

## 비선형 단순 모델을 이용한 차량 안정성 해석

고 영 은<sup>1)</sup> · 송 철 기<sup>\*2)</sup>

현대자동차<sup>1)</sup> · 경상대학교 기계항공공학부, 공학연구원<sup>2)</sup>

### Vehicle Stability Analysis using a Non-linear Simplified Model

Young Eun Ko<sup>1)</sup> · Chul Ki Song<sup>\*2)</sup>

<sup>1)</sup>Advanced Development Center, Hyundai Motor Company, 772-1 Jangdeok-dong, Hwaseong-si, Gyeonggi 445-850, Korea

<sup>2)</sup>School of Mechanical and Aerospace Engineering, ERI, Gyeongsang National University, Gyeongnam 660-701, Korea

(Received 2 August 2007 / Accepted 26 October 2007)

**Abstract** : Vehicle stability is a very important subject in vehicle design and control, because vehicle safety is closely dependent upon its dynamic stability. For the vehicle stability analysis, the nonlinear vehicle model of a mid-size car with three DOF - longitudinal, lateral and yaw - is employed. A rigorous method is used to determine the vehicle stability region in plane motion. An algorithm is used to materialize a topology theorem, which enables to find the exact stability region. A stability criterion for the critical cornering is proposed.

**Key words** : Vehicle stability analysis(차량안정적 해석), Stability region(안전성 영역), Vehicle modeling(차량 모델링), Nonlinear system(비선형 시스템), MSC.ADAM(아담스)

#### Nomenclature

- $a$  : the distance from the front axle to C.G., m
- $b$  : the distance from the rear axle to C.G., m
- $u$  : the longitudinal velocity of vehicle, m/s
- $v$  : the lateral velocity of vehicle, m/s
- $r$  : the yaw rate of vehicle, rad/s
- $F_{sF}$  : the side force of the front tire, N
- $F_{sR}$  : the side force of the rear tire, N
- $\delta_f$  : the steer angle of the front wheel, rad
- $\delta_r$  : the steer angle of the rear wheel, rad
- $m$  : the total mass of vehicle, kg
- $I_{zz}$  : the yaw moment of inertia of vehicle, kg m<sup>2</sup>

#### 1. 서론

차량의 동적 안정성은 출발, 제동, 선회(cornering) 등의 거동에 밀접한 관계를 가지고 있다.<sup>1-3)</sup> 차량의 동적 안정성에 관계된 주요 운동은 롤 운동(roll motion)과 요 운동(yaw motion)이다. 선회시 과도한 요 운동은 차량을 전복시키기도 한다. 따라서 롤 안정성에 대한 연구의 주요 목적은 차량전복의 방지에 있다. 요 운동은 운전 중에 흔히 나타난다. 출발 시나 제동 시 요 안정성 확보는 이러한 요 운동을 방지하는 데 있다. 반면에 선회시의 요 안정성 확보는 요 레이트(yaw rate)의 크기를 조절하여 횡가속도(lateral acceleration)와 조화하는데 있다.

선회시 요 운동을 분석하는 일반적인 수단은 뉴트럴 스티어(neutral-steer), 언더 스티어(under-steer), 오버 스티어(over-steer) 등의 조향 경향을 찾는 것이다. 조향 경향은 요 모멘트의 방향에 따라 구분되며,

\*Corresponding author, E-mail: cksong@gnu.kr

이는 각 타이어에 작용하는 횡력에 의해 기인된다. 이는 0.3 g 이하의 횡 가속도를 갖는 선형 구간에서 유효하다. 이 선형 해석은 정상 상태의 운전 조건에서는 잘 적용될 수 있으나, 급격한 선회조건에서는 차량이 안정성 영역 내에 있는 지 또는 안정성 영역을 벗어 났는 지를 판단하는 것이 요 안정성을 분석하는 핵심이 된다. 또한 급격 선회시 차량의 안정성은 매우 중요하다. 차량 안정성 영역의 크기와 경향은 선회시의 차량 안정성을 분석하는 지표로 사용된다.<sup>4)</sup>

차량의 안전(safety)이 동적 안정성에 매우 밀접하기 때문에, 차량 안정성은 차량의 설계와 제어에 중요한 주제가 된다. 차량이 동적으로 안정될수록 운전자가 조정해야 할 상황은 줄어든다. 즉, 이는 비선형 동적 시스템인 차량이 안정성 영역에 놓여 있다는 것을 의미한다.

요 안정성에 관한 대부분의 연구는<sup>5,6)</sup> 뉴트럴 스티어, 언더 스티어, 오버 스티어 등의 개념에 초점을 맞추었다. 이러한 개념은 2 자유도 선형 모델에 작용되는 힘을 분석하여 유도되었다. Radt, Jr.은<sup>7)</sup> 안정성의 미분 개념을 이용하여 3 자유도 선형 모델을 유도하였으며, Mashasi은<sup>8)</sup> 4 자유도 모델을 유도하였다. Zeng 등은<sup>9)</sup> 횡 운동과 요 운동에 대한 10 자유도계 모델을 제안하였다. 그러나 이 모든 결과들은 주로 횡가속도 0.3 g 이하의 선형 구간에서만 유효하다.

차량과 같은 비선형 동역학 모델에 대한 안정성 영역을 추정하는 방법은 대략 리아프노프 방법과 비 리아프노프 방법의 두 가지로 요약된다.<sup>10)</sup> 리아프노프 함수 접근법은 상태공간에서 궤적을 명확히 구하지 않고도 시스템의 안정성을 판단할 수 있다. 그러나, 이 방법은 다음의 두 가지 주요 결점을 가지고 있다.: 1) 최적의 리아프노프 함수를 구하는 일반적인 방법은 없다. 2) 리아프노프 함수에 근거하여 추정한 안정성 영역은 실제의 안정성 영역의 일부뿐이다.

