

# 아치 트러스 및 공간 트러스 구조의 비탄성 비선형 거동해석

## Inelastic Nonlinear Analysis of Arch Truss and Space Truss Structures

김 광 중\*                      정 미 루\*\*                      김 연 태\*\*                      백 기 열\*\*\*                      이 재 홍\*\*\*\*  
Kim, Kwang-Joong              Jung, Mi-Roo                      Kim, Yeon-Tae                      Baik, Ki-Youl                      Lee, Jae-Hong

### 요 약

대공간 구조는 형태저항구조로서, 기둥-보로 구성되는 일반적인 건축골조구조가 설계외력에 대해 휨 및 전단으로 저항되는 것에 반해, 구조물의 내부에 기둥이 없는 공간을 내포하는 대공간 구조는 축력 및 면내 단면력에 의해 저항되는 경우가 대부분이다. 이러한 특성상 공간구조에는 일반적으로 장스팬이 사용 되는 경우가 많으며, 그 결과 일반적인 골조와는 달리, 부재에 발생하는 변형도가 작은 경우에도 큰 변형이 발생하는, 즉 대변형 혹은 유한변형을 동반하게 된다. 일반적으로 수치해석에 있어 비선형해석이란 기하학적 비선형 및 재료적 비선형, 또는 이 두 가지를 동시에 고려한 복합비선형해석을 들 수가 있다. 본 논문에서는 유한요소법으로 기하학적 비선형을 고려한 비선형 평형방정식을 적용하고, 부재의 응력-변형을 관계를 이용하여 재료적 비선형성도 함께 고려하였다. 사용된 수치해석 기법은 불안정 경로의 해를 찾아갈 수 있는 호장법을 적용하여 하중-변위 곡선을 추적하였다. 또한, 해석 결과는 범용 유한요소 프로그램인 ABAQUS를 이용하여 비교 검토 하였다. 본 연구의 수치 해석 결과 제시한 평면 및 공간 트러스의 비탄성 비선형 거동을 정확하고 효율적으로 예측 가능한 것으로 나타났다.

### Abstract

Spatial structure is an appropriate shape that resists external force only with in-plane force by reducing the influence of bending moment, and it maximizes the effectiveness of structural system. With this character of the spatial structure, generally long span is used. As a result, large deflection is accompanied from the general frame. the structure is apt to result in a large deflection even though this structure experiences a small displacement in absence. Usually, nonlinear analysis in numerical analysis means geometric nonlinearity and material nonlinearity and complex nonlinear analysis considers both of them. In this study, nonlinear equation of equilibrium considering geometric nonlinearity as per finite element method was applied and also considered the material nonlinearity using the relation of stress-strain in element. It is applied to find unstable result for tracing load-deflection curve in the numerical analysis tech. especially Arc-length method, and result of the analysis was studied by ABAQUS a general purpose of the finite element program. It is found that the present analysis predicts accurate nonlinear behavior of plane and space truss.

키워드 : 기하학적 비선형성, 재료적 비선형성, 공간 트러스, 아치 트러스

Keywords : Geometric nonlinearity, Material nonlinearity, Space Truss, Arch Truss

## 1. 서 론

대공간 구조는 넓은 공간을 덮을 수 있는 구조 시스템으로 좌굴 하중 및 좌굴 형상에 대한 검토가 필요하고, 일반적인 건축물과 달리 구조물의 내부에 기둥이 없는 공간을 내포하여 축력 및 면내력에 의

해 저항 되는 경우가 대부분이다. 이러한 특성상 대공간 구조에는 일반적으로 장스팬이 사용되는 경우가 많으며, 그 결과 일반적인 골조와는 달리 부재에 발생하는 변형도가 작은 경우에도 큰 변형이 발생하는, 즉 대변형 혹은 유한 변형을 동반하므로 정적, 동적 해석에 관계없이 비선형 해석이 요구 된다.

대공간 구조를 형성하기 위한 효율적인 구조시스템인 트러스 구조는 부재의 주된 응력이 축방향력이므로 보와 같은 휨 부재에 비해서 단면의 효율이 높고, 단순하면서도 합리적인 형태로 사용될 수 있어 입체적인 대공간 구조를 형성하는 장점이 있다.

\* 정희원 · 세종대학교 건축공학과 석사과정  
\*\* 정희원 · 세종대학교 건축공학과 석사과정  
\*\*\* 정희원 · CS구조엔지니어링 기술연구소, 공학박사  
\*\*\*\* 교신저자, 세종대학교 건축공학과 교수, 공학박사  
Tel: 02-3408-3287 Fax:02-3408-3671  
E-mail : jhlee@sejong.ac.kr

그러나 이러한 트러스 구조는 세장하게 설계 되는 것과 국부좌굴의 영향만을 고려하여 구조물의 안정성을 감소시키는 요인이 된다.

트러스 구조물의 비선형 거동 해석은 과거의 트러스 구조물의 붕괴로 관심이 대두되어졌으며, 트러스 구조 해석시에 구조물의 안정성에 미치는 요인들을 신중히 고려할 것을 요구하고 있다.

트러스 구조물의 붕괴는 취성적인 거동을 나타내고 있어서 선형 탄성 해석은 트러스 구조물의 거동을 예측하는데 부적절하다.

1966년과 1975년 Surrey 대학에서 개최된 국제 심포지엄에서 트러스 구조물의 구조해석과 실험 결과의 세부사항을 발표하였고, Makowski<sup>1)</sup>는 이중격자형 트러스에 관한 논문에서 트러스 구조물의 실험과 분석예측 사이에는 상당한 편차가 있음을 제시하였다. 여기서 나타나는 주요 편차는 지금까지의 트러스 해석 방법이 안정성 해석에서 고려되어야 할 주요 원인을 빠뜨린 결과라고 지적하였다. 이러한 주요 원인들은 Davis와 Neal<sup>2)</sup>에 의하여 연구되어진 스냅현상(Snap-through)과 부재의 변위가 바뀌는 현상 등을 들 수 있는데, 이러한 원인들은 트러스 구조물의 취성거동을 일으키는 주된 원인이라고 지적하였다.

과거에 있어 트러스의 좌굴해석은 여러 방법으로 다루어졌다. 부재의 기하학적 비선형성과 탄성을 조합한 좌굴 해석이 Berke와 Mallet<sup>3)</sup>, Mallet과 Schmidt<sup>4)</sup>에 의하여 다루어졌으며, 기하학적 비선형성과 재료적 비선형성을 고려한 좌굴 해석 방법은 Wolf<sup>5)</sup>와 Schmidt에 의해 연구되었다.

1970년 말부터 트러스 구조의 안정성에 미치는 요인과 스냅현상에 의한 동적 특성에 관한 연구가 본격화 되었다. 기하학적 비선형성과 재료적 비선형성을 고려하여 분기점과 극한점을 해석하는 수치해석 방법이 Cichon과 Corradi<sup>6)</sup>에 의하여 고려되어졌다. 극한점을 지나기 위한 수치해석 방법으로 스냅현상과 같은 동적 특성에 근거를 둔 동적이완법이 Papadrakakis<sup>7)</sup>에 의하여 적용되었다.

