

비와 비율 지도에 대한 연구¹⁾ -교과서 재구성을 중심으로-

김수현*·나귀수**

본 연구에서는 비와 비율의 교수·학습과 관련된 선행 연구를 고찰하고, 현행 초등학교 교과서의 문제점을 분석하였다. 선행 연구 고찰과 현행 교과서의 문제점 분석을 토대로 교과서를 새롭게 재구성하였으며, 재구성된 교과서를 활용하여 실제 교수·학습을 실시하고 그 과정에서 나타난 재구성 교과서의 적절성과 한계, 학생들의 비와 비율 개념화 과정 등을 확인하였다. 현행 교과서와 다르게, 본 연구의 재구성 교과서에서는 비율, 백분율과 비의 값, 비로 지도 순서를 바꾸었으며, 이는 적절한 것으로 확인되었다. 또한 재구성 교과서에서는 상대 비교와 절대 비교, 가법적 사고와 승법적 사고 등을 다루었으며, 이는 학생들의 비와 비율 개념 이해에 도움을 주는 것으로 확인되었다. 한편, 재구성 교과서에 제시된 다양한 맥락들 중에서 일부 맥락은 학생들의 인지적 혼란을 야기하는 것으로 확인되었다.

1. 들어가며

학생들은 학교에서 비와 비율을 학습하기 이전에 이미 일상생활에서 비와 비율과 관련된 다양한 현상들을 접한다. 학생들은, 예를 들어, 인구 조사에서 남자 100명당 여자의 수나 인구 증가율과 같은 통계 자료에 나타난 수치, 3×4나 4×6과 같은 사진의 크기, 지도에서의 축척, 과자에 들어 있는 재료들 사이의 비율, 거리와 시간의 관계, 야구 선수의 타율, 여러 가게의 물건값의 비교, 물건 세일에서의 할인율 등과 같은 다양한 현상들을 접한다. 학생들은 비와 비율과 관련된 이와 같은 다양한 현상들을 경험함으로써 비와 비율에 대한 암묵적인 직관을 가지게 된다.

NCTM(2000)에서는 비와 비율 개념을 통합적 주제로서 강조하고 있다. 비와 비율 개념은, 님, 정비례와 반비례, 그래프의 기울기, 상대도수, 히스토그램, 확률 등의 학습에서 매우 중요하다. NCTM(2000)에서는 문제해결과 추론에서도 비와 비율 개념을 토대로 하는 비례적 사고가 매우 중요하며, 다양한 수학적 주제들을 연결하고 과학이나 예술과 같은 다른 영역들과 수학을 연결함에 있어서도 비와 비율, 비례가 매우 중요한 주제임을 강조하고 있다. 그럼에도 불구하고, 학생들의 비와 비율 개념 이해 정도는 매우 미흡한 상태인 것으로 알려져 있다(박정 외, 2001; 유현주, 1995; Karplus et al., 1983; Noelting, 1977; Streefland, 1985).

본 연구는, 현행 초등학교 6-가 단계의 '비와 비율' 단원의 내용이 비와 비율을 의미 충실하

* 윤천초교, khyun007@hanmail.net

** 청주교대, gsna21@cje.ac.kr

1) 이 논문은 김수현의 석사학위논문 일부분을 재구성한 것임.

게 지도하고 학습하는 데에 적절하지 않다는 문제의식으로부터 비롯되었다. 본 연구는 초등학교 현장에서 교사로 재직하고 있는 본 연구자가 수학 수업을 실시하면서 직면한 어려움을 해결하려는 시도로서 시작되었다. 본 연구자는 초등학교 6학년 학생들에게 비와 비율 단원을 지도하는 데에 많은 어려움을 느꼈다. 6학년에서 다루는 다른 단원에 비해, 비와 비율 단원은 교사의 입장에서 수업이 충실하게 진행되지 않았으며 학생들 또한 비와 비율 개념을 의미 있게 이해하는 데에 많은 어려움을 겪었다.

본 연구는 선행 연구 고찰을 토대로 현행 교과서의 비와 비율 단원의 문제점을 분석하고, 이를 개선하기 위해 교과서를 재구성하고 재구성된 교과서를 활용하여 실제 수업을 실시하는 데에 그 목적이 있다. 또한 재구성된 교과서를 활용한 실제 교수·학습 과정에서 나타나는 여러 가지 특징을 보고하고 분석하는 데에 그 목적이 있다. 본 연구의 연구 문제를 질문의 형태로 구체적으로 진술하면 다음과 같다.

- (1) 현행 교과서에서 다루는 비와 비율 내용의 문제점은 무엇이며, 현행 교과서의 개선 방안은 무엇인가? 비와 비율을 의미 있게 지도하기 위해 교과서를 어떻게 재구성할 것인가?
- (2) 재구성한 교과서를 활용한 실제 비와 비율 개념의 교수·학습에 과정에서 나타나는 특징은 무엇인가? 다시 말해서, 재구성된 교과서를 활용한 교수·학습에서 나타나는 학생들의 개념화 과정의 특징, 재구성 교과서의 적합성과 한계 등은 무엇인가?

