} 로부터 사상된다. 표준 영역의 기준 요소는 $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ 좌표에서 정의되며, ξ 좌표로부터 물리적 영역의 $x = (x_1, x_2)$ 좌표로의 전단사(bijective) 사상 F_K 는 다음과 같이 표현된다.

$$F_K : x = F_K(\xi) \quad (4)$$

유한 요소 공간을 정의하기 위한 기준 요소 \hat{K} 상에서의 k 차 다항식 공간은 다음과 같이 기저함수를 생성원으로 한다.

$$P^k(\hat{K}) = span\{\hat{\phi}_j, j = 1, \dots, N_{dof}\} \quad (5)$$

물리적인 유한 요소 K 에서의 함수공간 $P^k(K)$ 는 기준 요소에서 정의된 다항식 공간 $P^k(\hat{K})$ 의 F_K^{-1} 에 의한 사상 공간이다.

$$P^k(K) = span\{\phi_j = \hat{\phi}_j \circ F_K^{-1}, j = 1, \dots, N_{dof}\} \quad (6)$$

이를 이용하여 각 유동 변수를 근사하기 위한 유한 요소 공간 V_h^k 는 유한 요소 K 이내에서만 정의되는 $P^k(K)$ 의 벡터 형태로 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} V_h^k &= \{ v \in [L_2(\Omega)]^4; \\ & \quad v|_K \in (p_1, p_2, p_3, p_4)^T, p_i \in P^k(K) \} \end{aligned} \quad (7)$$

불연속 갤러킨 기법에서의 유동 변수 벡터 $U(x, t)$ 는 다항식의 전개 형태인 $U_h(x, t) \in V_h^k \otimes C^1[0, T]$ 로 근사된다.

$$U_h(x, t) = \sum_{p=1}^{N_{dof}} \hat{U}_p(K, t) \phi_p(x) \quad (8)$$

여기서 N_{dof} 는 근사해 U_h 를 결정하기 위해 필요한 자유도(DOF, Degree Of Freedom)이고, 삼각형 요소에서 다항식 공간의 차수 k 에 따라 $N_{dof} = (k+1)(k+2)/2$ 로 결정된다. \hat{U}_p 는 다항식의 전개 형태인 근사해를 결정하기 위한 계수이다.

식 (8)에서 정의되는 근사해의 계수 \hat{U}_p 를 결정하기 위해 지배방정식인 식 (1)에 가중함수 $W_h \in V_h^k(K)$ 를 곱하고 유한 요소 K 에 대해 적분하는 weak formulation을 사용한다. 적분항 중 공간항에 대해 Green 정리를 적용하고 엄밀해 U 를 근사해 U_h 로 대체한다. 그리고 요소 경계면에서의 유속을 수치 유속 함수인 Roe의 유속 함수 H [13]로 대체하면 다음과 같은 문제로 귀착된다.

$$\begin{aligned} & \text{Find } U_h \in V_h^k \otimes C^1[0, T], \text{ such that} \\ & \frac{\partial}{\partial t} \int_K W_h^T U_h d\Omega \\ & = - \int_{\partial K} W_h^T (H(U_h^-, U_h^+, n)) dS \\ & \quad + \int_K \nabla W_h^T \cdot \vec{F}(U_h^-) d\Omega \\ & \quad , \quad \forall W_h \in V_h^k \end{aligned} \quad (9)$$

여기서 $n = \{n_1, n_2\}$ 는 요소 경계면 외부로 향하는 단위 수직 벡터이고, U_h^-, U_h^+ 는 각각 요소 경계면에서 요소 내부와 외부로부터의 trace를 의미한다.

식 (9)에서 근사해 U_h 와 가중함수 W_h 를 식 (8)로 대체하여 정리하면 불연속 갤러킨 기법에 의한 공간 이산화가 완료되며, 이는 연립 상미분 방정식 형태로 나타난다. 이를 인덱스 표기법으로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \int_K \phi_p \phi_q d\Omega \delta_{ij} \frac{d}{dt} \widehat{U}_{jq} \\ &= - \int_{\partial K} \phi_p H_i(\mathbf{U}_h^-, \mathbf{U}_h^+, \mathbf{n}) dS \\ & \quad + \int_K \nabla \phi_p \cdot \vec{F}_i d\Omega \end{aligned} \quad (10)$$

여기서 $i, j = \{1, \dots, 4\}$ 는 네 개의 Euler 방정식 또는 유동 변수들을 지칭하는 인덱스이고, $p, q = \{1, \dots, N_{dof}\}$ 는 식 (8)에 나타나 있는 다항식 전개 계수 또는 기저함수의 인덱스이다. 위 식에서 근사해가 0차 다항식인 경우, 자유도의 개수는 하나이고 그에 대한 기저함수는 1이 되어 일차 정확도의 Godunov 유한체적법과 정확하게 일치한다. 이는 불연속 갤러킨 기법이 Godunov 기법에 대한 고차정확도로의 자연스러운 확장임을 의미한다. 주어진 영역 Ω 의 경계조건 \mathbf{U}_h^b 는 수치유속에서 $H_i(\mathbf{U}_h^-, \mathbf{U}_h^+)$ 의 형태로 부과된다. 식 (10)을 T_h 상의 모든 유한 요소에 대해 나타내면 다음과 같이 벡터형태로 표현된다.

$$\mathbf{M} \frac{d\widehat{\mathbf{U}}}{dt} = \mathbf{R}(\widehat{\mathbf{U}}) \quad (11)$$

위 식에서 질량 행렬 \mathbf{M} 은 식 (10)의 첫째항의 적분항을 나타내는 block-diagonal 형태이고 잔류 벡터 \mathbf{R} 은 식 (10)의 우변항을 의미한다.

2.3 내재적 시간 적분법

불연속 갤러킨 기법으로 공간 이산화된 상미분 방정식 식 (10)은 하나의 유한 요소 K 에 대해 다음과 같이 간략히 표현될 수 있다.

$$m_{pq} \delta_{ij} \frac{d\widehat{U}_{jq}^-}{dt} = R_{ip}(\mathbf{U}_h^-, \mathbf{U}_h^+) \quad (12)$$

여기서 $-$ 는 K 요소에서의 값을 의미하고, $+$ 는 K 요소와 이웃한 요소들의 값을 의미한다. m_{pq} 는 질량행렬이며, 잔류항 R_{ip} 는 면적분항 S_{ip} 와 체적분항 V_{ip} 의 합을 의미하고 각각의 요소는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} m_{pq} &= \int_K \phi_p^- \phi_q^- d\Omega \\ R_{ip} &= S_{ip} + V_{ip} \\ S_{ip} &= - \int_{\partial K} \phi_p^- H_i(\mathbf{U}_h^-, \mathbf{U}_h^+, \mathbf{n}) dS \\ V_{ip} &= \int_K \nabla \phi_p^- \cdot \vec{F}_i d\Omega \end{aligned} \quad (13)$$

본 연구에서는 식 (12)을 $n+1$ 시간단계에서 풀이하는 완전 내재적 방법(fully implicit method)을 적용하였다. 좌변의 시간항을 Euler 후방차분하면 다음과 같다.