이에 따라 트러스 구조물의 정확한 구조해석을 수행하기 위해서는 기하학적 비선형성(Geometric nonlinearity)과 재료적 비선형성(Material nonlinearity)을 함께 고

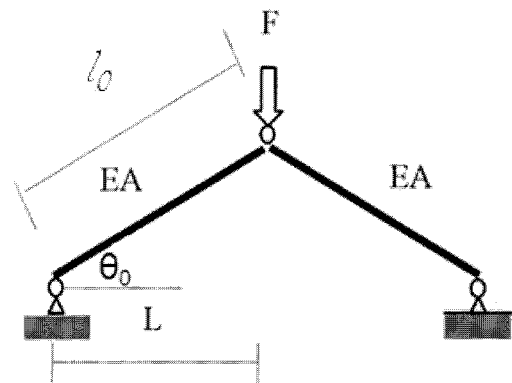
려해야 한다. 본 논문에서는 기하학적 비선형에 대한 수치해석법으로써 크리스필드법(Crisfield method)<sup>9)</sup>으로 하였으며, 부재의 응력-변형률 관계를 이용한 재료비선형성을 고려하였다. 본 논문에서는 김광중<sup>8)</sup>의 내용을 아치 트러스 및 스타 트러스에 확대 적용하여 구조물의 형상 및 탄소성해석에 따른 트러스 구조의 비선형적 거동에 관해 고찰하였다.

또한 실제 구조물의 거동에 유사하게 접근하기 위하여 해석 모델에 초기불완전을 적용하여 해석, 완전모델과 비교하였다.

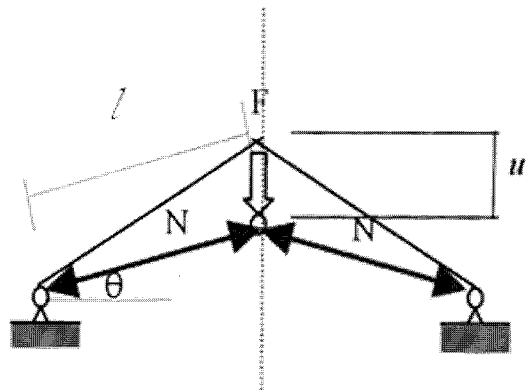
## 2. 기하학적 비선형성 모델

### 2.1 증분이론을 사용한 기초식 유도

평면 트러스 구조인 3힌지 모델을 대상으로 기하학적 비선형성에 대해 알아보았다.



〈그림 1〉 변형 전



〈그림 2〉 변형 후

먼저 하중점 에서의 연직변위  $u$ 를 구하도록 한다. 여기서 트러스 부재의 축강성은  $EA$  이며, 축력  $N$  및 트러스 부재의 신축량  $\Delta l$ 는 선형관계이며  $N=EA/l_0 \cdot \Delta l$  로 표현된다.

평형 방정식

$$G=2N\sin\theta - F=0 \tag{1}$$

식(1)에서 평형방정식의 일반화된 표현은 다음과 같다.

$$G(u,F) = R(u) - F=0 \tag{2}$$

위 식에서  $R$ 은 내부응력으로부터 구해지는 절점력 또는 내력벡터라 한다.

$F, R, u$ 는 하중벡터, 내력벡터 및 변위벡터이다. 또한 하중분포를 의미하는 하중모드벡터  $P$ 와 하중의 크기를 나타내는 파라메타  $\lambda$ 을 사용해,  $F=\lambda P$ 로 표기하여 다음의 식으로 표현할 수 있다.

$$G(u,\lambda) = R(u) - \lambda P=0 \tag{3}$$

선형해석에서는 무변형(초기) 상태를 기본상태로 정해 식(3)을 맥크로린 전개, 그 중 최고차항을 무시함으로서 변위벡터와 하중벡터의 선형적인 관계를 구했다. 이에 반해, 비선형 해석에서는 증분이론을 적용하여 임의의 변위까지 변형이 진행된 단계를 기준 상태( $n\_step$ )로 하며, 변형이 더욱 진행된 상태 ( $n+1\_step$ )에서의 제량을 구하는 수법이 많이 채용되고 있다.

$$\left. \frac{\partial R}{\partial u} \right|_{u=u^n} \Delta u + \dots = (\lambda + \Delta\lambda)P - R|_{u=u^n} \tag{4}$$

여기서,  $n$  스텝 상태에서는 내력벡터와 하중벡터와의 관계는 평형상태이므로 다음과 같이 나타낼 수 있으며,

$$\lambda R|_{u=u^n} = 0 \tag{5}$$

위 식을 고려하여 변위증분벡터에 대한 고차항을 무시할 경우, 다음과 같은 변위량에 관한 선형 방정식이 얻어진다.

$$K_T \Delta u = \Delta \lambda P, \quad K_T = \left. \frac{\partial R}{\partial u} \right|_{u=u^n} \tag{6}$$

여기서,  $K_T$ 는 접선강성메트릭스이다. 접선강성  $K_T$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial u} &= K_T = \frac{\partial}{\partial u}(2N\sin\theta) \\ &= 2 \frac{\partial N}{\partial u} \sin\theta + 2N \cos\theta \frac{\partial \theta}{\partial u} \\ &= \frac{2EA}{l_0} \sin^2\theta + \frac{2N}{L} \cos^3\theta \end{aligned} \tag{7}$$

위 식과 선형강성메트릭스인,

$$K_L = \left. \frac{\partial R}{\partial u} \right|_{u=0} = \left( \frac{2EA}{l_0} \right) \sin^2\theta \tag{8}$$

식 (8)을 비교하면,  $(2N/L)\cos^2\theta$ 의 항이 첨가되어 있음을 알 수 있다. 이는 응력의 변화에 따른 강성의 변화를 의미하며 기하 강성이라 칭한다.

식 (7)은  $n$ 스텝에서  $n+1$ 스텝상태의 증분간에 있어 제일 근사 값에 대한 평형방정식이다. 비선형이 약한 경우 및 비교적 증분구간이 작은 경우에는,

$$\begin{aligned} {}^{n+1}u &= {}^n u + \Delta u \\ {}^{n+1}\lambda &= {}^n \lambda + \Delta \lambda \\ {}^{n+1}G &= R({}^{n+1}u) - \lambda P \cong 0 \end{aligned} \tag{9}$$

식 (9)의 관계가 성립 하지만, 대부분의 비선형 문제에 있어서는 식 (9)에 대한 반복계산을 행함으로써 정확한 해에 가까운 값을 구하는 경우가 대부분이다.

## 2.2 크리스필드법(Crisfield Method)

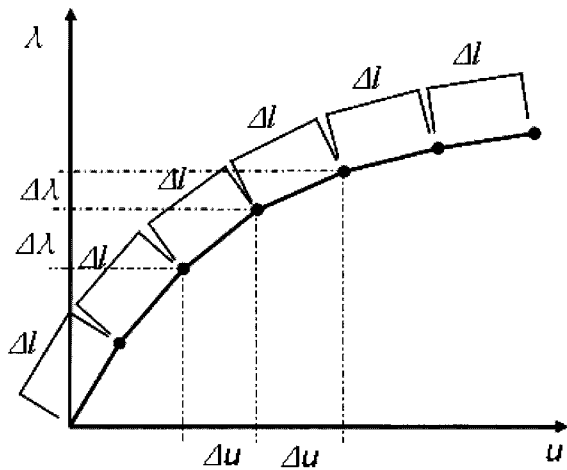
크리스필드법은 기하학적 비선형을 표현하기 위한 수치해석법으로서 <그림 3>에 나타낸 바와 같이  $n$ 스텝에서부터  $n+1$ 스텝으로 이동할 때  $\Delta l$ 을 증분 파라메터로 사용하는 것이다. 증분 파라메터는 변위

벡터 및 하중 파라미터로 구해진다.

$$(\Delta u_{(i)} + \delta \Delta u)^T (\Delta u_{(i)} + \delta \Delta u) + (\Delta \lambda_{(i)} + \delta \Delta \lambda)^2 = \Delta l^2 \quad (10)$$

다음으로 식 (6)을 미소증분 형식으로 나타낸 평형방정식에 식 (10)을 대입한다.