II. 연구 방법

본 연구에서는 선행 연구 고찰을 토대로 현

행 교과서의 비와 비율 단원의 문제점을 분석하고, 이를 개선하기 위해 교과서를 재구성하여 실제 수업을 실시하고, 그 과정에서 나타난 여러 가지 특징들을 보고하고 분석하는 것을 주요 내용하고 있다. 본 연구는, 재구성 교과서를 활용하여, 초등학교의 정규 학교 환경에서 정규 수업 시간에 정규 학생들을 대상으로 비와 비율을 실제로 지도하고 그 과정을 보고하고 분석한다는 데에 그 독창성이 있다고 할 수 있다.

1. 연구 대상

본 연구의 첫 번째 대상은 현행 초등학교 교과서 수학 6-가의 비와 비율 단원의 1-3차시 내용이다. 본 연구에서는 선행 연구 고찰을 토대로 현행 초등학교 교과서의 비와 비율 단원 1-3차 내용의 문제점을 분석하였다.

본 연구의 두 번째 대상은 본 연구자들이 재구성한 교과서이다. 본 연구에서는 재구성한 교과서가 실제 초등학교 6학년 학생들에게 적합한 것인지, 학생들이 비와 비율 개념을 의미 있게 학습하는 데에 도움을 주는지 등을 확인 할 것이다. 이를 위해서 재구성 교과서를 활용한 실제 교수·학습 과정을 분석할 것이며, 이 과정에는 수업에 참여하는 교사와 학생들이 필연적으로 포함된다.

본 연구에서 재구성한 교과서를 활용하여 실제 수업을 실시한 교사는 본 연구자들 중의 한 명으로서, 초등학교 교사 경력은 5년이며 최근 3년간 6학년을 담당했다. 재구성 교과서를 활용한 실제 교수·학습 과정에 참여한 학생들은, 본 연구자가 담임을 맡고 있는 6학년 학급의 학생들이다. 이 학생들은 남학생 16명, 여학생 17명으로, 총 33명으로 구성되어 있다. 이 학생들이 다니고 있는 학교는 우리나라의 중소

도시에 위치해 있으며, 학생들의 학력 수준과 사회·경제적 수준은 중위 수준에 해당한다.

2. 연구 방법 및 절차

본 연구에서는 먼저 비와 비율 개념의 의미 충실한 지도를 위한 시사점을 이끌어내기 위해, Freudenthal(1983), Karplus et al.(1983), Lamom(1999), Lesh et al.(1988), Noelting(1980), Piaget et al.(1977), Streefland(1985), 장혜원(2002), 정은실(2003a, 2003b), 유현주(1995) 등의 선행 연구를 고찰하였다. 선행 연구 결과를 토대로 현행 교과서의 문제점을 분석하였으며, 현행 교과서의 문제점을 개선하기 위한 교과서를 재구성하였다. 교과서를 재구성함에 있어서는 선행 연구 결과와 Freudenthal(1983)의 현실주의 수학교육론을 구현한 교과서로 알려져 있는 'Mathematics in Context(이하 MiC로 칭함)'의 'Ratios and Rates', 'Per Sense', 'Comparing Quantities'(Britannica, 2001a, 2001b, 2001c)의 내용을 참고하였다.

재구성된 교과서를 활용한 교수·학습은 초등학교 정규 수학 수업의 일환으로 이루어졌다. 재구성 교과서를 활용한 수업은, 현직 교사인 본 연구자들 중의 한 명이 자신이 담당하고 있는 초등학교 6학년 학생들을 대상으로 실시하였다. 본 연구에서의 수업은 재구성 교과서를 활용한 일종의 교수 실험의 성격을 갖기 때문에, 재구성 교과서를 심도 있게 이해하고 있는 본 연구자들 중의 한 명이 직접 수업을 실시하는 것이 적절하다고 판단했기 때문이다.

재구성 교과서를 활용한 실제 수업에서, 교사는 재구성 교과서를 그대로 따라가면서 학급 전체 학생들을 대상으로 설명을 하는 전형적인 강의식 수업을 실시하였다. 개별 학생들은 교사의 설명을 듣고 재구성 교과서의 질문에 답

하는 방식으로 학습하였다. 재구성 교과서를 활용한 실제 수업에서 강의식 수업 방식을 택한 것은, 소집단 수업, 탐구 수업 등의 수업 운영 방식이 재구성 교과서를 활용한 비와 비율 교수·학습 과정에 미치는 영향을 최대한 배제하기 위해서였다.

3. 자료 수집 및 분석

본 연구에서는, 먼저 현행 초등학교 6과 교과서의 비와 비율 단원 1~3차시의 내용을 분석하여 교과서를 재구성하였다. 다음으로, 재구성 교과서의 적합성과 한계를 확인하기 위하여, 재구성 교과서를 활용한 교수·학습의 전 과정이 녹화된 비디오/오디오 자료와 학생들의 학습 활동지를 분석하였다.

본 연구에서는 재구성 교과서를 그대로 활동지의 형태로 제작하여 학생들에게 배포하고, 수업이 끝난 후에 교사에게 다시 제출하도록 하였다. 이는 활동지(재구성 교과서)의 질문에 학생들이 응답하게 하고 그 응답들을 분석함으로써, 실제 수업 중에 이루어진 학생들의 학습 과정을 파악하기 위한 것이었다. 또한, 본 연구에서는 재구성 교과서를 활용한 교수·학습의 전 과정을 비디오와 오디오로 녹화하였다. 이는 재구성 교과서를 활용한 실제 교수·학습 과정에서 나타나는 지도상의 어려움, 재구성 교과서의 적합성과 한계 등을 파악하기 위한 것이었다.