$$m_{pq} \delta_{ij} \frac{\widehat{U}_{jq}^-|^{n+1} - \widehat{U}_{jq}^-|^n}{\Delta t} = R_{ip}^{n+1}(\mathbf{U}_h^-, \mathbf{U}_h^+) \quad (14)$$

우변 잔류항은 구하고자 하는 $n+1$ 에서의 값으로서 Newton 방법과 같이 선형화를 통해 이미 알고 있는 n 단계의 값으로 다음과 같이 근사화될 수 있다.

$$\begin{aligned} & R_{ip}^{n+1}(\mathbf{U}_h^-, \mathbf{U}_h^+) \\ & \approx R_{ip}^n + \left. \frac{\partial R_{ip}}{\partial \widehat{U}_{jq}^-} \right|^n \Delta \widehat{U}_{jq}^- + \left. \frac{\partial R_{ip}}{\partial \widehat{U}_{jq}^+} \right|^n \Delta \widehat{U}_{jq}^+ \end{aligned} \quad (15)$$

여기서 $\Delta \widehat{U}_{ip}^-$ 는 $\widehat{U}_{ip}^{n+1} - \widehat{U}_{ip}^n$ 을 의미하고 잔류항에 대한 유동변수 근사해 계수의 자코비안(jacobian)은 식 (13)으로부터 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial R_{ip}}{\partial \widehat{U}_{jq}^-} \right|^n &= - \int_{\partial K} \phi_p^- \phi_q^- \frac{\partial H_i}{\partial U_j^-} dS \\ & \quad + \int_K \phi_q^- \left(\frac{\partial \phi_p^-}{\partial x_1} \frac{\partial F_{1i}}{\partial U_j^-} + \frac{\partial \phi_p^-}{\partial x_2} \frac{\partial F_{2i}}{\partial U_j^-} \right) d\Omega \\ \left. \frac{\partial R_{ip}}{\partial \widehat{U}_{jq}^+} \right|^n &= - \int_{\partial K} \phi_p^- \phi_q^+ \frac{\partial H_i}{\partial U_j^+} dS \end{aligned} \quad (16)$$

여기서 $\partial H_i / \partial U_j$ 는 Roe의 수치유속 자코비안이고, F_{1i} / U_j 와 F_{2i} / U_j 는 각각 x_1 과 x_2 방향의 비점성(Euler) 유속 자코비안이다.

식 (15)를 식 (14)에 대입하여 정리하면,

$$\left(\frac{m_{pq} \delta_{ij}}{\Delta t} - \left. \frac{\partial R_{ip}}{\partial \widehat{U}_{jq}^-} \right|^n \right) \Delta \widehat{U}_{jq}^- - \left. \frac{\partial R_{ip}}{\partial \widehat{U}_{jq}^+} \right|^n \Delta \widehat{U}_{jq}^+ = R_{ip}^n \quad (17)$$

이다. 식 (17)을 T_h 상의 모든 유한 요소에 대해 나타내면 다음과 같이 선형 시스템이 구축된다.

$$\mathbf{A} \Delta \mathbf{U} = \mathbf{b} \quad (18)$$

식 (18)의 행렬 \mathbf{A} 는 매우 성긴 block 행렬로서 한 개의 삼각형 요소에 대해 대각(diagonal) block 한 개와 세 개의 비대각(off-diagonal) block으로 구성되며, 하나의 block은 $ndim$ 이

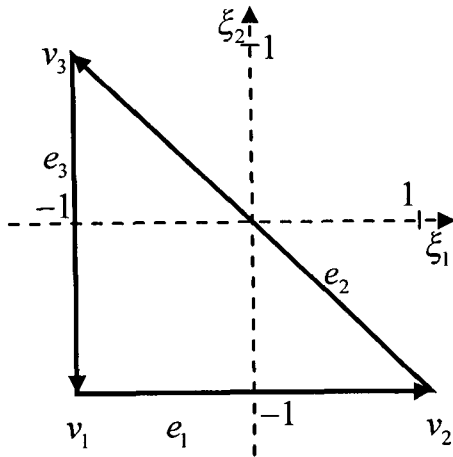


Fig. 1 Triangular reference element \hat{K}

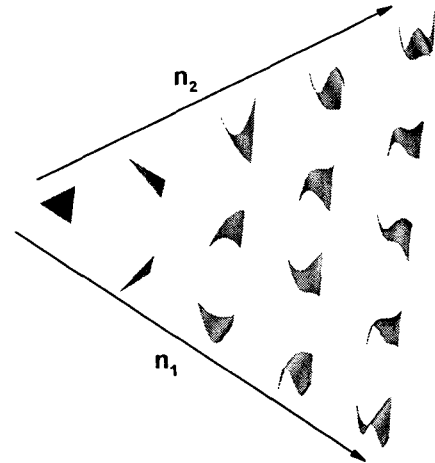


Fig. 2 Hierarchical basis functions for $k=4, N_{dof} = 15$.

공간차원 수이고 N_{dof} 가 근사해 U_h 를 표현하는 자유도의 개수일 때, $[(ndim + 2) \times (N_{dof})]$ 의 행 및 열의 길이를 가진다. 이와 같이 구성된 선형 시스템은 간단한 자코비 반복법으로부터 풀이되었다.

2.4 기준 요소(reference element) 및 계층적 기저 함수

본 연구에서의 비정렬 격자계는 삼각형 유한 요소로만 구성된다. 물리적 영역에서의 삼각형 유한 요소는 식 (4)의 사상에 의해 표준 영역의 기준 요소 상(image)이 된다. 기준 요소는 Fig. 1과 같이 (ξ_1, ξ_2) 좌표계에서 정의되고 그 영역은 다음과 같다.

$$\hat{K} = \{ \xi \in R^2; -1 \leq \xi_1, \xi_2; \xi_1 + \xi_2 \leq 0 \} \quad (19)$$

불연속 갤러킨 기법에서의 근사해는 식 (8)에서와 같이 기저함수의 선형 결합으로 표현된다. 기법의 공간 정확도는 기저함수의 선택과 무관하게 기저함수가 이루는 다항식 공간 $P^k(\hat{K})$ 의 차수에 따라 결정된다. 충분히 부드러운 해를 가지는 유동 조건에 대해, $P^k(\hat{K})$ 에 대한 기저함수를 사용하였을 때의 공간 정확도는 이론적으로 $k+1$ 이 된다[10]. 그러나 기저함수의 선택에 따라 질량 행렬의 condition 수가 달라져 수치적인 불안정성이 유발될 수 있으며, 프로그래밍 상의 복잡성이 달라진다. 일반적인 연속 갤러킨 기법에서는 각 노드점에서의 값은 1이 되고 다른 노드에서의 값을 0이 되는 Lagrange 다항식이 주로 기저함수로 사용된다. 그러나 다항식의 차수가 증가함에 따라 Lagrange 다항식은 급격히 질량 행렬의 condition 수가 증가하게 되어 수치 불안정성이 커진다[14]. 본 연구에서는 질량 행렬의 condition 수가 상대적으로 적게 증가하고, p-refinement가 용이한 계층적 기저함수를 사

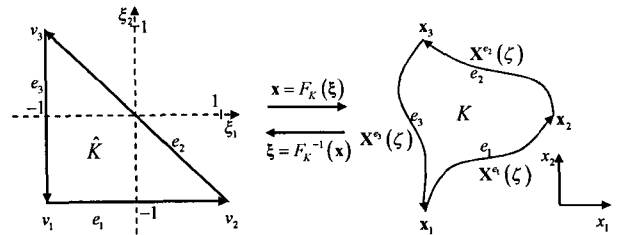


Fig. 3 Triangular element mapping onto the reference element.