$$K_{T(i)} \delta \Delta u = \delta \Delta \lambda P - G_{(i)} \quad (11)$$



<그림 3> 호장법

$$\begin{bmatrix} K_{T(i)} & -P \\ 2\Delta u_{(i)}^T & 2\Delta \lambda_{(i)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \Delta u \\ \delta \Delta \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} G_{(i)} \\ \Delta l^2 - (\Delta u_{(i)}^T \Delta u_{(i)} + \Delta \lambda_{(i)}^2) \end{Bmatrix} \quad (12)$$

여기서,  $\delta \Delta u = \delta \Delta \lambda \delta \Delta u_1 + \delta \Delta u_2$ 로 표현되며 변위벡터 및 증분 파라미터는 다음과 같이 증분형태로 나타낸다.

$$\Delta u_{(i+1)} = \Delta u_{(i)} + \delta \Delta u \quad (13.1)$$

$$= \Delta u_{(i)} + \delta \Delta \lambda \delta \Delta u_1 + \delta \Delta u_2$$

$$\Delta \lambda_{(i+1)} = \Delta \lambda_{(i)} + \delta \Delta \lambda \quad (13.2)$$

식 (13.1)과 식 (13.2)를 정리하면 다음과 같은  $\delta \Delta \lambda$ 에 대한 2차 방정식이 된다.

$$a \delta \Delta \lambda^2 + 2b \delta \Delta \lambda + c = 0 \quad (14.1)$$

$$a = (\delta \Delta u_1^T \delta \Delta u_1 + 1) \quad (14.2)$$

$$b = (\delta \Delta u_1^T (\Delta u_{(i)} + \delta \Delta u_2) + \Delta \lambda_{(i)})$$

$$c = (\Delta u_{(i)} + \delta \Delta u_2)^T (\Delta u_{(i)} + \delta \Delta u_2) + \Delta \lambda_{(i)}^2 - \Delta l^2$$

식 (14) 스칼라 방정식을 풀음으로서  $\delta \Delta \lambda$ 가 구해진다.

$$\delta \Delta \lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} \quad (15)$$

식 (15)에서 (+), (-) 부호의 결정은 식 (13)에 대입하여 제 (i+1) 근사변위 증분벡터를 결정하고, 여기서의 변위 증분 벡터와 i 번째 근사변위 증분 벡터가 이루는 각  $\theta$ 을 구한다.

$$\Delta u_{(i+1)}^{(\pm)} = \Delta u_{(i)} + \delta \Delta \lambda^{(\pm)} \delta \Delta u_1 + \delta \Delta u_2 \quad (16.1)$$

$$\theta^{(+)} = \arccos \left( \frac{\Delta u_{(i)}^T \Delta u_{(i+1)}^{(+)}}{|\Delta u_{(i)}| |\Delta u_{(i+1)}^{(+)}|} \right) \quad (16.2)$$

$$\theta^{(-)} = \arccos \left( \frac{\Delta u_{(i)}^T \Delta u_{(i+1)}^{(-)}}{|\Delta u_{(i)}| |\Delta u_{(i+1)}^{(-)}|} \right)$$

두 값중 각도가 작은 쪽의 부호를 채택한다.

### 3. 재료비선형 모델

구조물의 부재에 좌굴이나 항복이 발생할 수 있는 트러스 구조물을 해석하기 위하여 본 논문에서는 <그림 1>에 나타낸 것과 같이 탄성모델(I), 비탄성모델(II) 및 잔류 변형을 고려한 이력모델(III) 3가지 형태의 응력-변형률 관계를 이용하도록 한다.

전 변형률  $\epsilon$ 는 탄성변형률  $\epsilon_e$  및 소성변형률  $\epsilon_p$ 로 분리 가능하며, 이에 따른 응력-변형률 관계는 다음과 같다.

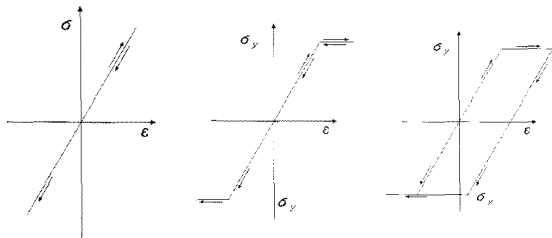
$$\epsilon = \epsilon_e + \epsilon_p \quad (17.1)$$

$$\sigma = E \epsilon_e \quad (17.2)$$

$$f = |\sigma| - \sigma_y \leq 0 \quad (17.3)$$

$$\epsilon_p = \frac{\partial f}{\partial \sigma} \Delta \lambda \quad (17.4)$$

위 식에서  $\sigma$ 는 부재의 응력,  $E$ 는 탄성계수,  $\sigma_y$ 는 항복응력,  $\Delta\lambda$ 는 소성파라메타를 의미한다. 식 (17.2)는 탄성구성식, 식 (17.3)은 항복조건식, 식 (17.4)는 관련소성흐름법칙을 각각 의미한다. 본 연구에서는 (a)탄성모델(I)과 (b)비탄성모델(II)을 채택하여 해석을 수행하였다.



(a)탄성모델(I) (b)비탄성모델(II) (c)이력모델(III)  
 <그림 4> 응력-변형률 관계

### 4. 기하학적 비선형 변형률

트러스 요소의 변형률을 고려하기 위한 변형 전 부재의 길이를  $ds$ , 변형 후의 부재 길이를  $ds'$ 로 가정하면  $ds$ 와  $ds'$ 의 관계를 아래의 식으로 쓸 수 있다.

$$(ds')^2 - ds^2 = dx'_i dx'_i - dx_i dx_i \tag{18}$$

여기서  $ds'$ 는 변형 후의 부재의 길이 이므로 변위  $u_i$ , 변형후의 부재좌표  $x'_i$ 와  $dx'$ 의 관계식은 식 (19)과 식 (20)으로 표현 할 수 있다.

$$x'_i = u_i + x_i \tag{19}$$

$$dx'_i = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} dx_j = \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \delta_{ij} \right) dx_j \tag{20}$$

식 (20)에서  $\delta_{ij}$ 는  $(i=j)$ 일 때 1이고,  $(i \neq j)$ 일 때 0인 크로넬커 델타를 나타낸다. 식 (19), 식 (20)을 식 (18)에 대입하면 증분변위는 식 (21)로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} (ds')^2 - ds^2 &= (u_{i,k} + \delta_{ik})(u_{j,k} + \delta_{jk}) dx_j dx_k - dx_i dx_i \\ &= (u_{i,k} u_{i,j} + u_{j,k} + u_{k,j}) dx_j dx_k \end{aligned} \tag{21}$$

식 (21)에서  $(u_{i,k} u_{i,j} + u_{j,k} + u_{k,j})$ 를  $2\epsilon_{jk}$ 로 가정할 때

변형률은 다음 식으로 나타낼 수 있다.

$$\epsilon_{jk} = \frac{1}{2}(u_{i,k} u_{i,j} + u_{j,k} + u_{k,j}) \tag{22}$$

여기서  $\epsilon_{jk}$ 는 그린 변형률(Green strain)을 나타내며, 트러스 요소의 축방향의 변형률은 다음과 같은 그린 변형률로 유도 된다.

$$\begin{aligned} \epsilon_{x,x} &= u_{x,x} + \frac{1}{2}(u_{x,x}^2 + u_{y,x}^2 + u_{z,x}^2) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \end{aligned} \tag{23}$$

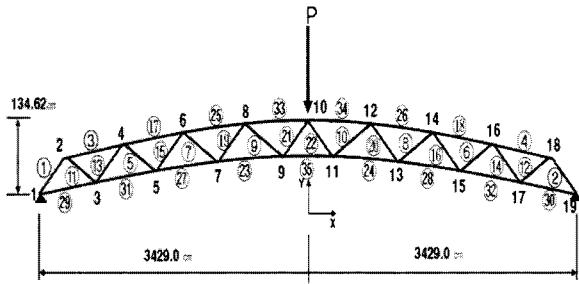
위의 식에서 축방향의 2차항  $(\frac{\partial u}{\partial x})^2$ 을 고려하지 않게 되면 일반적인 공학 변형률(Engineering strain)이 된다. 본 연구에서는 대변형을 대상으로 하므로 축방향의 2차항  $(\frac{\partial u}{\partial x})^2$ 을 고려한 그린 변형률(Green strain)을 해석에 적용하도록 한다. 또한 변형률의 축방향의 2차항  $(\frac{\partial u}{\partial x})^2$ 이 해석 결과에 미치는 영향을 파악하기 위해 수치해석 예제를 통해 구조물의 하중-변위 관계를 두 변형률을 사용하여 비교하도록 한다.