Genesis<sup>10)</sup>은 시스템 방정식을 적분하여 얻는 수많은 시스템 궤적으로부터 안정성 영역을 추정하는 역 궤도법을 제안하였다. From the topological study, Chiang<sup>11,12)</sup>은 토폴로지 연구를 통하여 안정성 경계

에 놓여있는 평형점에 대한 여러 조건을 유도하였으며, 안정성 경계에 놓여있는 모든 평형점에 대한 안정한 매니폴드의 조합으로 안정성 경계가 구성됨을 보여주었다.

본 연구에서는 토폴로지 개념과 안정성 경계 이론이 적용하여 차량의 안정성 영역을 추정하고자 한다. 타이어 힘과 기구학적 비선형 특성을 포함하는 중형 승용차의 3자유도계 모델을 사용하고자 한다.

## 2. 안정성 영역 추정

비선형 동역학 시스템은 다음과 같은 비선형 미분 방정식으로 표현될 수 있다.

$$\dot{x} = f(x) \tag{1}$$

여기서 상태  $x$ 는  $\dot{x} = \{\beta, r\}^T$ 이며, 식  $f(\hat{x}) = 0$ 을 만족시키는 상태  $\hat{x}$ 를 시스템의 평형점 또는 평형상태 (equilibrium point or equilibrium state)라 한다.

식 (1)의 벡터 함수  $f$ 는 한번 미분가능한  $C^1$  연속성을 가지며, 이차원 유클리드 공간  $R^2$ 에서  $R^2$ 로 맵핑(mapping)된다. 자코비언 행렬(Jacobian matrix)  $J$ 의 어느 고유치(eigenvalues)도 실수 부분을 갖지 않는다면 평형점  $\hat{x}$ 는 쌍곡선(hyperbolic)을 이룬다. 자코비언 행렬  $J$ 의 모든 고유치가 음의 실수 값을 갖는다면 평형점  $\hat{x}$ 가 안정하다고 할 수 있다. 그렇지 않으면 평형점은 불안정(unstable)하게 된다.

Fig. 1은 안정성에 대한 용어를 간략히 설명하는 그림이다.

$t=0$ 에서 시작되는 식 (1)의 곡선 해  $x$ 를 궤적 (trajectory)이라 부르며  $\Phi(x, \cdot) : R \rightarrow R^2$ 로 표시한다. 안정한 평형점  $x_s$ 에 대하여, 상태공간  $A(x_s)$  내의 안정영역은 다음과 같이 정의된다.

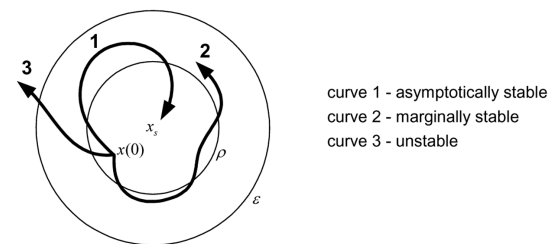


Fig. 1 Concepts of stability

$$A(x_s) := \{x \mid \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(x, t) = x_s\} \quad (2)$$

여기서  $\partial A(x_s)$ 는 상태공간  $A(x_s)$ 의 경계(boundary)를 의미한다.

쌍곡선 평형점  $\hat{x}$ 에 대한 안정 매니폴드(manifolds)  $W^s(\hat{x})$ 와 불안정 매니폴드  $W^u(\hat{x})$ 는 다음과 같이 정의한다.

$$W^s(\hat{x}) = \{x \mid \Phi(x, t) \rightarrow \hat{x} \text{ as } t \rightarrow \infty\} \quad (3)$$

$$W^u(\hat{x}) = \{x \mid \Phi(x, t) \rightarrow \hat{x} \text{ as } t \rightarrow -\infty\} \quad (4)$$

안정한 평형점이 존재한다고 할 때, 식 (1)로 정의되는 시스템에 다음을 가정할 수 있다.<sup>11,12)</sup>

(A1) 안정 영역 내에 있는 모든 평형점은 쌍곡선을 이룬다.

(A2) 안정 영역의 모든 궤적은  $t \rightarrow \infty$  일 때 한 평형점에 수렴한다.

정리: 안정 경계의 특성<sup>11)</sup>

가정 (A1)과 (A2)를 만족하는 비선형 동적 시스템에 대하여, 안정 경계  $\partial A$  상에 있는 평형점을  $x_i$  ( $i=1, 2, \dots$ )라 하면 다음 식을 만족한다.

$$\partial A = \bigcup_i W^s(x_i) \quad (5)$$

이 정리는 안정 경계는 모든 평형점의 안정 매니폴드의 조합으로 구성된다는 것을 나타낸다. 예를 들어, Fig. 2에서 보는 바와 같이, 안정 경계 상에 존재하는  $x_{sd}$ 에 대하여  $x_{sd}$ 의 안정 매니폴드를 조합하면 안정 경계를 이루게 된다.<sup>11)</sup> 이 정리는 식 (1)로 나타나는 시스템에 대한 안정한 평형점  $x_s$ 의 안정 경계를 정확히 결정하는데 이용된다.

역궤적 기법(trjectory reversing technique)<sup>10)</sup>은 다음 식으로 나타나는 시스템과 동일하다.