용하였다. 본 연구에서는 삼각형 유한 요소만을 사용하였으며, 표준 요소 상에서 다음과 같이 Legendre 다항식의 곱으로 표현되는 계층적 기저함수[15]를 사용하였다.

$$\begin{aligned} \phi_p &= \phi_{n_1, n_2}(\xi_1, \xi_2) \\ &= L_{n_1}(\lambda_3 - \lambda_2) L_{n_2}(\lambda_2 - \lambda_1) \\ &0 \leq n_1, n_2; n_1 + n_2 \leq k \end{aligned} \quad (20)$$

여기서 $L(x)$ 는 Legendre 다항식을 의미하고, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 은 Fig. 1의 삼각형 기준 요소에서 정의되는 affine 좌표로 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} \lambda_1(\xi_1, \xi_2) &= \frac{(1 + \xi_2)}{2} \\ \lambda_2(\xi_1, \xi_2) &= -\frac{(\xi_1 + \xi_2)}{2} \\ \lambda_3(\xi_1, \xi_2) &= \frac{(1 + \xi_1)}{2} \end{aligned} \quad (21)$$

Fig. 2는 5차 다항식 공간 $P^5(\hat{K})$ 에 대한 식 (20)의 계층적 기저함수를 나타낸 것이다.

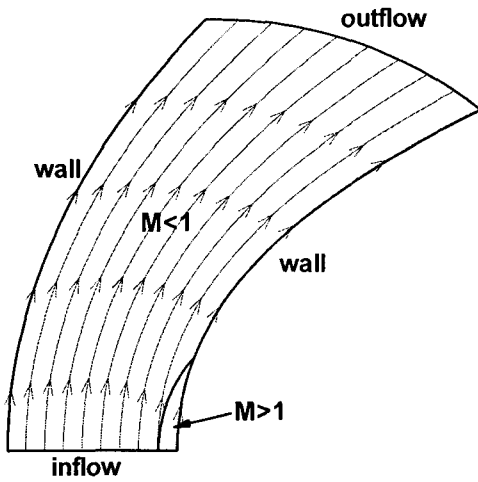


Fig. 4 Geometry for the Ringleb flow.

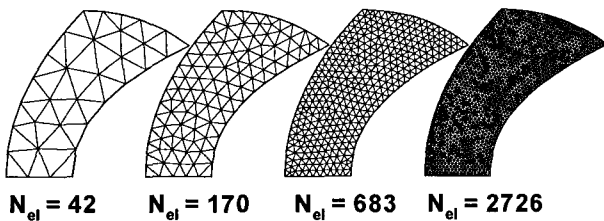


Fig. 5 Unstructured meshes for the Ringleb flow.

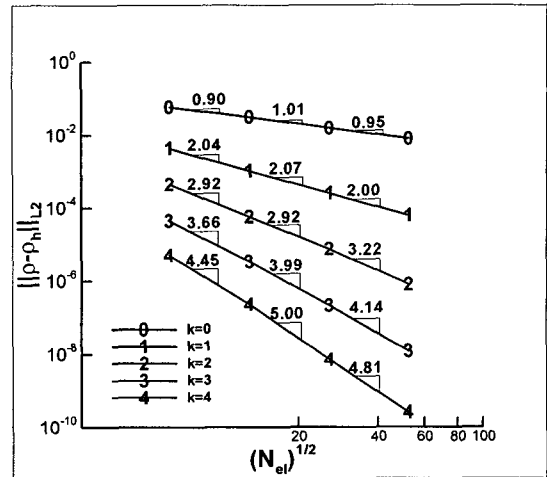
2.5 삼각형 유한 요소로의 사상 및 수치 적분

기준 요소로부터 직선의 모서리만을 가지는 삼각형 유한 요소로의 사상은 일차 다항식 형태인 식 (21)의 affine 좌표로 간단히 나타낼 수 있다.

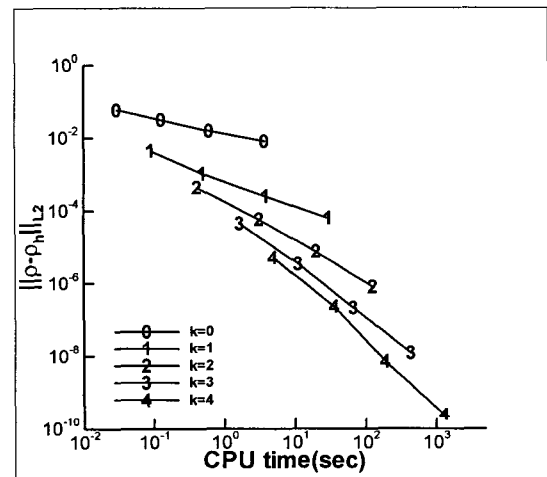
$$x = F_K(\xi) = \lambda_2 x_1 + \lambda_3 x_2 + \lambda_1 x_3 \tag{22}$$

Fig. 3과 같이 삼각형 유한 요소의 모서리가 곡선인 경우 곡선을 높은 차수의 다항식으로 근사하는 매개 사상 (parametric mapping)이 필요하며, 이에 대한 내용은 참고문헌 [15]에 자세히 기술되어 있다.

불연속 갤러킨 기법을 이용하여 이산화된 방정식 식 (10)은 적분항들로 표현된다. 질량 행렬을 제외하고는 해석적으로 적분항의 값을 구할 수 없으므로, 유한 요소법에서 널리 사용되는 Gaussian quadrature rule을 이용하여 수치 적분한다. 유동 변수를 k 차 다항식으로 근사한 경우 $k+1$ 의 공간 정확도를 얻기 위해서는 면적분항은 $2k+1$ 차, 체적적분항은 $2k$ 차 다항식을 정확하게 적분할 수 있는 quadrature rule을 사용해야 한다[10]. 본 연구에서는 참고문헌[15]에 제공되어 있는 Gaussian quadrature rule을 사용하였다.



(a) Grid size vs. L2 error



(b) CPU time vs. L2 error

Fig. 6 Convergence of numerical solutions in density and required CPU times: Ringleb flow.

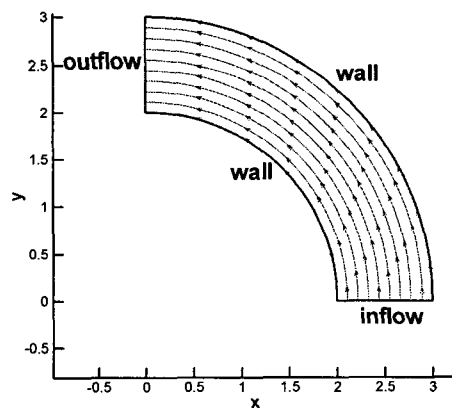


Fig. 7 Geometry for the supersonic vortex flow.