### 5. 수치해석 및 결론

본 논문에서는 제안된 유한요소 및 재료모델의 신뢰성을 검토하기 위하여 평면 트러스인 아치트러스와 스타 트러스에 대해 기하학적 비선형 변형률은 식 (23), 재료적 비선형 모델은 <그림 4>의 (a),(b) 모델을 채택하여 해석을 수행하였다. 평가 및 검증 을 위하여 범용 유한요소 프로그램인 ABAQUS<sup>12)</sup>의 해석 결과와 비교하였으며, 해석 결과를 토대로 구성 부재가 점차 좌굴하거나 항복함에 따라 트러스 구조물의 전체 불안정 메커니즘을 평가 하였다.

#### 5.1 아치 트러스

첫 번째 해석 모델인 아치 트러스는 <그림 5>와 같은 형태이며 기하학적 불안정성이 구조물에 미치



〈그림 5〉 아치 트러스의 기하학적 형상 및 하중 조건  
 는 영향을 연구하기 위하여 Rosen과 Schmit에 의하여 고안되었다. 아치 트러스 모델은 35개의 부재와 19절점으로 이루어져 있다. 탄성계수는  $70.3\text{ GPa}$ 이며, 항복응력  $\sigma_y$  값은  $4\text{ MPa}$ 이다. 부재의 절점좌표와 단면적은 표 1에 나타내었다.

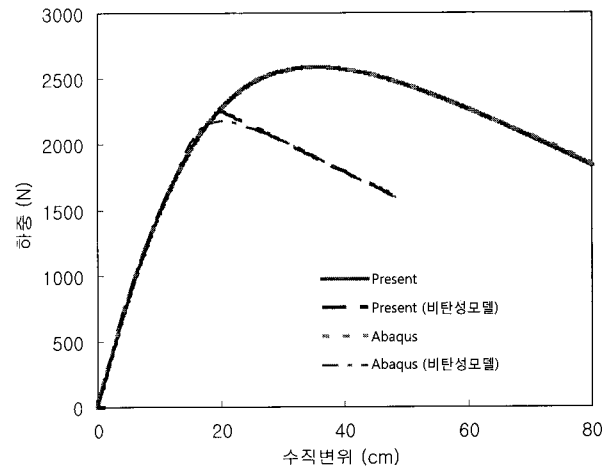
〈표 1〉 아치 트러스 절점의 좌표

절점 번호	X-coord. (cm)	Y-coord. (cm)	부재번호	단면적 (cm <sup>2</sup> )
1, 19	±3429.0	0.0	1~10, 35	51.61
2, 18	±3408.0	56.65	11, 12	64.52
3, 17	±2667.0	34.75	13~16	83.87
4, 16	±2286.0	83.82	17, 18	96.77
5, 15	±1905.0	65.30	19~22	103.23
6, 14	±1524.0	110.85	23, 24	161.29
7, 13	±1143.0	87.99	25, 26	193.55
8, 12	±762.0	128.50	27, 28	258.06
9, 11	±381.0	100.05	29~32	290.32
10	±0.0	134.62	33, 34	309.68

〈그림 6〉은 아치 트러스의 탄소성 해석 결과를 나타낸 그래프이다. 평면 트러스인 아치 트러스에 대해 본 연구의 해석 결과와 범용 해석 프로그램인 ABAQUS 해석 결과와 비교를 하였다.

기하학적 비선형성만 고려하였을 때 본 연구의 좌굴 하중 값은  $2588\text{ N}$ 이며, ABAQUS 해석 결과 좌굴 하중 값은  $2560\text{ N}$ 이다. 본 연구와 거의 잘 일치하였다. 또한 선행 연구자인 Kondoh & Atluri(11)의 좌굴 하중 값은  $2640\text{ N}$ 으로 본 연구의 해석 결과 값과 1.96%의 차이를 보이고 있다.

기하학적 비선형성과 재료적 비선형성을 함께 고려하였을 때 본 연구의 좌굴 하중 값은  $2247\text{ N}$ 이며, ABAQUS 해석 결과 좌굴 하중 값은  $2149\text{ N}$ 이다. 오차율은 4.5%로 기하학적 비선형성만 고려하였을 때

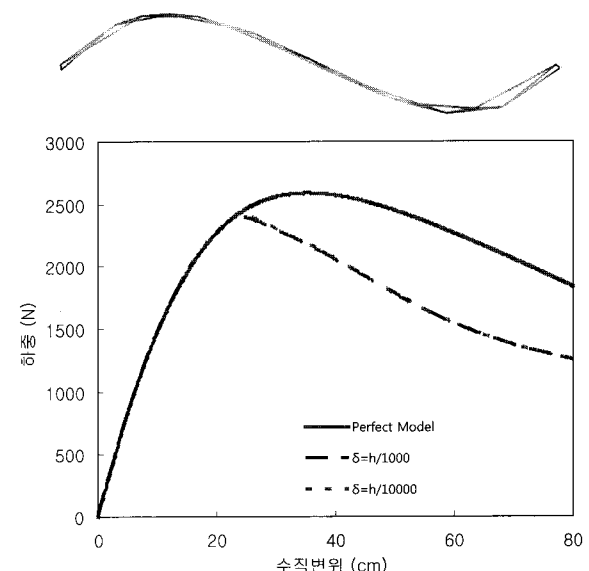


〈그림 6〉 아치 트러스 탄소성 해석

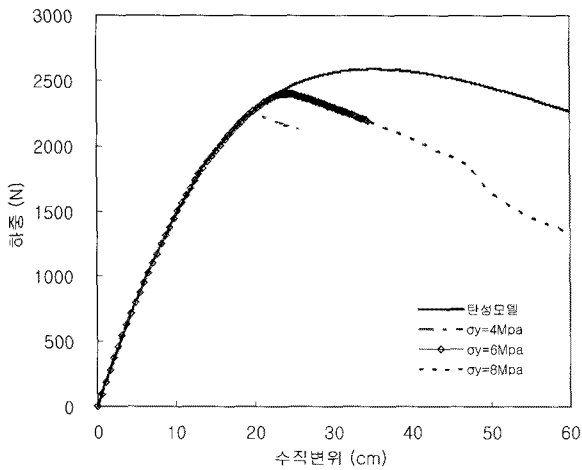
보다 다소 큰 차이를 보이고 있다.

아치 트러스는 비탄성 모델을 사용하면 탄성 모델 해석 결과 보다는 약 15%정도의 좌굴 하중 감소를 나타낸 것을 알 수 있다.