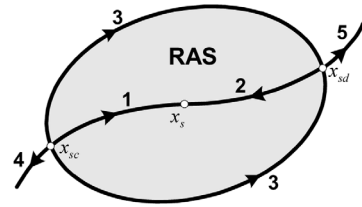
$$\dot{x} = -f(x) \quad (6)$$

이는 식 (1)으로 표현되는 상태공간 시스템과는 같은 궤적을 이루나 궤적의 방향은 반대이다.

안정 경계  $\partial A(x_s)$ 을 구하는 알고리즘<sup>4)</sup>은 다음의 단계로부터 얻을 수 있다.

1 단계: 모든 평형점을 찾는다.

2 단계: 각 평형점이 가정 (A1)을 만족하는지 확인한다. 또한 평형점이 안정한지 확인한다.



$x_s$  : stable eq. pt.       $x_{sd}$  : saddle       $x_{sc}$  : source

- curve 1 - stable manifold of  $x_s$  and unstable manifold of  $x_{sc}$
- curve 2 - stable manifold of  $x_s$  and unstable manifold of  $x_{sd}$
- curve 3 - stable manifold of  $x_{sd}$  and unstable manifold of  $x_{sc}$
- curve 4 - unstable manifold of  $x_{sc}$
- curve 5 - unstable manifold of  $x_{sd}$

Fig. 2 Illustration of manifolds and the region of asymptotic stability (RAS)

3 단계: 안정 매니폴드가 가정 (A2)를 만족하는 안정 평형점인지 확인한다.

4 단계:  $x_s$ 의 안정 경계가 안정 매니폴드의 조합인지 확인한다.

### 3. 차량 모델

차량의 구성품은 강체로 취급하여 차량 동역학을 나타내게 된다. 구속되지 않은 강체는 3개의 병진 운동과 3개의 회전 운동의 6 자유도를 갖는다. 차량 모델은 외력과 기구학적 제약을 갖는 강체로 해석되며, 스프링 질량(sprung mass), 바퀴, 현가장치를 포함한다. 또한 기구학적 조인트, 스프링, 고무 부싱, 충격 흡수기 등의 모델링이 필요하다.

MSC.ADAMS와 같은 다물체 동역학 해석 프로그램은 차량의 동적 요소를 정확하게 모델링하는 데 널리 사용된다. 차량의 다물체 동역학 모델은 주로 100 이상의 자유도를 가짐으로써, 차량의 실제 거동을 매우 근접하게 나타낼 수 있다. 그러나 이러한 다물체 동역학 모델은 시스템의 운동방정식이 해석 프로그램 내에서만 자동적으로 형성되기 때문에 운동방정식을 직접 분석하는 것은 불가능하다. 반면에 단순 모델은 상태의 관계를 이해하고 그 상태 변화 추세를 쉽게 파악하기에 유용하다.

단순 모델은 주로 15 ~ 17 자유도를 초과하지 않는다. 이는 차량의 전체 거동을 표현하는데 충분한 자유도이기 때문이다. Fig. 3에 나타난 바와 같이

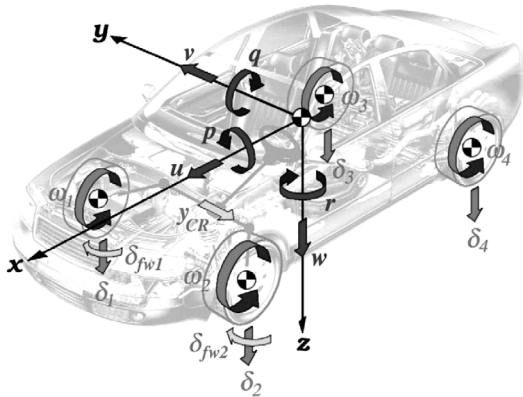


Fig. 3 Degree-of-freedom in a vehicle model

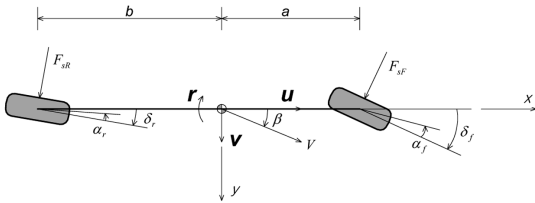


Fig. 4 Simplified vehicle model (3 degree-of-freedom)

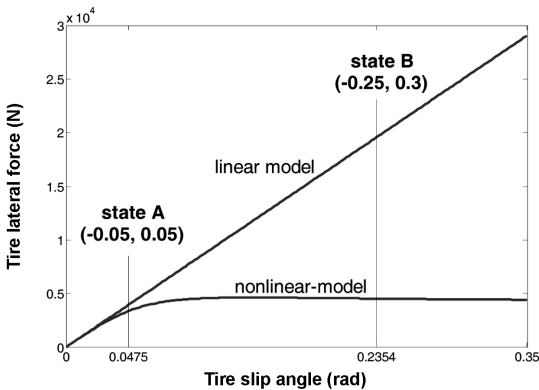


Fig. 5 Linear versus nonlinear model

대부분의 자유도는 스프링 질량과 바퀴의 운동을 나타낸다. 현가장치의 기구학에 대한 자유도는 생략되어 있다. 횡 방향 동역학을 다루는 데 집중되는 연구는 Fig. 4와 같은 자전거 모델이 사용된다. 자전거 모델은 차량의 평면 운동을 나타낼 수 있으며, 횡 가속도, 요 레이트, 횡 미끄럼 각과 같은 주요 동역학 특성을 나타낼 수 있다. 스프링 질량의 상하 거동을 표현하기 위해서는 롤 운동이 추가되어야 한다 모든 다물체 동역학 모델은 비선형이다. 차량 동역

학 모델의 비선형성은 주로 타이어나 현가장치에서 비롯된다. 타이어는 주로 차량의 평면 운동에 관련된 비선형을 만들어 내며, 현가장치는 주로 차량의 상하 방향과 회전 방향의 비선형성을 만들어 낸다. 본 연구에서, 다물체 모델은 타이어와 현가장치의 비선형성을 모두 반영하고 있는 반면, 단순 모델은 오로지 차량의 평면 운동에 관련된, 타이어의 비선형성만 표현하고 있다.