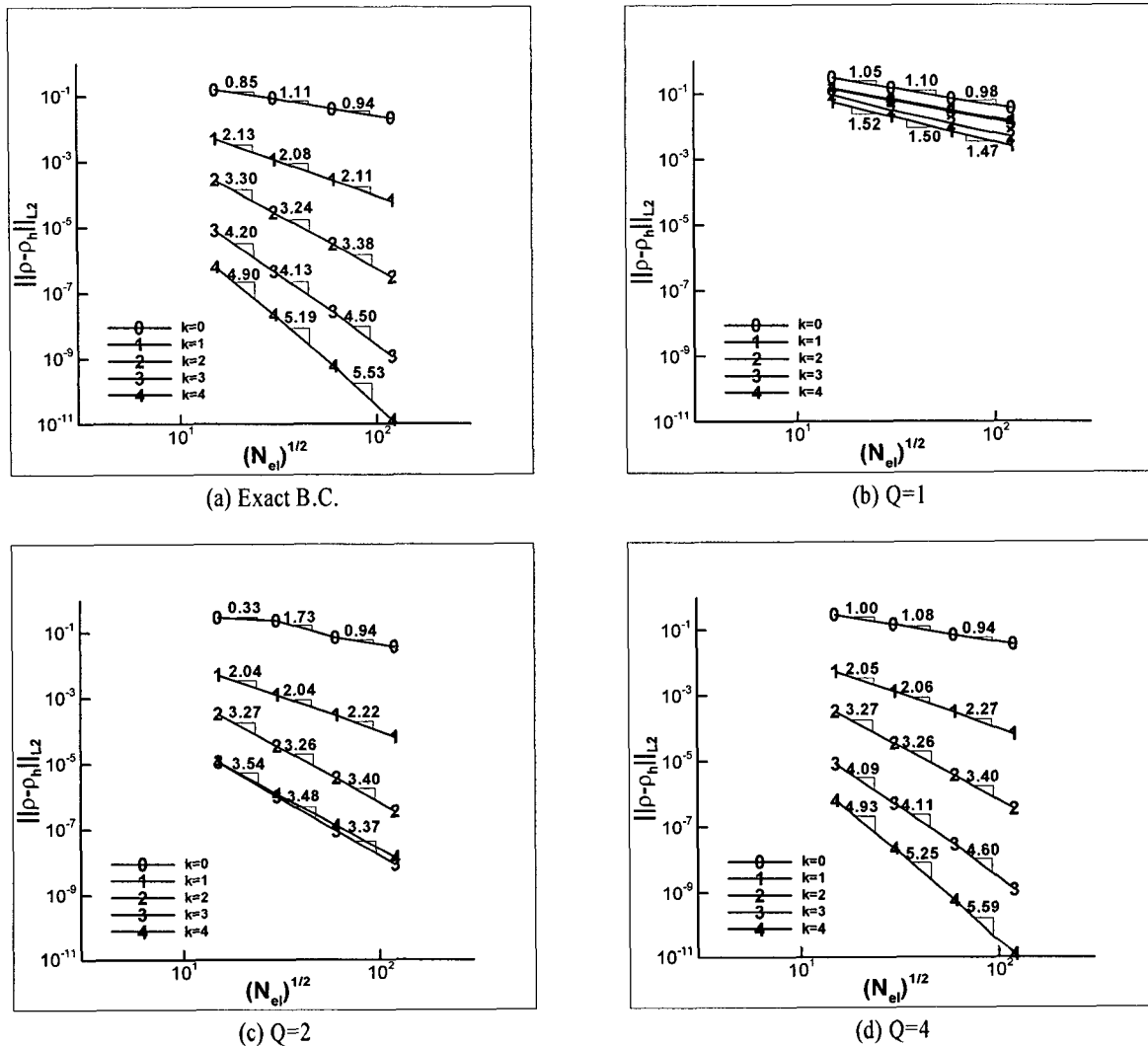


Fig. 8 Convergence of errors in density : supersonic vortex flow.

3. 수치 결과

3.1 Ringleb 유동

개발된 불연속 갤러킨 기법의 정확도를 측정하기 위해 hodograph 형태로 엄밀해가 존재하는 Ringleb 유동[16]에 대한 해석을 수행하였다. Ringleb 문제는 Fig. 4와 같이 채널속의 천음속 유동이다. 좌우 양쪽 벽면은 유선 함수 값이 일정한 유선이며, 위쪽의 배출 경계면은 속도의 크기가 일정한 등속 선이다. Ringleb 문제에 대한 형상과 엄밀해는 참고문헌[16]에 자세히 기술되어 있다.

Ringleb 유동의 형상은 곡선을 포함하고 있어 고차의 다항식을 이용한 근사화가 필요하나 본 연구에서는 모든 경계조건을 엄밀해로 정확히 주어 경계조건의 부정확성에 따른 오차를 제거하였다. 곡선 경계에 대한 정확도 측정은 다음 절의

초음속 와류 유동에서 자세히 논의한다.

정확도 측정을 위해 Fig. 5와 같이 42, 170, 683, 2726개의 삼각형 요소로 구성된 비정렬 격자계를 사용하였다.

Fig. 6의 (a)는 밀도에 대한 L2 norm 오차를 격자의 특성길이 $h \propto (N_{el})^{1/2}$ 에 대해 log-log plot으로 나타낸 것으로, 오차가 감소되는 기울기로서 공간에 대한 정확도를 측정할 수 있다. 충분히 부드러운 해를 가지는 유동의 경우 k 차 다항식의 근사해를 사용할 때 최적의 정확도는 $k+1$ 이 되며, 실제 수치 측정 결과 또한 $k+1$ 이 됨을 확인할 수 있다.

Fig. 6의 (b)는 L2 norm으로 계산된 오차를 CPU 시간에 대해 나타낸 것이다. 주어진 오차를 가지는 해를 얻기 위해, 고차 정확도를 기법을 사용하는 것이 보다 효율적임을 나타내고 있다. Ringleb 유동에 대한 정확도 측정을 통해 개발된 불연속 갤러킨 해석자를 검증하였고, 충분히 부드러운 해가 나

타나는 경우 고차 정확도 기법이 저차 정확도 기법에 비해 보다 효율적임을 확인하였다.