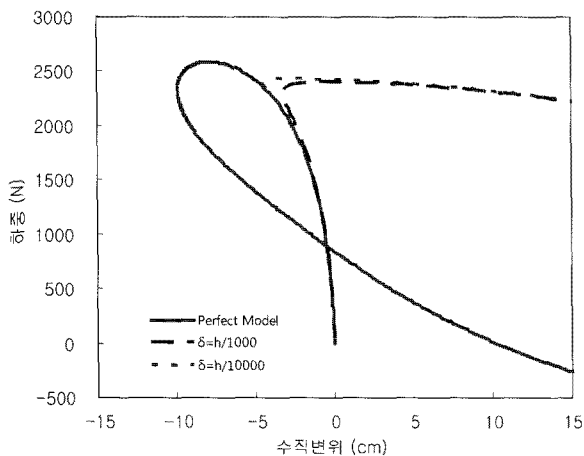
〈그림 7〉은 아치 트러스 모드1의 형태 및 모드1의 초기불완전 형태에 대한 10번 절점의 하중-수직변위 관계를 나타내고 있다. 완전 모델의 좌굴 하중 값은  $2588\text{ N}$ 이다. 초기불완전  $\delta$ 는 좌굴해석을 통해 얻은 좌굴모드를 나타내도록 모든 절점에 적용하였다. 이는 실제 대공간 구조물에서는 전체적인 좌굴이 구조물의 안정성을 감소시키는 요인이므로 초기불완전 정도를 좌굴해석으로 정하였다.  $\delta$  값이  $h/1000$ 일 때 좌굴 하중 값은  $2400\text{ N}$ 이며,  $\delta$  값이  $h/10000$ 일 때 좌



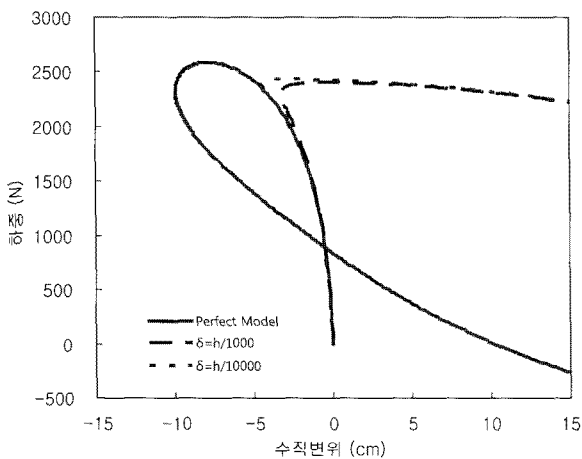
〈그림 7〉 모드1 초기불완전 형태에 대한 하중-변위 관계



<그림 8> 모드1 초기불완전 형태의 항복응력에 따른 하중-변위 관계( $\delta=h/1000$ )



<그림 9> 모드1 초기불완전 형태에 대한 하중-변위 관계



<그림 10> 모드1 초기불완전 형태의 항복응력에 따른 하중-변위 관계( $\delta=h/1000$ )

굴 하중 값은  $2430N$  이다. 아치 트러스의 경우 완전 모델의 좌굴 하중 값과 모드1의 좌굴 하중 값은 7%의 차이를 보이고 있다.

<그림 8>은  $\delta$  값이  $h/1000$ 일 때 아치 트러스 모드1 초기불완전 형태의 항복응력에 따른 10번 절점의 하중-변위 관계를 나타내고 있다.

탄성모델의 좌굴하중 값은  $2588N$ 이며, 항복응력이  $4MPa$ 일 때 좌굴하중은  $2230N$ , 항복응력이  $6MPa$ 일 때 좌굴하중은  $2401N$ , 항복응력이  $8MPa$ 일 때 좌굴하중은  $2401N$  이다. 항복응력이 감소함에 따라 좌굴하중도 감소함을 보였으나, 항복응력이  $6MPa$ ,  $8MPa$  일 때 좌굴하중 값은 일치하였다.

<그림 9>는 아치 트러스의 모드1의 초기불완전 형태에 대한 4번 절점의 하중-수직변위 관계를 나타낸다. 절점 4의 수직 변위를 고려하면 절점 10이 한계점에 도달하기 전 부재가 압축응력을 받을 경우 절점 4는 구조물의 외곽으로 변위를 일으킨다. 하지만 절점 10이 한계점을 지나면 다시 원상회복 되어 제 자리로 돌아오다가 다시 한 번 하중에 저항하기 시작하는 부분에서 인장력을 받아 이전과는 반대방향으로 절점 4의 변위가 나타난다. 이러한 거동을 스냅백(Snap-Back) 거동이라 하며 구조물의 변위가 한 방향으로 진행하다가 주변 부재 거동의 영향으로 다시 변위의 진행 방향이 바뀌는 것을 의미한다.

완전 모델의 좌굴 하중 값은  $2588N$  이다.  $\delta$  값이  $h/1000$ 일 때 좌굴 하중 값은  $2400N$ 이며,  $\delta$  값이  $h/10000$ 일 때 좌굴 하중 값은  $2430N$  이다. 4번 절점의 경우는 10번 절점의 좌굴 하중 값과 일치 하지만 10번 절점은 하중-변위 곡선에서 뚫좌굴(Snap-through) 현상이 나타나며 4번 절점은 스냅백(Snap-Back) 현상을 나타내고 있다. 완전 모델의 좌굴 하중 값과 모드1의 좌굴 하중 값은 7%의 차이를 보이고 있다.

<그림 10>은  $\delta$  값이  $h/1000$ 일 때 아치 트러스 모드1 초기불완전 형태의 항복응력에 따른 4번 절점의 하중-변위 관계를 나타내고 있다. 탄성모델의 좌굴하중 값은  $2588N$ 이며, 항복응력이  $4MPa$ 일 때 좌굴하중은  $2249N$ , 항복응력이  $6MPa$ 일 때 좌굴하중은  $2401N$ , 항복응력이  $8MPa$ 일 때 좌굴하중은  $2401N$  이다. 10번 절점에서와 같이 항복응력이 감소함에 따라 좌굴하중도 감소함을 보였으나, 항복응력이

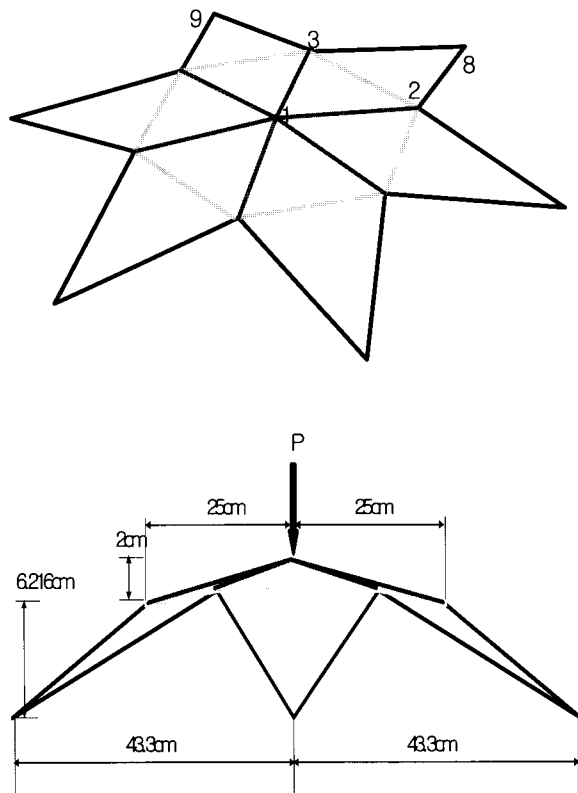
6MPa, 8MPa 일 때 좌굴하중 값은 일치 하였다.