본 연구에서는 재구성 교과서를 활용한 실제 수업에서 나타난 여러 가지 특징과 학생들의 개념화 과정을, 그 맥락의 필요성에 따라 질적인 방법과 양적인 방법으로 분석하였다. 질적 분석은 실제 교수·학습 과정에서 이루어진 교사와 학생 사이의 대화를 주요 대상으로 하였으며, 이를 통해 재구성 교과서를 활용한 실제

수업에서의 지도상의 어려움, 재구성 교과서의 적합성과 한계 등을 확인하고자 하였다. 양적 분석은 학생들이 활동지에 기록한 응답을 주요 대상으로 하였으며, 이를 통해 재구성 교과서를 활용한 학습에서 나타나는 학생들의 개념화 과정의 주요 특징을 확인하고자 하였다.

III. 선행 연구 고찰

비와 비율 개념 지도에 대한 연구는 매우 광범위하게, 그리고 매우 다양하게 이루어져 왔다 (Freudenthal, 1983; Karplus et al., 1983; Lamom, 1999; Lesh et al., 1988; Noelting, 1980; Piaget et al., 1977; Streefland, 1985; 유현주, 1995; 장혜원, 2002; 정은실, 2003a, 2003b). 이 절에서의 선행 연구 고찰 결과는 현행 교과서 문제점 분석과 교과서 재구성의 토대로 작용한다.

Piaget et al.(1977)는 아동들의 비례 관계의 발달을, 비수량적 사고 단계, 서수적 단계, 초서수적 단계, 비례적 단계의 4단계로 구분하였다. Piaget의 연구에 따르면 학생들의 비례 개념은 가법적 사고 이후에 발달한다. 다른 여러 연구들도 학생들이 비례 개념에 앞서 가법적으로 추론함을 보고하였다(Karplus et al., 1983; Lesh et al., 1988). 그러나 문제는 학생들이 가법적 사고에서 배 개념에 근거한 비례적 추론으로 발달해가는 데서 어려움을 느낀다는 것이다. 다시 말해서, 많은 학생들이 비례적 추론이 필요한 상황에서 비례적 추론을 하지 못하고 여전히 덧셈적 추론을 한다는 것이다(Karplus et al, 1983; Noelting, 1980; 유현주, 1995).

따라서 비와 비율을 처음 도입하여 학생들을 지도할 때에는, 학생들이 가법적 사고를 토대

로 곱셈을 중심으로 한 승법적 사고를 할 수 있도록 도와줄 필요가 있다. 이와 같은 선행 연구 결과를 토대로, 본 연구자들은 재구성 교과서에서 학생들이 비 개념을 학습하기 전에 동일한 문제 상황에서 두 양을 가법적으로 비교한 다음 승법적으로(multiplicatively) 비교하도록 하고, 이와 같은 경험을 토대로 비를 학습하도록 하였다.²⁾ NCTM(2000)에서도 곱셈을 이용하는 비교 문제, 예를 들어, ‘몇 배 더 많은?’이나 ‘단위당 얼마나 많은?’과 같은 문제를 해결하는 경험을 통해 비와 비율 학습의 기초를 마련하는 것이 중요함을 강조하였다.

Lamon(1999)은, 비례 추론이 즉각적으로 발달되는 것이 아니라 장기간에 걸친 다양한 경험을 토대로 발달된다고 주장하였다. Lamon (1999)은, 학생들이 비례 추론을 발달시키기 위해서는 등분할, 단위화, 양과 변화, 유리수, 상대적 비교, 비 감각 등을 경험할 필요가 있다고 주장하였다. 여기에서 단위화는, 예를 들어 구슬이 8개 있을 때, 1개를 단위로 하면 8이 되고, 2개를 단위로 하면 4가 되고, 4개를 단위로 하면 2가 됨을 이해하는 것을 의미한다. 단위화는 동일한 양이라도 단위를 달리 하여 파악하는 것을 의미하며, 우리나라의 경우 곱셈을 처음 도입할 때 주로 다룬다. 등분할은 이산량이나 연속량을 동일하게 분할하는 것으로, 우리나라에서는 분수를 처음 도입할 때 주로 다룬다. 유리수는 분수 학습에서 주로 다루어지며, 양과 변화는 규칙성 영역에서 두 값의 대응을 학습할 때 주로 다룬다. 반면, 상대적 비교는 우리나라 교과서에서 의미 있게 다루지 못하고 있다. 따라서 본 연구에서는 교과서를 재구성할 때, 비율 개념 도입에 앞서, 학생들이 상대적 비교와 절대적 비교를 경험하고

2) 교과서 재구성의 자세한 내용은 ‘5. 교과서 재구성’을 참고하기 바란다.

그 차이점을 인식하는 활동을 할 수 있도록 하였다.