3.2 초음속 와류 유동

다음으로 Ringleb 유동과 같이 엄밀해가 존재하는 초음속 와류 유동[17]에 대한 정확도를 측정하였다. 계산된 초음속 와류 유동 문제의 형상은 Fig. 7과 같이 사분 동심원 형태로 내부 반경 r_1 과 외부 반경 r_2 는 각각 2와 3이다. 초음속 와류 유동은 비점성 가정하에 다음의 엄밀해를 가진다.

$$\rho = \rho_i \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M_i^2 \left(1 - \frac{r_i^2}{r^2} \right) \right]^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (23)$$

$$v_\theta \propto \frac{1}{r}$$

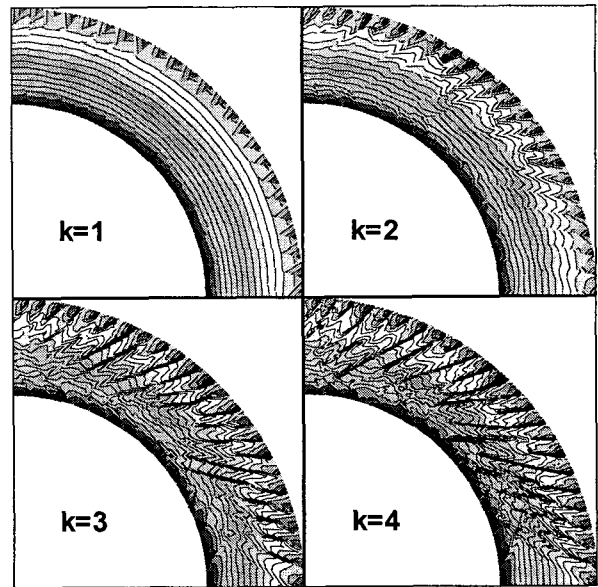
$$s = const$$

여기서 M_i 는 내부 반경에서의 마하수로 2.0이고, v_θ 는 원주방향의 속도, 그리고 s 는 엔트로피를 의미한다.

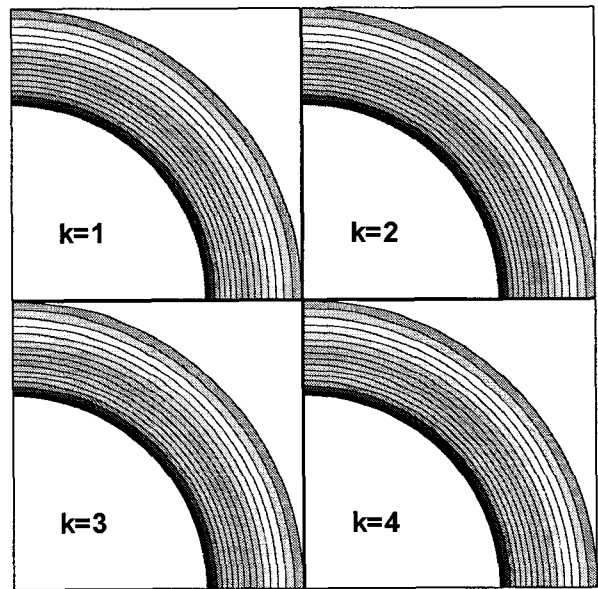
초음속 와류 유동에서는 참고문헌[18]에서와 유사하게 곡선 경계를 얼마나 높은 차수의 다항식으로 근사하는가에 따라 해의 정확도가 달라질 수 있음을 보이고자 한다. 계산은 각각 230, 908, 3628, 14513개의 삼각형 요소를 가지는 네 개의 격자계에 대해 수행되었다.

먼저 경계조건에 따른 오차를 제거하기 위해 모든 경계에서 엄밀해를 적용하고 밀도에 대해 정확도를 측정하였으며 이를 Fig. 8 (a)에 나타내었다. Ringleb 유동에서와 같이 최적의 정확도인 $k+1$ 정확도를 보이고 있음을 확인할 수 있다. 다음으로 곡선 물체 경계의 근사가 해의 정확도에 미치는 영향을 파악하였다. 이를 위해 유입경계에서는 엄밀해를, 배출경계에서는 외삽 경계조건을, 그리고 양쪽 측면의 원형 경계에서는 비점성 물체 경계조건인 미끄러짐 조건을 적용하여 물리적인 경계조건을 부과하였다. 물체 경계를 1차 다항식(Q=1), 2차 다항식(Q=2), 그리고 4차 다항식(Q=4)로 근사한 경우에 대한 오차의 수렴성을 Fig. 8 (b)-(d)에 나타내었다.

물체 경계를 선형 다항식(Q=1)로 근사한 경우는 k 가 높아짐에 따라 오차가 감소하지 않는다. $k=0$ 인 경우는 1차 정확도임을 보이나, $k=1$ 인 경우 최적의 정확도 보다 다소 낮은 1.8정도의 정확도를 보이며 그보다 k 가 높은 경우는 오히려 오차가 증가하게 된다. 이는 Fig. 9의 (a)에서도 밀도 등선도에서 확인할 수 있다. 선형으로 곡률을 가지는 물체 경계를 표현하는 경우 국부적으로 굴곡(kink)이 있는 형태가 되어 물체 표면으로부터 비물리적인 엔트로피의 증가가 발생하게 된다. k 가 증가함에 따라 이러한 오차가 물체 경계에서부터 유동 내부로 더욱더 극심하게 전파되어 전 영역에 대해 비물리



(a) Piecewise linear boundary approximation (Q=1)



(b) Piecewise quartic boundary approximation (Q=4)

Fig. 9 Density contours for the supersonic vortex flow : $N_{el} = 230$.

적인 해를 얻게 된다. 정확한 밀도의 분포는 Fig. 9의 (b)에서 확인할 수 있다.

이러한 물체 경계의 선형 근사화에 따른 오차 증가 문제는 물체 표면을 더욱더 높은 차수의 다항식으로 근사화함으로써 해결될 수 있다. Fig. 8의 (c)는 이차 다항식으로 물체 표면을 근사한 경우(Q=2)로 $k=3$ 인 경우까지 최적의 정확도를 보이나, $k=4$ 인 경우에는 정확도가 저하됨 나타내고 있다. Q=3인 경우는 Q=2와 거의 동일한 결과를 나타내어 그림을 제시

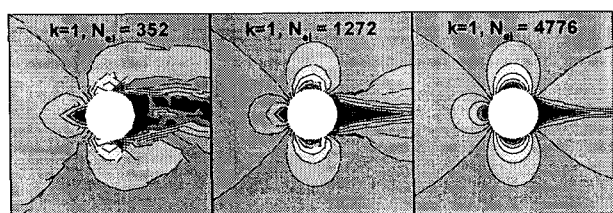
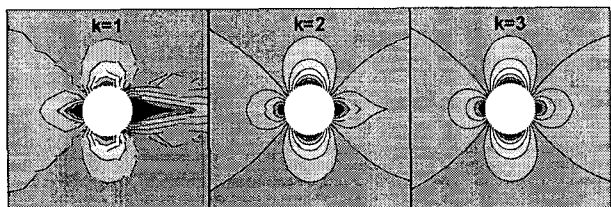
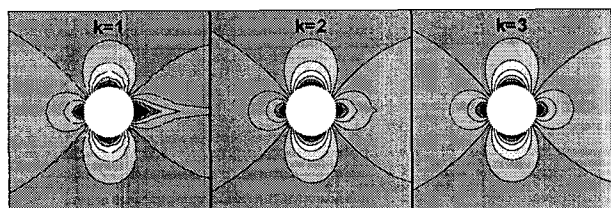


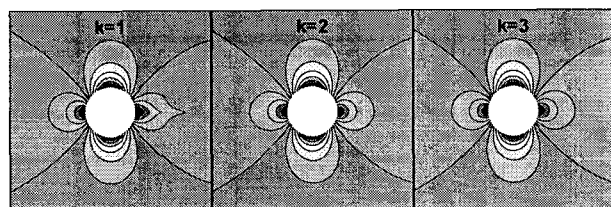
Fig. 10 Mach contours for flows around a circular cylinder ($Q=1$).