<표 2> 스타형 트러스 절점의 좌표

	X-coord. (cm)	Y-coord. (cm)	Z-coord. (cm)
1번 절점	0.000	0.000	0.000
2번 절점	25.000	2.000	0.000
3번 절점	12.500	2.000	21.650
8번 절점	43.300	8.216	25.000
9번 절점	0.000	8.216	50.000

### 5.2 스타형 트러스

<그림 11>에서 보여주는 스타형 공간 트러스 구조는 대공간 셸트러스 해석의 검증에 위해 많이 쓰이는 모델이다. 스타형 공간 트러스 구조는 24개의 부재, 13개의 절점으로 구성되어 있다. 13개의 절점 중 6개의 절점이 고정되어 있고 7개의 절점이 힌지로 구성되어 있는 21개의 자유도를 가진 트러스 구조물이다. 부재 각각의 단면적은  $0.1\text{cm}^2$ , 탄성계수는  $203.4\text{GPa}$ 이다. 스타 트러스의 항복응력  $\sigma_y$  값은  $150\text{MPa}$ 로 정하였다. 하중 조건은 구조물의 중앙 상

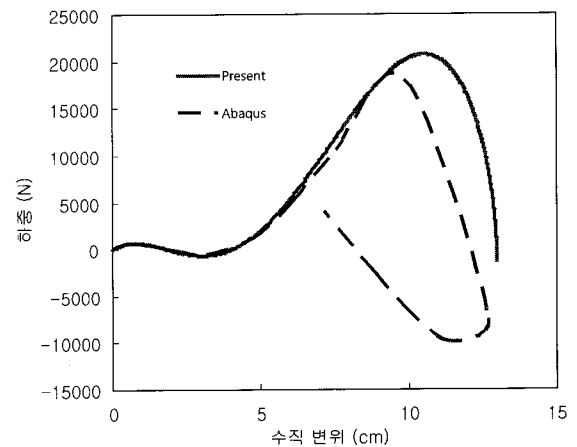


<그림 11> 스타형 트러스 기하학적 형상 및 하중 조건

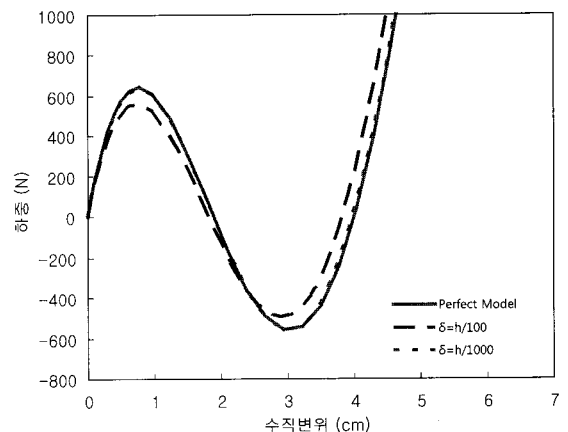
단인 1번 절점에 집중 하중이 작용하는 대칭하중 조건에 대해서 해석을 하였다.

본 논문의 결과와 비교, 검토하기 위해 사용한 유한요소 해석 프로그램은 범용 유한 요소 프로그램인 ABAQUS이다. 해석에 사용된 요소는 T3D2요소로써 2절점을 갖는 트러스 요소이다. ABAQUS의 재료 비선형 거동은 폰미세스 항복조건 및 등방성 경화모델에 의하였다. 변형률 고려에 있어서는 축방향 2차항을 고려하지 않은 공학변형률을 사용하였다. 호장법에 속한 RIKS 알고리즘을 사용하여 좌굴 이후 경로까지 해석을 수행하였다.

<그림 12>는 1번 절점에서의 하중-수직변위 관계를 나타내고 있다. 그래프는 미세소 단순 트러스와 같은 뽀좌굴(Snap-through) 현상을 보여주고 있다. 본 연구의 결과의 좌굴 하중 값은  $643\text{N}$ 이며, ABAQUS 해석 결과는  $645\text{N}$ 의 값을 보이고 있다. 또한 기존의 선행

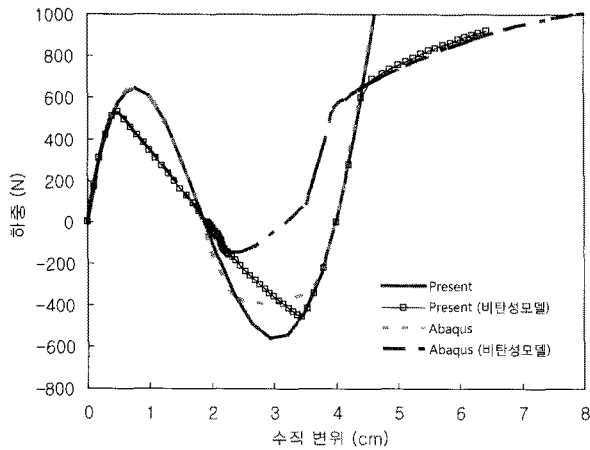


<그림 12> 1번 절점에서의 하중-변위 관계



<그림 13> 2번 절점에서의 하중-변위 관계





〈그림 14〉 1번 절점 탄소성 해석 하중-변위 관계

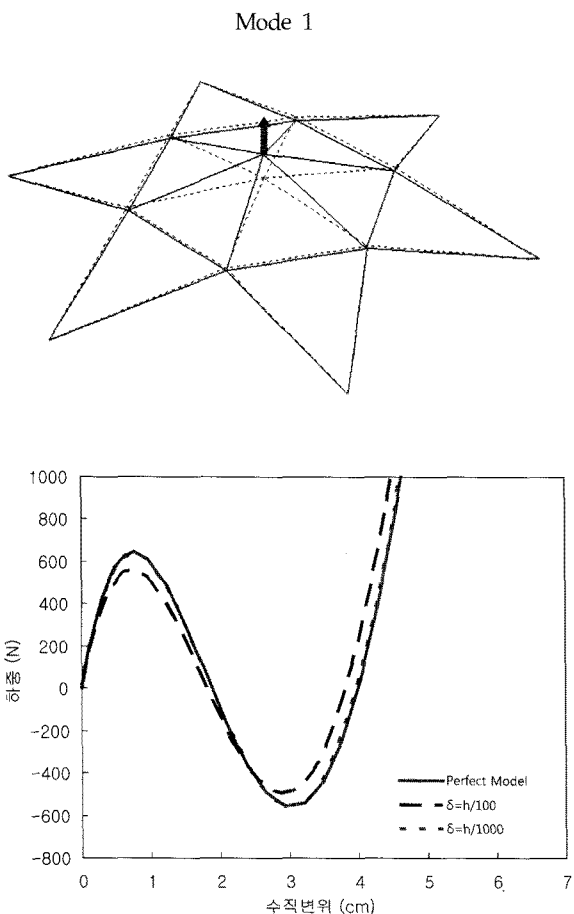
연구자인 Hill(10)의 해석 결과 값 650N 과 잘 일치한다는 것을 알 수 있다. 각 해석 결과의 오차율은 0.32~1.1%로 정확성의 차이는 미소한 것으로 나타났다.