단순 모델에서 타이어 비선형성이 중요한 이유는 Fig. 5에서 잘 나타낸다. 상태 A는 선형 구간에 있는 반면, 상태 B는 비선형성이 확실히 나타나는 구간에 위치한다. 만약 상태 B를 선형으로 가정한다면 올바른 결과를 기대할 수 없을 것이다.

Table 1은 이 단순 모델의 검증을 위하여 사용된 중형 승용차의 데이터이다.

Table 1 Vehicle data

Wheel base	2.700 m
Wheel tread (front/rear)	1.540 m/1.520 m
Distance from the front axle to C.G.	1.003 m
Distance from the rear axle to C.G.	1.697 m
Steering gear ratio	16
Vehicle mass	1500 kg
Sprung mass	1325 kg
Yaw moment of inertia of vehicle	2975 kg m <sup>2</sup>
Roll moment of inertia of sprung-mass	348 kg m <sup>2</sup>
Spring constant of front suspension	18540 N/m
Spring constant of rear suspension	18050 N/m
Damping coefficient of front suspension	2894 N s/m
Damping coefficient of rear suspension	2286 N s/m

### 3.1 단순 모델

Fig. 4는 종 운동, 횡 운동, 요 운동의 3 자유도를 가진 비선형 차량의 단순 모델을 보여주고 있다. 양 바퀴가 하나로 겹쳐 이루어진 자전거 모델의 형태이다. 이는 양 바퀴 사이의 중량 이동을 무시할 수 있어 편리하다. 단면에 이 모델로는 롤과 피치 거동은 확인할 수 없다. 길이 방향의 어떠한 힘이나 타이어 미끄럼을 무시한다. 해석을 위하여 중형 차량의 차량 데이터를 사용하였다. 차량의 평면운동은 다음과 같이 표현된다.

$$m(\dot{u} - vr) = -2F_{sF} \sin \delta_f - 2F_{sR} \sin \delta_r \quad (7)$$

$$m(\dot{v} + ur) = 2F_{sF} \cos \delta_f + 2F_{sR} \cos \delta_r \quad (8)$$

$$I_{zz} \dot{r} = 2aF_{sF} \cos \delta_f - 2bF_{sR} \cos \delta_r \quad (9)$$

상태 해석을 위하여, 차량의 평면 운동을 효과적으로 설명할 수 있는 두 상태, 즉 횡 미끄럼 각 (sideslip angle)과 요 레이트를 선택하였다. 횡 미끄럼 각  $\beta$ 과 차량 속도  $V$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\beta = \tan^{-1} \left( \frac{v}{u} \right) \quad (10)$$

$$V = \sqrt{u^2 + v^2} \quad (11)$$

식 (7)~(9)에 식 (10), (11)을 대입하여 정리하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\dot{\beta} = -r + \frac{2}{mV} F_{sF} \cos(\delta_f - \beta) + \frac{2}{mV} F_{sR} \cos(\delta_r - \beta) \quad (12)$$

$$\dot{r} = \frac{2a}{I_{zz}} F_{sF} \cos \delta_f - \frac{2b}{I_{zz}} F_{sR} \cos \delta_r \quad (13)$$

타이어의 비선형 특성을 다루기 위해서, 매직 식 (Magic formula) 형태<sup>13)</sup>를 이용하여 후륜의 타이어 횡력을 나타내었다.

$$F_s = D \sin \left[ C \tan^{-1} \left\{ B(1 - E) \alpha + E \tan^{-1}(B \alpha) \right\} \right] \quad (14)$$

여기서 계수  $B, C, D, E$ 는 수직하중에 따라 변하는 상수이다. 이 계수들은 실험 데이터로부터 계산된다.<sup>14,15)</sup>

$$D = -F_{s, \max}$$

$$C = 2 \left\{ 1 - (1/\pi) \sin^{-1} R_{sp} \right\}$$

$$B = S_t / (CD)$$

$$E = \frac{\pm \tan(\pi/2 C) - B \alpha_{\max}}{\tan^{-1}(B \alpha_{\max}) - B \alpha_{\max}}$$

Fig. 6은 해석에 사용된 타이어 하중 그래프이다. 타이어 미끄럼 각에 관련된 비선형 기구학은 다음과 같이 표현된다.