(a) $N_{el} = 352$



(b) $N_{el} = 1272$



(c) $N_{el} = 4776$

Fig. 11 Mach contours for flows around a circular cylinder ($Q=2$).

하지 않았다. Fig. 8의 (d)는 $Q=4$ 인 경우로서 곡률을 가지는 물체 표면에 의한 정확도 저하가 전혀 나타나지 않는다. 그러므로 사분 동심원 형태의 초음속 와류 유동 문제를 고차의 불연속 갤러킨 기법으로 해석하기 위해서는 4차 이상의 다항식으로 물체 표면을 근사해야 한다.

3.3 이차원 원형 실린더 주위 유동

개발된 고차 정확도 불연속 갤러킨 기법을 이용하여 이차원 원형 실린더 주위 유동을 해석하였다. 계산에 사용된 격자계는 352, 1272, 4776개의 삼각형 요소로 구성되며, 물체 표면에 존재하는 요소의 수는 각각 12, 24, 44개이다.

계산은 자유류 마하수는 0.3, 받음각 0도에 대해 수행하였다. 비점성 가정하의 원형 실린더 주위 유동은 주어진 유동

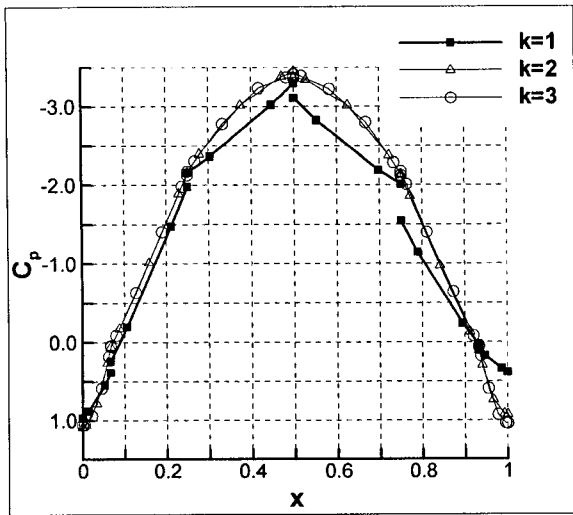
조건과 같이 아음속의 자유류에 대해 상하뿐만 아니라 좌우가 대칭인 형태를 나타낸다. 그러나 일반적인 이차 정확도 기법에 의한 계산 결과는 수치 기법의 오차와 경계의 선형화에 따른 오차로 인해 좌우 대칭의 형태를 얻기 힘들다.

Fig. 10은 물체 경계를 선형 다항식($Q=1$)으로 근사하고 근사해의 다항식 차수가 $k=1$ 인 경우에 대한 마하 등선도를 나타내고 있다. 초음속 와류 유동에서와 같이 물체의 경계를 국부적으로 선형이라 가정하게 되면 엔트로피가 발생하게 되어 원형 실린더 후방에 비물리적인 후류가 발생함을 보이고 있다. 특히 삼각형 요소를 352개 가지는 매우 성긴 격자계에서는 후류의 비정상적인 거동으로 인해 수렴된 해조차 얻을 수 없었다.

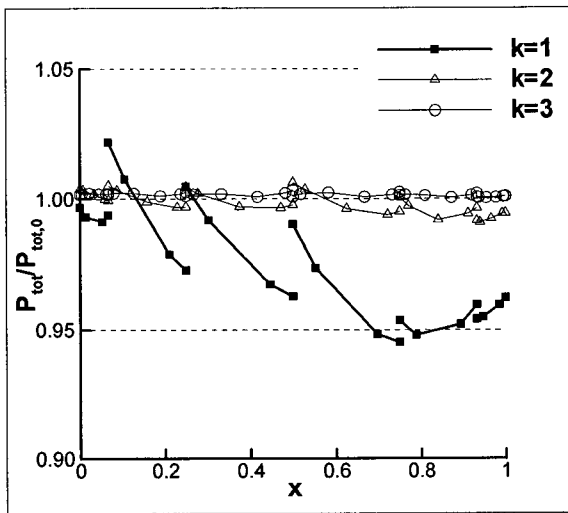
Fig. 11은 물체 경계를 이차 다항식($Q=2$)으로 근사한 경우에 대한 해석 결과이다. 이 경우에는 모든 격자계에서 충분히 수렴된 해를 얻을 수 있었다. 근사해의 다항식 차수가 높아지고 격자의 수가 증가함에 따라 점차 비물리적인 후류가 소멸되고 있으며, $k=3$ 인 경우에는 원형 실린더를 중심으로 좌우 대칭이 되는 이상적인 결과를 보이고 있다.

Fig. 12는 원형 실린더 윗면에서의 압력 계수와 전압력 분포를 나타내고 있다. 불연속 갤러킨 기법은 유동 변수가 각 요소마다 불연속적으로 분포되므로 하나의 요소와 다른 요소에서의 값이 불연속적으로 나타나 있다. Fig. 12의 (a)의 압력 계수 분포는 근사해의 차수 k 가 증가함에 따라 좌우 대칭이 됨을 확인할 수 있으며, 원형 실린더 뒷면 정체점에서 정체 압력을 회복하고 있다. 비점성 비압축성 유동의 경우 널리 알려진 바와 같이 원형 실린더 윗면에서는 이론적으로 -3의 압력 계수를 가지나 본 계산에서는 압축성 효과에 의해 -3보다 다소 낮은 압력값을 가진다. Fig. 11의 (b)는 자유류의 전압력에 대한 물체 표면에서의 전압력 비를 나타낸 것으로 k 가 증가함에 따라 물체 표면의 모든 영역에서 손실없이 1의 값을 유지함을 확인할 수 있다.

Fig. 13은 세 가지 격자계에 대해 근사해의 차수 k 에 따른 잔류항의 수렴곡선을 나타낸 것이다. 잔류항의 수렴 속도는 격자 요소의 수가 증가함에 따라 점차 늦어지나, 근사해의 차수 k 와는 무관함을 확인할 수 있다. 본 연구에서 사용한 내재적 불연속 기법은 2.3절 식 (17)의 좌변을 구성하고 있는 내재항(implicit part)과 우변을 구성하고 있는 외재항/잔류항(explicit part)이 동일한 정확도를 가지도록 구성되므로 동일한 격자계에서는 정확도와 무관한 수렴성(k -independent convergence)을 확보할 수 있다. 이에 반해 고차 공간정확도를 가지는 유한체적법에서의 내재적 기법은 스텝사이즈 증가함에 따라 내재항을 외재항의 정확도와 동일하게 구성하기가 곤란하다. 그러므로 대부분 내재항은 저차의 정확도로 구성하고 외재항은 고차의 정확도로 구성하는 defect-correction 방법을



(a) Pressure coefficient



(b) Total pressure

Fig. 12 Pressure coefficient and total pressure distributions around a circular cylinder ($N_{el} = 352$).

사용한다. 이러한 방법을 사용하는 유한체적법에서의 내재적 기법은 정확도가 증가함에 따라 잔류항의 수렴속도가 저하되는 특성을 보인다[19]. 격자요소의 수가 증가함에 따른 수렴성 저하는 다중격자기법(multigrid method)를 이용하여 함으로써 극복 가능하다[20].