〈그림 13〉은 절점 1에 집중하중이 작용하여 큰 변위가 일어났을 때 절점 2의 하중-수직 변위를 나타낸 것이다. 2번 절점에서 모드1의 하중-변위 그래

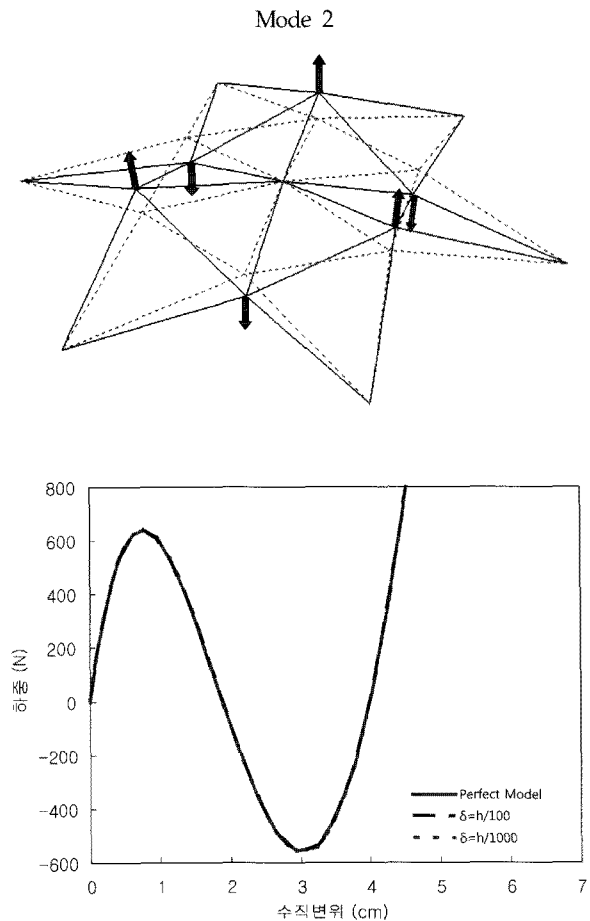
프의 거동은 스냅백 현상을 나타내고 있다.

〈그림 14〉는 절점 1에서의 탄소성 해석 결과 값을 나타낸 그래프로 스타형 트러스에 재료적 비선형 모델인 비탄성모델(II)을 적용한 해석결과이다. 항복응력  $\sigma_y$  값은 150MPa로 본 연구의 좌굴 하중 값은 530N이며, ABAQUS 해석 결과는 521N으로 1.6%의 오차율을 보이고 있어 정확성의 차이는 미소한 것으로 나타났다. 비탄성 해석 결과에서 본 연구와 ABAQUS의 해석 결과를 비교 하였을 때 초기 좌굴하중 값은 거의 일치하였으나 후속 좌굴 하중 값은 큰 차이를 보이고 있다. 이는 ABAQUS 해석에서는 소성변형률을 고려하여 해석 하기 때문이다. 비탄성모델을 사용하면 탄성모델 해석결과 보다는 약 20% 정도의 좌굴하중 감소를 나타내었다.

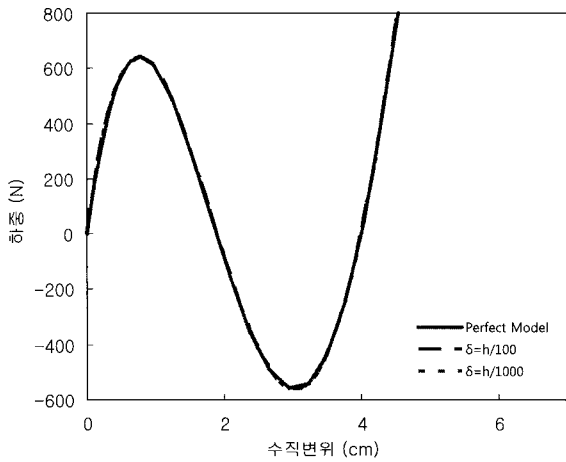
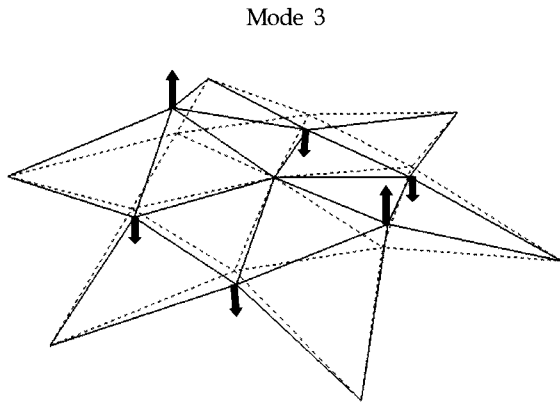
다음은 스타 트러스의 절점 1에 집중 하중이 가해질 때 좌굴 모드 형상에 따라 민감도의 차이가 어떻게 나타나는지 알아보았다. 3차 모드까지 해석을



〈그림 15〉 모드1 초기불완전 형태에 대한 하중-변위 관계



〈그림 16〉 모드2 초기불완전 형태에 대한 하중-변위 관계



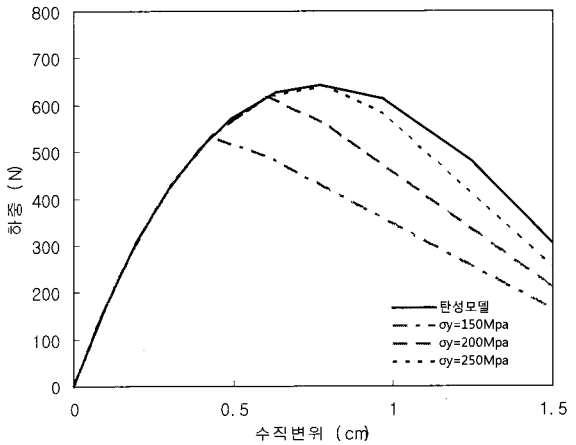
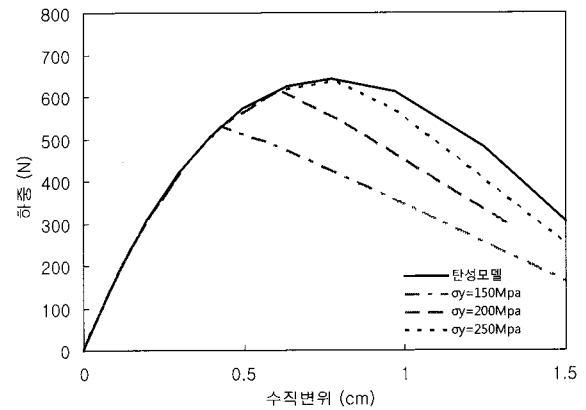
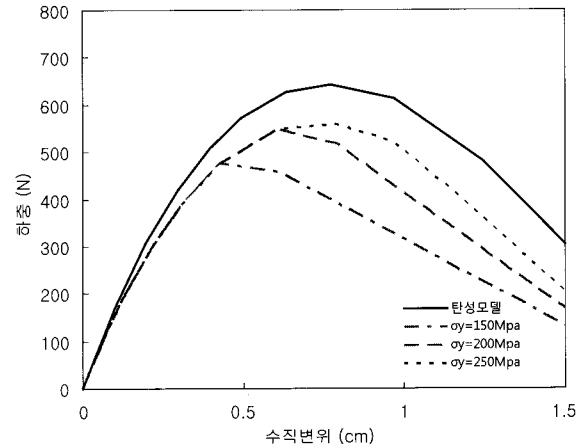
<그림 17> 모드3 초기불완전 형태에 대한 하중 변위 관계 수행하였으며 초기불완전의 정도에 따라 하중-변위 관계를 확인하였다.

본 논문에서는  $\delta$  는  $h/100$ 과  $h/1000$ 으로 하여 해석 하였다. <그림 15>는 모드1의 형태 및 모드1의 초기불완전 형태에 대한 1번 절점의 하중-수직변위 관계를 나타내고 있다. 모드1에서는 1번 절점이 z축 방향으로 올라간 형태를 나타내고 있다.