한편, Freudenthal(1983)은 비가 다양한 현상을 조직하는 수단으로서 작용하며 점차 더 상위의 개념으로 발달되어 간다고 주장하였다. Freudenthal에 따르면, 비가 의미 있는 조직 수단으로 작용하는 현상은 크게 두 가지이다. 첫 번째는 양 내에서, 그리고 양 사이에서의 관계로서의 비이며, 두 번째는 기하학적 맥락에서의 비이다. 첫 번째와 관련된 대표적인 현상으로는 등속 운동을 들 수 있다. 등속 운동에서는 두 종류의 비례식 $t_1:t_2 = s_1:s_2$ 과 $t_1:s_1 = t_2:s_2$ 를 생각할 수 있다. $t_1:t_2$ 와 $s_1:s_2$ 는 각각 시간과 시간, 거리와 거리의 비로서 동일한 하나의 체계내에서의 내적비(internal ratio)이다. $t_1:s_1$ 와 $t_2:s_2$ 는 시간과 거리 사이의 비로서 두 체계 사이의 외적비(external ratio)이다. Freudenthal(1983)에 따르면, 내적비보다 외적비가 아동들의 심리적 어려움을 더 많이 초래한다고 한다. 두 번째 기하학적 맥락에서의 비와 관련된 현상은 닳음이다. 학생들은 실제로 두 대상을 맞추어보고 비교함으로써 닳음을 인식하기 시작하며, 한 대상이 변하면 다른 대상도 함께 변한다는 인식을 하게 된다. 학생들은 실제의 모습에서 서로 같은 것은 그림에서도 서로 같다는 것을 인식하는데, 바로 여기에 내적비의 불변성이 포함되어 있다(Freudenthal, 1983).

Streefland(1985)는 비와 비율을 지도하기 위한 대부분의 프로그램이 현실과 관련 있는 것처럼 보이는 인위적인 문제를 하나 제시한 후에, 수에 의한 비를 연습하도록 하고 있다고 비판하였다. Streefland는 비와 비율 개념의 의미 있는 지도를 위해 다음과 같은 사항을 제안하였다. 첫째, 학생들이 흥미를 가질 수 있는 현실과 밀접하게 관련된 상황에서 비와 비율

개념을 형성하도록 지도해야 한다. 현실과 관련이 없는 비의 값, 비례식, 그저 산술적인 계산으로서의 비 등을 과도하게 연습시키는 것은 무의미하다. 둘째, 비와 비율 개념과 관련된 실제적인 응용을 지도할 필요가 있다. 특히 비 개념은 다른 수학적 주제와 연결되지 않는 채로 실제적 응용과 괴리되어 지도되고 있다. 셋째, 비의 교수·학습에서 기하학적 맥락을 적극적으로 활용할 필요가 있다. 확대와 축소, 닳음, 그림자 등의 현상은 두 양 사이의 불변의 구조로서의 비를 다루기에 매우 적절한 맥락이다. 넷째, 비를 수적으로 처리함에 있어서 비례표(ration table)와 같은 도식을 역동적으로 사용할 필요가 있다.

정은실(2003a)은 비 개념의 의미 있는 이해를 위해, 저학년에서부터 비를 직관적으로 이해하도록 하는 프로그램을 개발하여 비를 조기에 도입할 것을 주장하였다. 비에 대해 직관적으로 이해하고 비 개념을 충분히 다룬 이후에, 비에 대한 기호 표현이나 알고리즘을 지도할 것을 강조하였다. 또한 적합한 맥락 속에 문제 상황을 위치시킴으로써 학생들이 비에 의미를 부여할 수 있도록 하고, 학습 과정을 지원하기 위한 비율표와 같은 도식적 모델과 시각적 모델을 사용할 것을 권장하였다.

장혜원(2002)은 우리나라의 1~7차 교육과정의 초등학교 수학 교과서에 나타난 비율 개념을 조사하고, 비율과 비의 값이라는 두 용어의 의미상으로 혼용되어 왔음을 확인하였다. 그리고 초등학교 수준에서는 비율과 비의 값을 구분하지 말고 비율이라는 하나의 용어를 사용하는 것이 적절하다고 권고하였다. 또한, 비율의 다양한 표현으로서 기준량이 1, 10, 100일 때 비교하는 양을 달리 나타내는 활동을 통해 비에 대한 감각을 키우는 것이 보다 의미 있는 학습이라고 주장하였다.

IV. 현행 교과서 분석

현행 교과서에서 비와 비율 개념은 6.가 단계 '6단원. 비와 비율'에서 다루고 있다.³⁾ 이 단원은 총 5차시로 구성되어 있으며, 차시별 주요 내용은 '1차시: 두 수의 비 알기', '2차시: 비율과 비의 값 알기', '3차시: 백분율과 할푼리에 대해 알기', '4차시: 재미있는 놀이, 문제해결하기', '5차시: 실생활에 적용하기' 이다. 이 중에서 본 연구의 대상이 되는 부분은 1~3차시의 내용인 두 수의 비, 비율과 비의 값, 백분율이다. 다음에서는 현행 교과서에서 다루는 내용을 차시별로 살펴보기로 한다.

1. 비의 지도(1차시)

현행 교과서에서는 먼저 <생활에서 알아보기>에서 남학생 3명과 여학생 5명의 비교 맥락을 도입하고 있다. 다음으로 <활동1>에서 남학생 수와 여학생 수를 여러 가지 방법으로 비교하도록 하고 있으며, 이를 토대로 <약속>에서 '3:5, 3대 5, 5에 대한 3의 비, 3의 5에 대한 비, 3과 5의 비'를 정의하고 있다.⁴⁾

현행 교과서의 비의 지도 방식은 비를 처음으로 접하는 학생에게 많은 어려움을 초래한다. 선행 연구 고찰을 토대로 현행 교과서의 비의 지도 방식의 문제점을 제시하면 다음과 같다.