$$\alpha_r = \tan^{-1} \left( \frac{v + ar}{u} \right) - \delta_r \quad (15)$$

$$\alpha_r = \tan^{-1} \left( \frac{v - br}{u} \right) - \delta_r \quad (16)$$

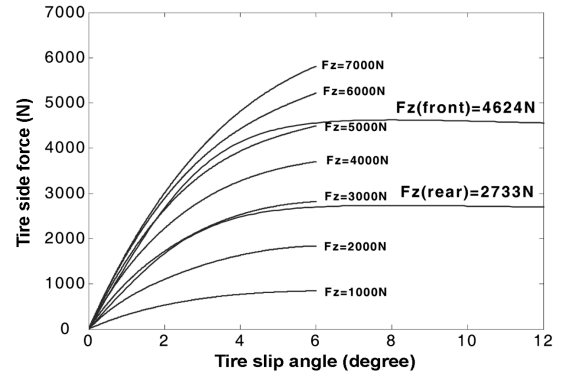


Fig. 6 Tire modeling. Experiment results (up to 6°) and the Magic Formula model ( $\mu = 1.0, \alpha_{\max} = 8^\circ, R_{sp} = 0.9, S_{tF} = 83074 \text{ N/rad}, S_{tR} = 53680 \text{ N/rad}$ )

### 3.2 다물체 모델

다물체 모델은 MSC.ADAMS<sup>16,17)</sup>로 만들어, 차량의 다양한 거동을 잘 나타내도록 하였다. Fig. 7에서 나타난 바와 같이, 차량은 전륜에 더블 위시본 현가장치와 후륜에 다관절(multi-link) 현가장치를 사용하였다. 다물체 모델은 51 개의 부품과 58 개의 기구학적 구속조건을 가짐으로써 119 자유도를 갖도록 하였다. 타이어 모델은 실험 데이터를 이용하여 타이어 거동을 나타내도록 하였다.

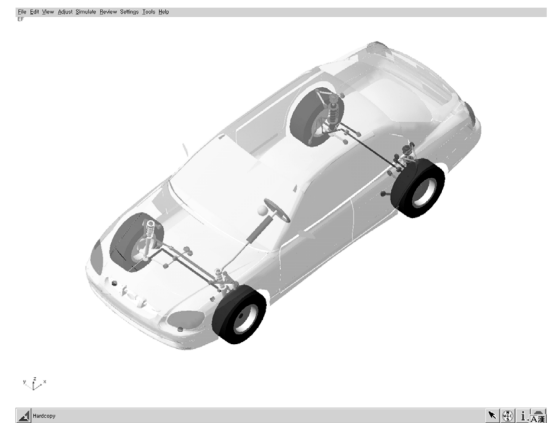


Fig. 7 Full vehicle model in MSC. ADAMS. The front suspension is a double wishbone, and the rear one is a multi-link type

### 3.3 모델의 동적 검증

모델의 타당성을 확인하기 위하여 주행 시험을 수행하였다. 본 연구에서 차량의 횡적 동역학에 관심을 두고 있으므로 횡적 동역학과 관련된 파라미터, 즉 횡 가속도, 요 레이트, 롤 각으로 검증 시험을 하였다. J-선회 (J-turn maneuver) 시험은 이러한 파라미터의 순간적 변화를 보여줄 수 있어, 횡적 동역학에 대한 전형적인 시험이다. Fig. 9는 J-선회 거동에 대한 차량실험과 두 모델에 대한 컴퓨터 시뮬레이션을 비교한 그림이다. Fig. 9(a)는 실험에서의 차량 속도와 조향휠 회전 각을 나타낸 그림이다. 시뮬레이션에서도 동일한 데이터를 입력하였다. 직선 주행 후 운전자가 급격히 조향을 하여 최종 조향휠 회전 각을 이루도록 하였다.

다물체 모델에 의한 해석 결과는 정상 상태 구간 뿐 아니라 과도 구간에서도 실험 결과와 매우 근접하다. 반면에, 단순 모델은 Fig. 8(b)와 8(c)에서 보는 바와 같이 다소 과도한 응답을 보였다. 이는 단순 모델이 중량 이동을 반영하지 못했기 때문이다. 실제로 선회 거동 동안에, 양 바퀴 사이에서 차량 중량이동이 발생한다. 특히, 횡적으로 중량이 이동되면 차축에 걸리는 횡력이 변하게 되며, 전 후 차축 사이에 하중이 균형을 이루면 Fig. 8(b)와 8(c)에서의 오버슈트(overshoot)는 줄어들 것이다.

단순 모델에서의 타이어 횡력은 선회 도중에도 초기값을 계속 유지됨으로써 선회 시의 동적 응답에 과도 현상이 나타나게 된다.

본 연구에서 두 가지 차량 모델로 자유도와 선형성을 검토하였다. 중형 차량의 데이터를 사용한 두 모델을 J-선회거동 주행 시험으로 비교 검증하였다.

이를 통하여 단순 모델은 다물체 동역학 모델에 비해 실험 데이터에 정확한 일치를 가지지는 못하지만 차량운동 경향을 파악하는 데에는 쉽게 이용할 수 있음을 확인할 수 있었다.

### 4. 안정성 영역 추정 시뮬레이션

식 (12)와 (13)으로 나타나는 시스템에 안정성 영역 추정 알고리즘을 적용하면 다음과 같이 정리될 수 있다. Fig. 9는 한 전형적인 결과를 나타낸 그림이다.