완전 모델의 1번 절점에서의 하중-수직변위 값과 초기불완전의 정도에 따른 민감도 해석을 하였다. <그림 15>의 그래프에서 나타난 결과를 보면 완전 모델의 좌굴 하중 값은 643N이다.  $\delta$  값이  $h/100$ 일

<표 3> 스타형 트러스 1,2,3차 모드 1번 절점 좌굴 하중 비교

	Perfect Model	$\delta = h/1000$	$\delta = h/100$
Mode 1	643N	633N	559N
Mode 2	643N	641N	637N
Mode 3	643N	641N	637N



<그림 18> 모드1,2,3 초기불완전 형태의 항복응력에 따른 하중-변위 관계( $\delta = h/100$ )

때 좌굴 하중 값은 559N이며,  $\delta$  값이  $h/1000$ 일 때 좌굴 하중 값은 633N 이다. 결과에서 알 수 있듯이 완전 모델의 해석 결과 값과  $\delta$  값이  $h/100$ 일 때의 좌굴 하중 오차는 15%이고,  $\delta$  값이  $h/1000$ 일 때 좌굴 하중 오차는 15%이다.

<그림 16>은 모드 2의 형태 및 모드 2의 초기불완전 형태에 대한 1번 절점의 하중-수직변위 관계를 나타내고 있다. 2, 4, 6번 절점은 z축 방향으로 내

려간 형태를 보이고 있으며, 3,5,7번 절점은 z축 방향으로 올라간 형태를 나타내고 있다. 1번 절점은 거의 변화가 없는 것으로 나타났다. 결과에서 알 수 있듯이 완전 모델의 해석 결과 값과 초기불완전의 정도에 따른 해석 결과 값은 거의 일치하는 것으로 나타났다.

<그림 17>은 모드3의 형태 및 모드3의 초기불완전 형태에 대한 1번 절점의 하중-수직변위 관계를 나타내고 있다. 2, 3, 5, 6번 절점은 z축 방향으로 내려간 형태를 보이고 있으며, 4, 7번 절점은 z축 방향으로 올라간 형태를 나타내고 있다. 모드2와 같이 완전 모델의 해석 결과 값과 초기불완전의 정도에 따른 해석 결과 값이 거의 일치하는 것으로 나타났다.

<그림 18>은  $\delta$  값이  $h/100$ 일 때 1,2,3차모드에 대하여 항복응력에 따른 하중-변위 관계를 나타내고 있다. 항복응력 값이 작아짐에 따라 좌굴하중 값이 작아지는 결과를 보이고 있는데 이는 항복응력이 값이 작을수록 부재가 먼저 항복에 도달하기 때문이라고 사료된다.

## 6. 결론

본 논문에서는 기하학적 비선형에 대한 수치해석 방법으로서 크리스필드법을 대상으로 하였으며, 부재의 응력-변형률 관계를 이용한 재료비선형성을 고려하였다. 또한 좌굴 모드 형상을 통해 구조물의 민감도를 분석하였다.

선행 연구된 트러스 구조물을 통해 본 논문의 해석 결과를 범용 유한요소 해석 프로그램인 ABAQUS 결과 그리고 선행 연구자의 해석 결과와 비교, 검토하였다.

평면 및 공간 트러스 구조물에 대한 해석을 통해서 구조물의 형상 및 탄소성해석에 따른 트러스 구조의 비선형적 거동에 관해 다음과 같은 결론을 내렸다.

- (1) 본 연구의 해석 결과와 선행 연구자의 해석 결과 및 범용 유한요소 해석 프로그램인 ABAQUS의 해석 결과를 비교한 결과 하중-변위 관계의 좌굴하중 값의 결과가 잘 일치하여 정확성을 입증할 수 있었다.

- (2) 스타 트러스의 경우 대칭 구조로서 1번 절점에 대칭하중 재하시, 1,2번 절점에 비대칭 하중 재하 시 모두 완전 모델과 1, 2, 3차 모드 경우 초기 불완전 정도에 따라 하중-변위 관계의 차이가 크지 않아 스타 트러스는 민감하지 않다고 판단된다.

- (3) 아치 트러스의 경우 완전 모델의 경우 전형적인 스냅백 거동을 보인 것과는 달리 초기불완전 정도에 따라 스냅백 거동을 보이다 갑자기 부재가 항복하는 거동을 보여 1차 모드에서 완전 모델의 하중-변위 경로와 많은 차이를 보였다. 그러므로 실제의 거동을 정확히 예측하기 위해서는 초기불완전에 따른 해석이 수행되어야 한다.

- (4) 평면 및 공간 트러스 구조물의 불안정 현상, 즉 좌굴 현상과 함께, 구조물을 구성하는 부재의 좌굴을 고려하였을 때 좌굴하중이 감소함을 보였다. 이를 통하여 구조시스템이 불안정한 상태로 이동하는 동안 시스템을 형성하는 부재들이 서서히 파괴되는 양상은 기하학적 비선형 및 재료적 비선형의 문제, 즉 복합 비선형 해석이 반드시 필요것으로 판단된다.

본 논문은 평면 및 공간 트러스 구조물을 대상으로 기하학적 비선형성과 재료적 비선형성에 의한 해석에 국한 되었으며 대칭적 구조형상을 고려한 수치해석 모델을 사용하였으나, 실제 구조물의 정확한 거동 예측을 위해 구조형상의 비대칭성 및 실제 다절점 구조물을 대상으로 연구를 진행 나갈 예정이다.

## 감사의 글

본 연구는 건설교통부 첨단도시개발사업의 연구비 지원(과제번호#06 R&D B03)에 의해 수행되었으며 이에 감사를 드립니다.

## 참고문헌

1. Z. S. Makowski, Analysis Design and Construction of Double Layer Grids, Halsted

- Press, Jhon Wiley and Sons, N. Y. 1981
2. G. Davis and B. G. Neal, "The Dynamical Behavior of a Struct in a Truss Frame Work", Proceedings of the Royal Society, A253, 1959, pp. 542-562
  3. L. Berke and R. H. Mallet, "Automated Large Deflection and Stability Analysis of Three-Dimensional Structures", Structures Technology for Large radio and Radar Telescope System, I. Mar and H. Leibowitz. eds., MIT Press, Huntisville, Ala., 1969, pp343-381
  4. R. H. Mallet and L. A. Schmit, "Nonlinear Structural Analysis by Energy Sense", J. Struct. Division, ASCE, Vol. 93, No. ST6, June, 1967, pp. 221-234
  5. J. P. Wolf, "Post-buckled Strength of Large Space Trusses", J. Struct. Division, ASCE, Vol. 99, 1973, pp. 1708-1721
  6. C. Cichon and L. Corradi, "Large Displacement Analysis of Elastic-Plastic Trusses with Unstable Bars", Engrg. Struct., Vol. 3, oct., 1981, pp 210-218
  7. M. Papadrakakis, "Inelastic Post-Buckling Analysis of Trusses", J. Struct. Division, ASCE, Vol. 109, No. 9, Sept. 1983, pp 2129-2147
  8. 김광중, 백기열, 이재흥, "호장법을 이용한 평면 트러스 구조의 비탄성 비선형 해석", 한국공간구조학회 논문집, 2008. 2, PP.41-48
  9. M. A. Crisfield, Non-linear element analysis of solids and structure, Vol.1, Jhon Wiley & Sons, 1991
  10. Hill, C.D., Blandford G.E., Wang S.T., "Poat-buckling Analysis of steel Space Trusses", J. Struct. ASCE, Vol. 115, No. 4, Sept. 1983, pp 2129-2147
  11. K. Kondoh and S. N. Atluri, "Influence of local buckling on global instability: Simplified, Large deformation, Post-buckling analysis of plane trusses", Center for the advancement of computational mechanics, School of Civil Engineering, Georgia Institute of Technology, Atlanta, GA 30332, U.S.A.
  12. ABAQUS Version 6.5 Manual

접수일자 : 2008년 4월 24일

심사완료일자 : 2008년 10월 1일

게재확정일자 : 2008년 10월 10일