첫째, 비를 도입하기 위한 <생활에서 알아보기>에 제시된 맥락이 적절하지 않다. Freudenthal (1983)은, 비를 도입함에 있어서 비가 조직 수

단이 되는 다양한 맥락(현상)을 학생들에게 제공하는 것이 바람직하다고 주장하였다. 학생들에게 두 양 사이에 비 관계가 성립하는 다양한 현상(맥락)을 제공하고, 학생들은 그러한 현상(맥락)을 정리하고 조직하기 위한 수단으로서 비 개념을 인식하도록 하는 것이 중요하다 (Streefland, 1985; 정은실, 2003a). 이러한 관점에서 현행 교과서의 비 도입 맥락인 <생활에서 알아보기>를 살펴보면, 제시된 맥락이 다분히 인위적임을 알 수 있다. <생활에서 알아보기>의 맥락을 정리하고 조직하기 위한 수단으로서 비 개념이 거의 필요하지 않으며, 또한 제시된 두 양인 남학생 3명과 여학생 5명 사이에는 비 관계가 내포되어 있지 않다.

또한, 비는 학생들이 처음으로 학습하는 개념이므로 가능하면 학생들이 이전에 학습하여 이해하고 있는 수학적 개념과의 연결을 시도하는 것이 바람직하다. 그러나 현행 교과서에서의 비의 도입은 학생들이 이전에 학습한 어떠한 수학적 개념과도 연결되지 않고 있다.

둘째, 비 개념에서 핵심적인 사고 방식인 승법적 사고를 유도하고 있지 않다. 비 개념은 수학적 사고에 있어서 가법적 사고가 아닌 승법적 사고와 관련이 있다(Piaget et al., 1977; NCTM, 2000). 그러나 제시된, 남학생 3명과 여학생 5명이라는 두 양은 학생들의 승법적 사고를 하도록 유도하기에 적절하지 않다. 3과 5라는 양으로부터, 학생들은 자연스럽게 남학생이 여학생에 비해 2명 더 적다는 가법적 사고를 할 것이다. 이러한 가법적 사고로부터 남학생이 여학생의 $\frac{3}{5}$ 이라는 승법적 사고를 할 수 있

3) 본 연구에서는 제7차 수학과 교육과정의 교과서를 분석하였다. 새로운 교육과정인 제7차 수정·고시 수학과 교육과정은 2006년 8월에 공포되었으며, 이에 따른 교과서는 현재 개발 중에 있다. 초등학교 1·2학년 교과서는 2009년부터, 3·4학년 교과서는 2010년부터, 5·6학년 교과서는 2011년부터 학교 현장에서 사용될 계획이다.

4) 본 논문에서는 현행 교과서의 내용을 수록하지 못하였다. 본 논문에 언급된 현행 교과서의 구체적인 내용은, 초등학교 수학 교과서의 6.가, 86~91쪽(교육인적자원부, 2003)을 참고하기 바란다.

도록 이끌어야 하지만, 3과 5라는 양으로부터 $\frac{3}{5}$ 을 이끌어 내는 것은 쉽지 않다.

셋째, <약속>에서의 비의 정의가 학생들의 인지 수준에 비해 지나치게 형식적이고 탈맥락적이어서 학생들에게 의미 있게 이해되기 어렵다. <약속>에서 '3:5, 3대 5, 5에 대한 3의 비, 3의 5에 대한 비, 3과 5의 비' 등을 정의하고 있지만, 이전의 <생활에서 알아보기>나 <활동 1>과 전혀 연결되지 못하고 탈맥락적으로 제시되고 있을 뿐이다. 학생들이 이러한 정의를 통해 비 개념을 의미 있게 이해하기는 어렵다. 학생들이 할 수 있는 최선의 일이란 그저 정의된 수학적 개념들을 암기하는 것일 뿐이다.

예를 들어, '남학생 수 3명과 여학생 수 5명을 비교하는 것을 3:5로 나타낸다.'는 정의는 학생들에게 많은 인지적 부담을 준다. '남학생 3명과 여학생 5명'이라는 표현과 '여학생 5명과 남학생 3명'이라는 표현은 일상적인 맥락에서는 동일한 의미를 갖는다. 그러나 수학적 개념으로서의 비에서는 '남학생 3명과 여학생 5명의 비'와 '여학생 5명과 남학생 3명의 비'는 각각 3:5, 5:3으로서 다른 의미를 갖으며, 그 이유는 기준량과 비교하는 양이 서로 다르기 때문이다. 따라서 기준량과 비교하는 양에 대한 설명 없이 비를 현행 교과서의 <약속>에서처럼 정의하는 것은 부적절하다.

<약속>에 이어 제시된 <활동 2>와 <활동으로 알게 된 것>에서는 3:5와 5:3이 서로 다르다는 것을 학생들이 이해할 것을 목표로 하고 있다. 3:5와 5:3이 다른 이유를 알기 위해서는 '기준량'과 '비교하는 양'의 개념을 알고 있어야 한다. 현행 교과서에서처럼 <약속>에서의 '남학생 수 3명과 여학생 수 5명을 비교하는 것을 3:5로 나타낸다.'는 정의로부터, 3:5와 5:3이 다르다는 것을 학생들이 이끌어내기는 사실상 불가능하다.