3.4 NACA0012 익형 주위 유동

마지막으로 고차 정확도의 불연속 갤러킨 기법을 실제적인 익형 형상인 NACA0012 익형 주위 유동에 대해 적용하였다. 계산에 사용된 격자는 1208개의 삼각형 요소로 구성되며 익형 주위와 앞전 부근의 격자 분포를 Fig. 14에 나타내었다. 계산은 자유류 마하수 0.5, 받음각 0도에 대해 수행되었으며 물

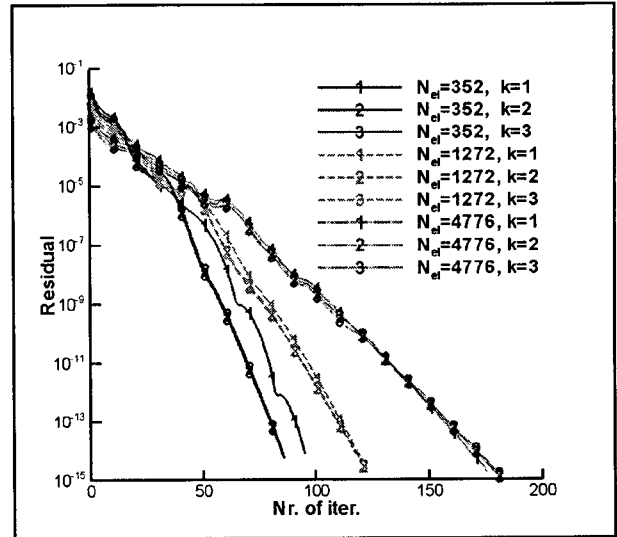


Fig. 13 Convergence histories for the circular cylinder flows.

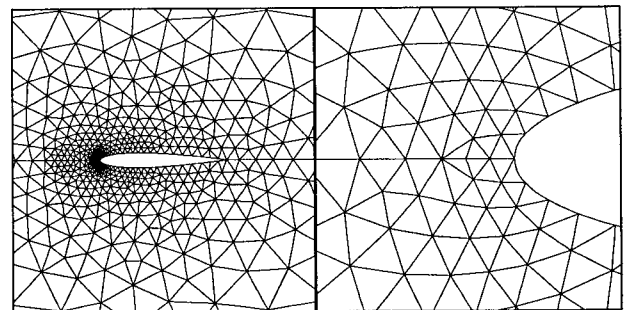


Fig. 14 Unstructured meshes around an NACA0012 airfoil.

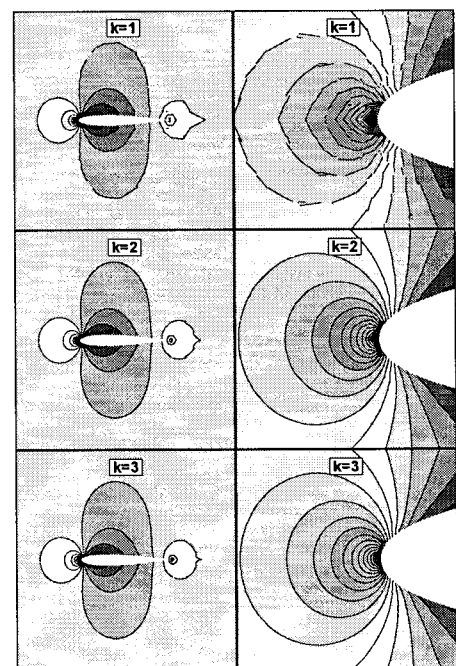
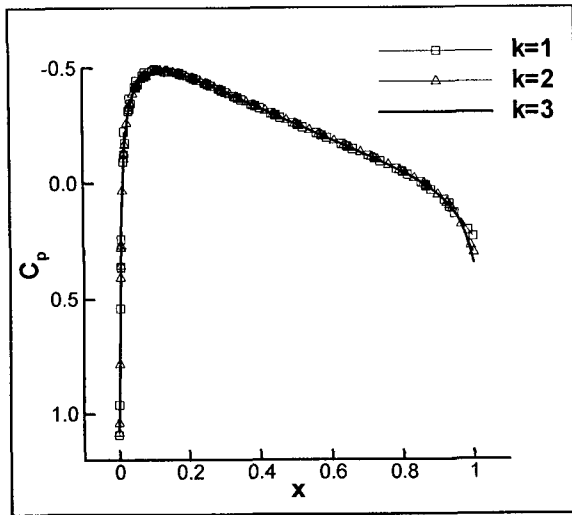
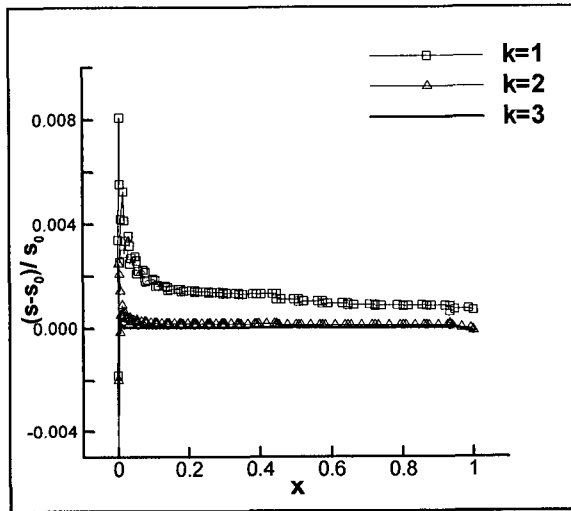


Fig. 15 Mach contours for flows around a NACA0012 airfoil.



(a) Pressure coefficient



(b) Amount of entropy increase

Fig. 16 Pressure coefficient and amount of entropy increase distributions around a NACA0012 airfoil.

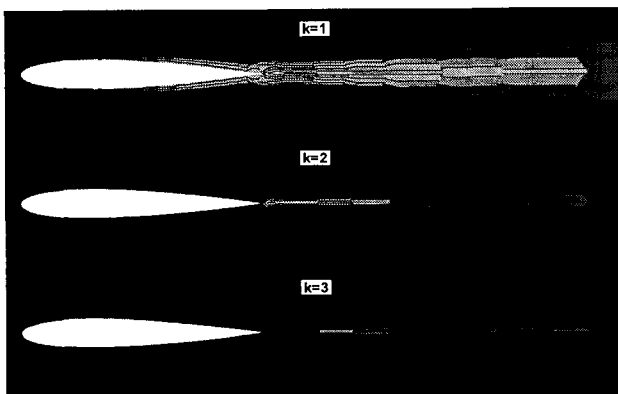


Fig. 17 Contour plots of entropy increase around a NACA0012 airfoil.

체의 표면은 이차 다항식으로 근사(Q=2)되었다.

Fig. 15는 근사해 차수 k 에 따른 익형 주위와 압전 부근에서의 마하수 분포를 나타내고 있다. k 가 증가함에 따라 더욱 높은 해상도를 보이며, 뒷전에서 생성되는 비물리적인 후류가 감소됨을 확인할 수 있다.