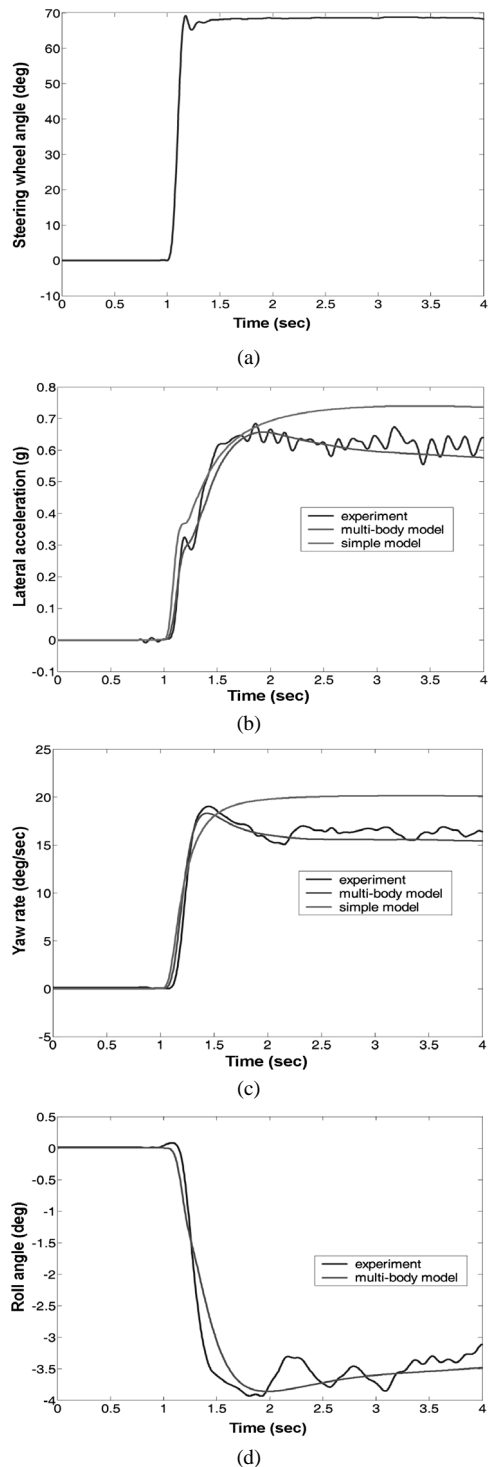


Fig. 8 Test and simulation results of the J-turn maneuver. (a) steering input, (b) lateral acceleration, (c) yaw rate, (d) roll angle

1 단계: 물리적으로 타당한 범위에 들어 있는 모든 평형점을 찾는다. 이는 모델이 복잡하기 때문에 명확한 형태의 해를 얻을 수는 없다.

2 단계: 자코비언의 모든 고유치가 영 아닌 실수부를 가짐을 확인함으로써, 모든 평형점에서 쌍곡선 조건을 이루게 됨을 알 수 있다. 또한, 고유치의 실수부 부호를 안정한 평형점인지를 판단할 수 있다. 그 결과를 Table 2에 정리하였다.

3 단계: 다음 과정을 통하여, 안정 매니폴드가 가정 (A2)를 만족하는 안정 평형점인지 확인한다.

- (i) 식 (12)와 (13)을 역방향 적분으로 불안정한 평형점에 근접하는 궤적을 그린다. 이 곡선은 각 평형점의 매니폴드를 근접하여 지나게 되나 이는 안정한 매니폴드로 간주될 수 있다. 만약, 고유치가 서로 다른 부호의 실수부를 가지는 새들(saddle)이라면 불안정한 평형점으로 빠져 나가게 된다.
- (ii) 식 (12)와 (13)을 정방향 적분으로 추가적인 궤적을 그린다. 이 곡선은 각 평형점의 매니폴드를 근접하여 지나게 되나 이는 불안정한 매니폴드로 간주될 수 있다.

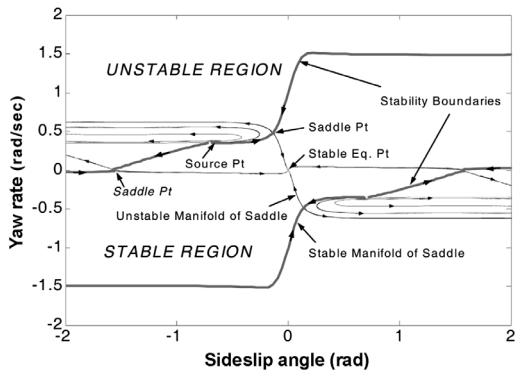


Fig. 9 Determining of the stability region ( $V=72$  km/h,  $\mu=1.0$ , front weight : rear weight = 0.63 : 0.37)

Table 2 Eigenvalue characteristics of the equilibrium points

Equilibrium points ( $\beta, r$ )	Eigenvalues	Stability
(0.0, 0.0)	$-8.56 \pm 2.19 i$	stable
(-0.15, 0.48)	-1.63, 1.54	unstable(saddle)
(-0.63, 0.37)	$0.15 \pm 0.01 i$	unstable(source)
(-1.57, 0.0)	0.45, -0.00	unstable(saddle)
(0.14, -0.48)	-1.63, 1.54	unstable(saddle)
(-0.63, -0.37)	$0.15 \pm 0.01 i$	unstable(source)
(1.57, 0.0)	0.45, -0.00	unstable(saddle)

4 단계: 안정한 매니폴드를 나타내는 곡선들을 연결한다. 안정한 평형점을 포함하는 영역이 안정성 영역이 된다.

Fig. 9에서 안정성 영역은 두 개의 대칭 경계로 구분되어 있다. 경계의 위 부분과 아랫 부분은 각각 차량의 우측 선회와 좌측 선회의 한계를 나타낸다. 각 경계는 두 개의 새들과 한 개의 소스를 가지는데, 두 새들에 접근하는 네 개의 곡선을 나타내고 있다.의 안정 경계가 안정 매니폴드의 조합인지 확인한다.

영(zero) 아닌 요 레이트와 횡 미끄럼 각은 선회 입력이 없이도 약간의 외란을 야기할 수 있다.