2. 비율의 지도(2차시)

비율 개념의 도입 및 지도와 관련하여 현행 교과서를 분석한 결과는 다음과 같다.

첫째, 비율은 절대적 크기가 아닌 상대적 크기와 관련된 개념이다(Lamon, 1999). 그러나 현행 교과서에서는 절대적 크기와 상대적 크기에 대한 내용이 제시되어 있지 않다. 절대적 크기만을 생각할 때는 비율을 생각할 필요가 없다. 그러나 상대적 크기를 고려해야 하는 맥락이 있으며, 이 때 상대적 크기를 나타내는 개념이 바로 비율이다. 이러한 관점에서 보면, 비율이라는 개념을 본격적으로 다루기에 앞서 학생들이 절대적 크기와 상대적 크기의 차이점을 인식할 수 있는 내용이 먼저 다루어질 필요가 있다.

둘째, 비율이 조직 수단이 되는 의미 있는 맥락이 제시되어 있지 않다. 현행 교과서에 제시되어 있는 맥락은 '자원 봉사자 수에 대한 여자 수의 비율', '사과 수에 대한 딸기 수의 비의 값', '딸기 수에 대한 사과 수의 비의 값' 등이다. 그러나 이러한 맥락은 비율의 필요성을 부각시키지 못한다. 왜 자원 봉사자 수에 대한 여자 수의 비율을 구해야 하는지, 또는 왜 사과 수에 대한 딸기 수의 비율을 구해야 하는지의 필요성이 전혀 부각되지 않는다. 두 양의 상대적 크기를 나타내기 위해서 비율이 필요한데, 현행 교과서에 제시된 맥락에서는 두 양의 상대적 크기를 비율로 나타낼 필요성이 거의 없다.

셋째, 현행 교과서에서는 비율을 정의한 직후 비의 값을 도입하고 있으며, 비의 값을 도입한 이후에는 비율이 아닌 비의 값을 중심으로 지도하고 있다. 비율은 여러 가지 양의 크기를 상대적으로 비교하기 위한 수학적 수단임에도 불구하고, 의미 풍부한 맥락에서 비율을

지도하는 대신에 비의 값을 인위적으로 과도하게 강조함으로써, 비율의 자연스러운 의미를 학생들이 학습할 수 있는 경험을 제공하지 못하고 있다. 이는 Streefland(1985)가 대부분의 비율 지도 프로그램이 비율 개념의 형성은 간과한 채 현실과 관련 없는 비의 값 계산을 과도하게 연습시키고 있다는 주장과 일맥상통한다. 비의 값이라는 용어는 제7차 수학과 교육과정 및 제7차 수정·고시 수학과 교육과정의 <용어와 기호>에 제시되어 있지 않은 용어이다. 교육과정에 제시되어 있지 않은 용어임에도 불구하고, 교과서 개발자들이 비의 값을 교과서에서 수학적 용어로서 정의하고 있으며, 비율의 개념적 이해 대신 비의 값을 과도하게 강조하고 있다고 할 수 있다.

3. 백분율(3차시)

현행 교과서에서는 시험 점수라는 맥락을 활용하여 백분율을 도입하여 설명하고 있다. 학생들은 100점을 기준으로 하여 시험 점수를 계산하는 데에 친숙해 있다. 따라서 100점을 기준으로 하는 시험 점수 맥락은 학생들의 백분율 이해를 도울 수 있는 좋은 맥락이라고 할 수 있다. 또한 현행 교과서에서 100칸 모눈종이를 이용하여 백분율에 대한 직관 형성을 시도하고 있는 것도 바람직하다고 할 수 있다.

그러나 백분율을 '기준량을 100으로 할 때의 비율'로 정의하면서(교육인적자원부, 2003), 비율을 백분율로 나타내는 방법으로서 '백분율(%)=비율×□'로 제시하고 있는 것은 개선할 필요가 있다. 백분율과 비의 값은 비율을 나타내는 서로 다른 표현 방법이다. 백분율은 기준량을 100으로 볼 때의 비율이고, 비의 값

은 기준량을 1로 볼 때의 비율이다. 따라서 현행 교과서에 제시된 위의 식은 '백분율(%)=비의 값×□(%)'로 수정되어야 한다.

V. 교과서 재구성

본 연구에서는 선행 연구 고찰과 현행 교과서 분석을 토대로 교과서를 재구성하고, 재구성된 교과서로 실제 수업을 실시하였다. 본 연구에서의 교과서 재구성의 대상은 현행 교과서의 1~3차시에서 다루는 비, 비율, 비의 값, 백분율이다. 이하에서는 본 연구에서 재구성된 교과서의 주요 내용을 살펴보기로 한다.

1. 교과서 재구성의 범위

'교과서의 재구성'이라고 했을 때 '재구성'이라는 정도 범위의 재구성을 의미하는가에 대해서는 연구자들마다 다른 의견을 가질 수 있다. 본 논문에서 재구성된 교과서는, <부록>에서 볼 수 있듯이, 현행 교과서의 내용 거의 전체를 변경했다고 할 수 있다.⁵⁾ 따라서 혹자에 따라서는 본 연구의 <부록>에 제시된 재구성된 교과서가 현행 교과서의 '재구성'이 아니라 '새롭게 개발'된 것이라고 판단할 수도 있다. 그러나 본 연구자들이 '개발'이 아닌 '재구성'이라는 용어를 사용한 것은, 본 연구에서 재구성한 교과서가 현행 교과서의 기본 틀을 많은 부분에서 그대로 따랐으며, 재구성 교과서에서 다루는 내용의 깊이를 현행 교과서를 넘지 않도록 설정했기 때문이다.