Fig. 16의 (a)는 익형 표면에서의 압력 계수를 나타내고 있다. 뒷전 영역을 제외하고는 정확도에 따른 압력 계수의 분포는 크게 다르지 않다. 그러나 물체 표면에서의 무차원화된 엔트로피 증가량은 Fig. 16의 (b)에 나타나 있는 바와 같이 k 가 높아짐에 따라 크게 감소하고 있다. $k=3$ 의 경우 익형의 앞전을 제외하고는 거의 엔트로피가 증가되지 않음을 확인할 수 있다.

Fig. 17은 무차원화된 엔트로피의 증가량에 대한 등선도를 나타낸 것으로 $k=1$ 인 경우 마치 경계층이 성장하듯이 엔트로피가 증가되는 영역이 성장하고 있으며, 엔트로피의 증가는 시위길이 한배 뒤의 후류까지에도 나타나고 있다. 이러한 엔트로피의 증가는 수치 오차에 의해 나타나는 것으로 k 가 높아질수록 비물리적인 엔트로피 증가가 뚜렷히 감소함을 확인할 수 있다.

4. 결론

본 연구에서는 비정렬 격자계에서 정상해석에 적합한 고차 공간 정확도의 내재적 불연속 갤러킨 기법을 개발하였다. 근사해를 표현하기 위한 기저함수는 p-refinement가 용이하고 행렬의 condition 수가 낮은 Legendre 다항식에 기초한 계층적 기저함수를 사용하였다.

개발된 고차 정확도 불연속 갤러킨 기법을 엄밀해가 존재하는 Ringleb 유동과 초음속 와류 유동에 대해 적용하여 기법의 정확도를 측정하였다. k 차 다항식의 근사해에 대해 엄밀해를 경계조건으로 적용하면 최적의 정확도인 $k+1$ 로 오차가 감소함을 확인하였다. 그러나 곡선의 물체 경계를 가지는 문제에 대해 물체 표면을 단순히 선형 다항식으로 근사하게 되면 경계의 국부적인 굴곡성으로 인해 비물리적인 해를 얻게됨을 확인하였으며, 이를 극복하기 위해서는 이차 이상의 다항식을 이용하여 곡선의 물체 경계를 근사해야함을 보였다.

엄밀해가 존재하지 않는 원형 실린더 주위의 유동과 NACA0012 익형 주위의 유동에 대해서는 기법의 정확도가 높아짐에 따라 물체 표면에서의 전압력의 손실 또는 엔트로피의 증가량이 급격히 감소함을 확인하였다.

본 연구를 통해 개발된 고차 정확도 내재적 불연속 갤러킨 기법은 곡선 물체 경계를 가지는 비점성 압축성 정상 유동에 대해 비정렬 격자계에서 효율적으로 고해상도 수치해를 얻을 수 있음을 확인하였다.

후기

본 연구는 산업자원부 한국형헬기 민군겸용구성품개발사업 (KARI주관) 위탁연구결과 중 일부임을 밝히며, 지원에 감사드립니다.

참고문헌

- [1] 1979, van Leer, B., "Towards the Ultimate Conservation Difference Scheme V, A Second-Order Sequel to Gudunov's Method," *Journal of Computational Physics*, Vol.32, pp.101-136.
- [2] 1984, Harten, A., "On a Class of High Resolution Total-Variation-Stable Finite-Difference Schemes," *SIAM Journal of Numerical Analysis*, Vol.21, pp.1-23.
- [3] 1987, Harten, A. and Osher, S., "Uniformly High-Order Accurate Nonoscillatory Schemes- I," *SIAM Journal of Numerical Analysis*, Vol.24, No.2, pp.279-309.
- [4] 1994, Liu, X.D., Osher, S., and Chan, T., "Weighted Essentially Non-oscillatory Schemes," *Journal of Computational Physics*, Vol.115, pp.200-212.
- [5] 1990, Barth, T.J., "Higher Order Solution of the Euler Equations on Unstructured Grids Using Quadratic Reconstruction," *AIAA Paper 90-0013*.
- [6] 2004, Wang, Z.J., Zhang, L., and Liu, Y., "Spectral (Finite) Volume Method for Conservation Laws on Unstructured Grids IV: Extension to Two-Dimensional Systems," *Journal of Computational Physics*, Vol.194, pp.716-741.
- [7] 2001, Cockburn, B. and Shu, C.W., "Runge-Kutta Discontinuous Galerkin Methods for Convection-Dominated Problems," *Journal of Scientific Computing*, Vol.16, No.3, pp.173-261.
- [8] 2000, Cockburn, B., Karniadakis, G.E., and Shu C. W.(Eds.), "Discontinuous Galerkin Methods Theory, Computation and Applications," *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, Vol.11, Springer, Berlin.
- [9] 1973, Reed, W.H. and Hill, T.R., "Triangular Mesh Methods for the Neutron Transport Equation," *Los Alamos Scientific Laboratory Report LA-UR-73-479*.
- [10] 1998, Cockburn, B. and Shu, C.W., "The Runge-Kutta Discontinuous Galerkin Finite Element Method for Conservation Laws V: Multidimensional Systems," *Journal of Computational Physics*, Vol.141, pp.199-224.
- [11] 1997, Bassi, F. and Rebay, S., "A High-Order Accurate Discontinuous Finite Element Method for the Numerical Solution of the Compressible Navier-Stokes Equations," *Journal of Computational Physics*, Vol.131, pp.267-279.
- [12] 2005, Bassi, F., Crivellini, A., Rebay, S., and Savini, M., "Discontinuous Galerkin Solution of the Reynolds-Averaged Navier-Stokes and k-w Turbulence Model Equations," *Computers and Fluids*, Vol.34, pp.507-540.
- [13] 1981, Roe, P.L., "Approximate Riemann Solvers, Parametric Vectors, and Difference Schemes," *Journal of Computational Physics*, Vol.43, pp.357-372.
- [14] 2004, Karniadakis, G.E. and Sherwin, S.J., "Spectral/hp Element Methods for Computational Fluid Dynamics," *2nd Edition, Oxford University Press*.
- [15] 2004, Solin, P., Segeth, K., and Dolezel, I., "Higher-Order Finite Element Methods," *CHAPMANN & HALL/CRC Press*.
- [16] 1985, Chiochia, G. "Exact Solutions to Transonic and Supersonic Flows," *Technical Report AR-211, AGARD*.
- [17] 1997, Ollivier-Gooch, C.F., "High-Order ENO Schemes for Unstructured Meshes Based on Least-Squares Reconstruction," *AIAA Paper 97-0540*.
- [18] 1997, Bassi, F. and Rebay, S., "High-Order Accurate Discontinuous Finite Element Solution of the 2D Euler Equations," *Journal of Computational Physics*, Vol.138, pp.251-385.
- [19] 2007, Kim, J.S. and Kwon O.J., "An Efficient and Robust Implicit Operator for Upwind Point Gauss - Seidel Method," *Journal of Computational Physics*, Vol.224, pp.1124-1144.
- [20] 2006, Nastase, C.R. and Mavriplis, D.J., "High-order Discontinuous Galerkin Methods Using an hp-multigrid Approach", *Journal of Computational Physics*, Vol.213, pp.330-357.