여러 가지 연구를 통하여, 차량 속도나 노면 마찰 등과 같은 주행 조건을 변경시키면 안정성 영역이 현저히 바뀌는 반면에, 중량 분포, 타이어 강성 등과 같은 차량 특성을 변경시키면 안정성 영역이 조금 바뀔을 알 수 있다.

Fig. 10(a)는 차량의 중량 분포를 변화시켰을 때 (front:rear=0.63:0.37에서 front:rear=0.40:0.60 까지) 안정성 영역이 얼마나 변화는 지를 보여준다. 중량 분포는 선행 구간에서는 차량 동특성에 큰 영향을 주는 인자이지만, 비선형을 고려한 안정성 영역에는 큰 변화를 주지 못함을 알 수 있다. Fig. 10(b)는 타이어 강성을 30%까지 증가시켰을 때 안정성 영역에 큰 영향이 없음을 보여준다. 반면에 차량 속도를 2배까지 증가시키거나(72 km/h에서 144 km/h 까지, Fig. 10(c)) 노면 마찰계수를 감소시키면( $\mu=1.0$ 에서  $\mu=0.2$  까지, Fig 10(d)), 안정성 영역이 현저히 줄어들음을 알 수 있다.

### 5. 선회 시의 차량 안정성 해석

식 (12)와 (13)의 비선형 시스템을 안정한 평형점  $x_s$ 에 대하여 다음과 같은 일차 선형 방정식으로 부분적 선형화시킬 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{r} \end{Bmatrix} = J(x_s) \begin{Bmatrix} \beta \\ r \end{Bmatrix} \quad (17)$$

여기서 안정한 평형점  $x_s$ 에서의 자코비언 행렬  $J$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$J(x_s) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \beta} & \frac{\partial f_1}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \beta} & \frac{\partial f_2}{\partial \gamma} \end{bmatrix}_{x=x_s} \quad (18)$$

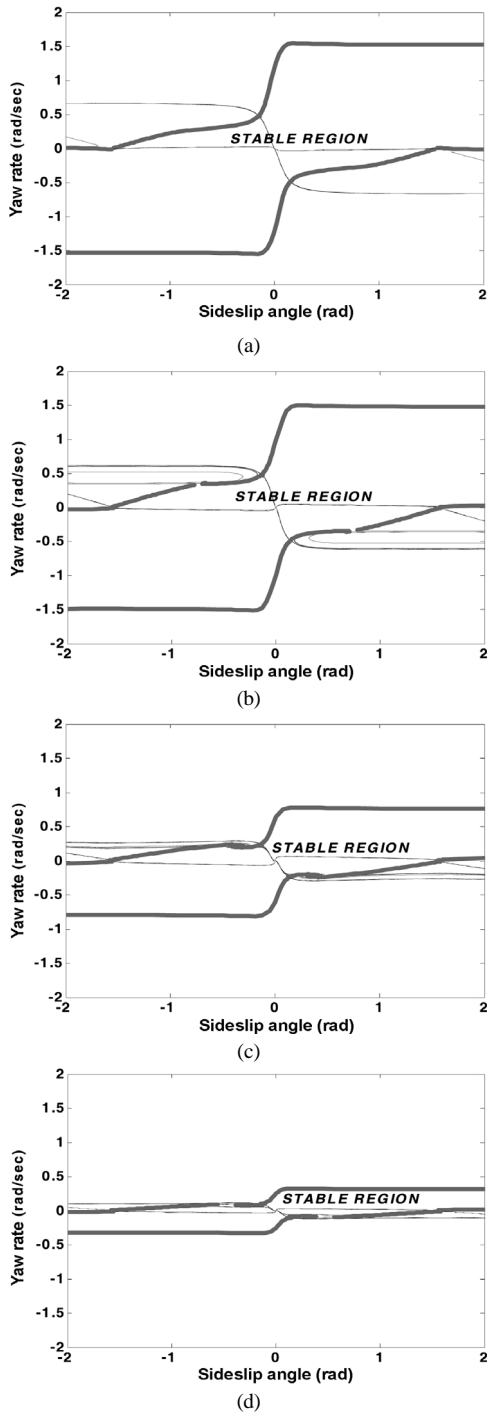


Fig. 10 The stability regions ( $\delta_{sw}=0$ ) (a) the variation of weight distribution (front:rear=0.40:0.60), (b) the variation of tire cornering stiffness (30% up), (c) the variation of vehicle speed (V=144 km/h), (d) the variation of road friction ( $\mu=0.2$ )

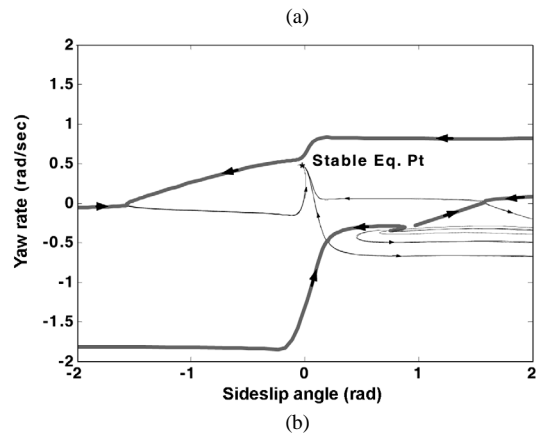
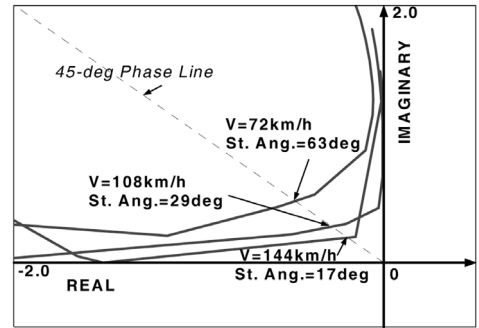


Fig. 11 Stability criterion: (a) the eigenvalue curves (b) the stability region (V=72 km/h,  $\delta_{sw}=63^\circ$ )

식 (18)의 고유치 부호는 식 (17)의 선형화 시스템이 안정한지 불안정한지를 나타낸다. 고유치의 실수부가 음수이면 선형화 시스템은 안정하며, 그렇지 않으면 불안정하다. 따라서 자코비안 행렬의 고유치 해석은 식 (12)와 (13)의 비선형 시스템에 대한 부분적 안정성을 판단해주게 된다.