한편, 본 연구에서 재구성된 교과서의 양은 현행 교과서보다 훨씬 더 많아졌다. 현행 교과

5) 재구성된 교과서의 전체 내용은 <부록>에 제시되어 있다.

서에서는 비의 지도에 2쪽, 비의 값 지도에 2쪽, 백분율 지도에 3쪽, 총 7쪽의 지면을 할애하고 있다. 재구성 교과서에서는 비율 지도에 5쪽, 백분율과 비의 값 지도에 4쪽, 비 지도에 5쪽, 총 14쪽의 지면을 할애하게 되었다. 이와 같이 재구성 교과서의 양이 현행 교과서보다 더 증가한 이유는, 현행 교과서의 문제점으로 확인된 사항들을 반영하여 교과서의 개선을 시도하는 과정에서 새롭게 추가된 내용들이 많아졌기 때문이다.

2. 지도 순서의 변경

현행 교과서에서는 ‘1차시: 비 → 2차시: 비율(비의 값) → 3차시: 백분율’의 순서로 비와 비율을 다루고 있다. 현행 교과서에서와 같이 비를 먼저 지도한 후 비의 값을 지도하는 것은, 비를 수로 간주하거나 또는 비를 두 수의 순서쌍에 대해 한 값을 지정하는 함수로 간주할 가능성이 크다(Freudenthal, 1983; Streefland, 1985). 예를 들어, 4:3을 $\frac{3}{4}$ 으로 간주하거나, 4:3에 대해 $\frac{3}{4}$ 을 대응시키는 것이다. Freudenthal (1983)은 비를 이런 식으로 간주하는 것은 비의 수학적 가치를 떨어뜨리는 것이라고 주장하였다. 비 개념의 본질을 파악하도록 하기 위해서는 비율을 먼저 학습하여 상황이나 크기가 바뀌어도 그 안에 내재하는 관계가 같다는 구조의 불변성을 인식하도록 하는 것이 중요하다.

이러한 관점 하에, 본 연구자들은 재구성 교과서에서 지도 순서를 ‘1차시: 비율 → 2차시: 백분율 & 비의 값 → 3차시: 비’로 바꾸었다. 그 이유는, 비 개념보다 비율 개념을 먼저 다

루는 것이 학생들의 개념 이해에 도움이 되고, 교육과정의 위계성과 관련해서도 더 적절하다고 판단하였기 때문이다.

현행 교과서 분석에서 살펴본 바와 같이, 현행 교과서에서의 비 도입은 학생들이 알고 있는 수학 개념과 전혀 연결되지 않은 채 이루어지고 있다. 학생들에게 있어서는 비율 개념이 비 개념보다 접근하기가 더 용이하다. 왜냐하면, 학생들은 이미 4-나 단계에서 두 양의 크기를 비교하여 분수로 나타내는 것을 학습했기 때문이다. 두 양의 크기를 비교하여 분수로 나타냈을 때, 이 분수가 바로 비율을 나타내는 분수이다. 따라서 학생들이 이미 알고 있는 두 양의 비교를 나타내는 분수로부터 비율 개념을 도입하는 것이, 교육과정상의 위계에도 적절하고 학생들의 이해에도 더 도움이 된다. 이렇게 도입한 비율 개념에서 기준량과 비교하는 양의 개념을 도입하고, 이를 토대로 비 개념을 도입하고 비에서의 기준량, 비교하는 양을 설명하는 것이 학생들의 이해에 더 도움이 된다고 판단하였다.

3. 비율의 지도

본 연구에서 재구성한 교과서에서의 비율의 지도 내용과 그 이론적 근거인 선행 연구를 개략적으로 제시하면 다음의 <표 V-1>과 같다.⁶⁾

재구성 교과서에서의 ‘되돌아보기’, ‘생활에서 알아보기’ 등의 코너명은 가능하면 현행 교과서의 코너명을 가능하면 그대로 사용하였다. 이는 재구성 교과서에서 코너명을 다르게 이름 붙임으로써 현행 교과서의 코너명에 익숙해 있는 학생들에게 생길 수 있는 심리적 혼란과 부담을 최소화하기 위해서이다.

6) 이하에서 설명될 재구성 교과서의 구체적인 내용은 <부록>을 참고하기 바란다.