Fig. 10(a)는 차량 속도 변화에 따른 고유치 궤적을 보여준다. 각 곡선은 조향 입력에 따른 안정한 평형점에 대한 고유치 궤적을 나타낸다. 조향 입력을 증가시키면 고유치가 허수축에 가까워지며, 그 허수 값도 더 커진다. 따라서 고유치의 실수 값과 허수 값이 같은 45° 축은 급 선회시의 안정성 판단기준이 될 수 있다. Fig. 10(b)는 한 안정성 판단기준에서의 안정성 영역을 나타내는 그림이다.

## 6. 결론

역궤적 기법을 이용한 차량의 안정성 영역을 정



확하게 추정할 수 있었다. 안정한 평형점에서의 선형화를 통하여 급 선회시에 대한 안정성 판단기준을 제시하였다.

중형 승용차의 3 자유도 비선형 모델을 이용한 연구를 통하여 다음의 결론을 얻을 수 있었다.

- 1) 3자유도 단순 모델은 다물체 동역학 모델에 비해 실험 데이터와의 비교에서 정확도가 다소 떨어지지만, 차량운동 경향을 파악하는 데에는 쉽게 이용할 수 있다.
- 2) 차량 속도, 도로 마찰력의 변화와 조향 입력은 안정성 영역에 심각한 영향을 미친다.
- 3) 차량 중량 분포와 타이어 강성 등과 같은 차량 특성의 변화는 안정성 영역에 큰 영향을 주지 않는다.

### References

- 1) R. W. Allen, H. T. Szostak, T. J. Rosenthal and D. H. Klyde, "Field Testing and Computer Simulation Analysis of Ground Vehicle Dynamic Stability," SAE 900127, 1990.
- 2) R. W. Allen, H. T. Szostak, T. J. Rosenthal, D. H. Klyde, and K. J. Owens, "Characteristics Influencing Ground Vehicle Lateral/Directional Dynamic Stability," SAE 910234, 1991.
- 3) R. W. Allen and T. J. Rosenthal, "A Computer Simulation Analysis of Safety Critical Maneuvers for Assessing Ground Vehicle Dynamic Stability," SAE 930760, 1993.
- 4) Y. E. Ko and J. M. Lee, "Estimation of the Stability Region of a Vehicle in Plane Motion Using a Topological Approach," International Journal of Vehicle Design, Vol.30, No.3, pp. 181-192, 2002.
- 5) T. D. Gillespie, Fundamentals of Vehicle Dynamics. Society of Automotive Engineers, Warrendale, PA, 1992.
- 6) W. F. Milliken and D. L. Milliken, Race Car Vehicle Dynamics Society of Automotive Engineers, Warrendale, PA, 1995.
- 7) H. S. Radt Jr. and D. J. Van Dis, "Vehicle Handling Responses Using Stability Derivatives," SAE 960483, 1996.
- 8) B. Mashadi and D. Crolla, "Vehicle Handling Analysis Using Linearisation Around Non-Linear Operating Conditions," SAE 960482, 1996.
- 9) C. C. Zeng, J. H. Bao, J. W. Zhang and X. H. Li, "Dynamics of An Actively Guided Track Inspection Vehicle," Int. J. Automotive Technology, Vol.7, No.7, pp.777-784, 2006.
- 10) R. Genesio, M. Tartaglia and A. Vicino, "On the Estimation of Asymptotic Stability Regions : State of the Art and New Proposals," IEEE Trans. Automatic Control, Vol.30, No.8, pp.747-755, 1984.
- 11) H. D. Chiang, M. W. Hirsch and F. F. Wu, "Stability Regions of Nonlinear Autonomous Dynamical Systems," IEEE Trans. Automatic Control, Vol.33, No.1, pp.16-27, 1988.
- 12) H. D. Chiang, F. F. Wu and P. P. Varaiya, "Foundations of Direct Methods for Power System Transient Stability Analysis," IEEE Trans. Circuits and Systems, Vol.34, No.2, pp.160-173, 1987.
- 13) E. Bakker, H. Pacejka and L. Lidner, "A New Tire Model with an Application in Vehicle Dynamics Studies," SAE Trans. J. Passenger Cars, Vol.98, pp.101-113, 1989.
- 14) D. J. Schuring, W. Pelz and M. G. Pottinger, "The BNPS Model an Automated Implementation of the Magic Formula Concept," SAE 931909, 1993.
- 15) D. J. Schuring, W. Pelz and M. G. Pottinger, "The Paper-Tire Concept : A Way to Optimize Tire Force and Moment Properties," SAE 970557, 1997.
- 16) MSC Software, Running and Configuring MSC. ADAMS 2005, MSC Software, 2005.
- 17) C. K. Song and B. K. Cho, MSC.ADAMS for Multi-body Dynamics Analysis, Kyobobook, 2007.