<표 V-1> 교과서 재구성: 비율의 지도

코너명	구성 의도	관련 선행 연구
되돌아보기	두 양의 크기를 비교하여 분수로 나타내기: 4-가 단계에서의 학습 내용 상기	현행 교과서 문제점 개선
생활에서 알아보기	상대 비교가 적절한 맥락 도입: 상대 비교의 필요성 인식하기. 상대 비교와 절대 비교의 차이 인식 하기	Lamon(1999), Streefland(1985)
약속	절대 비교, 상대 비교 정의하기	Lamon(1999)
물음	절대 비교와 상대 비교의 개념 익히기	Lamon(1999)
좀 더 알아보기 활동 1: 활동 2 활동으로 알게 된 것	상대 비교에서 기준이 달라지면 그 값이 다름을 알기	Lamon(1999)
약속	기준량, 비교하는 양, 비율 정의하기	Streefland(1985) 현행 교과서 문제점 개선
활동 3 활동 4 활동으로 알게 된 것	기준량, 비교하는 양, 비율 등의 개념 익히기. 기준량과 비교하는 양이 서로 바뀌면 비율이 달라짐을 알고, 그 이유 설명하기	Lamon(1999), Streefland(1985)

이하에서는 비율의 지도와 관련하여 재구성된 교과서의 주요 특징을, 절대 비교와 상대 비교의 이해, 비율의 의미 이해를 중심으로 살펴보기로 한다.

가. 절대 비교와 상대 비교의 이해

재구성 교과서에서는 비율을 본격적으로 다루기 전에 절대 비교와 상대 비교에 대한 내용을 다루었다. 비율이라는 개념은 두 양을 상대적으로 비교하기 위해 필요한 개념이다. Lamon(1999)은 비례적 추론 능력의 토대가 되는 6가지 영역의 하나로 상대적 사고를 제시하였다. 또한, Freudenthal(1983)의 현실주의 수학교육론(Realistic Mathematics Education)을 구현한 교과서로 알려져 있는 MiC(Mathematics in Context)에서도 비와 비율 개념의 토대로서 상대 비교와 절대 비교를 다루고 있다(Britanica, 2001a).

재구성 교과서에서는 비율을 도입하기 전에 절대 비교와 상대 비교에 대한 내용을 새롭게 추가하였다. 먼저 [되돌아보기]에서 4-가 단계에서 학습한 두 양의 크기를 비교하여 분수로 나타내는 내용을 다루었다. 이를 바탕으로 [생활에서 알아보기]에서는 상대 비교가 절대 비교보

다 적절한 맥락을 제시하여 상대 비교의 필요성을 인식하고, 절대 비교와 상대 비교의 차이점을 이해할 수 있도록 교과서를 재구성하였다. [약속]에서는 절대 비교와 상대 비교의 차이점을 명확하게 인식할 수 있도록 간단하게 정의하였다. 여기에서 절대 비교와 상대 비교는 [생활에서 알아보기]에 제시된 맥락을 활용하여 설명하는 정도로 정의하였다. [물음]에서는 상대 비교의 의미를 다시 한 번 생각해보도록 하였다.

나. 비율의 의미 이해

[좀 더 알아보기: 활동 1 & 활동 2]에서는 동일한 양이라고 하더라도 기준이 다르면 상대 비교의 값이 달라짐을 알 수 있도록 구성하였으며, 특히 값이 달라지는 이유에 대하여 학생 스스로 설명하도록 요구하였다. [활동으로 알게 된 것]에서는 [좀 더 알아보기]에서 학습한 내용을 학생 스스로 정리하여 내면화할 수 있도록 구성하였다.

[약속]에서는 [활동 2]의 질문과 맥락을 활용하여 비율, 기준량, 비교하는 양 등을 정의하였다. 현행 교과서에서는 ‘기준량에 대한 비교하는 양의 크기를 비율’이라고 정의한 직후 비의 값을 도입하였으며, 그 다음에는 비율이 아닌

비의 값을 중점적으로 다루었다. 비율과 비의 값이 함께 제시됨으로써 두 용어가 학생들에게 개념상의 혼란을 줄 수 있다는 선행 연구 결과를(박정 외, 2001; 장혜원, 2002) 고려하여, 재구성 교과서에서는 비율과 비의 값을 다른 차시로 구분하였다. ‘기준량에 대한 비교하는 양의 크기’를 비율로 정의한 후, [활동 2]의 맥락을 활용하여 전체에 대한 부분의 비율과 부분에 대한 부분의 비율을, 비의 값의 도입 없이 자연스럽게 분수의 형태를 빌어 제시하였다. 이는 제7차 수정·고시 수학과 교육과정(교육인적자원부, 2006)의 <교수·학습 상의 유의점>에 제시된 ‘두 양의 크기를 비교할 때에는 부분과 전체, 부분과 부분 사이의 관계를 다양하게 다룬다.’를 구현하기 위한 시도라고 할 수 있다.

[활동 3]과 [활동 4]에서는 기준량, 비교하는 양, 비율 등의 개념을 익히고, 기준량과 비교하는 양이 서로 바뀌면 비율이 달라짐을 알고 그 이유를 설명할 수 있도록 구성하였다. 기준량과 비교하는 양을 구분할 수 있으며, 기준량에 대한 비교하는 양의 크기인 비율을 구할 수 있도록 하였다.

4. 백분율과 비의 값 지도

현행 교과서에서는 비율을 도입한 직후 비의 값을 도입하고 있으며, 비의 값을 도입한 후에는 비율이 아닌 비의 값을 중점적으로 다루고 있다. ‘비의 값을 구하여라.’는 문항에 치중하고 있으며, 그 다음에 백분율을 다루고 있다. 본 연구에서는 1차시에 비율, 기준량, 비교하는 양 등의 개념을 도입하고 명확히 이해한 후, 2차시에 비율을 나타내는 방법으로서 백분율과 비의 값을 다루도록 교과서를 재구성하였다. 재구성 교과서에서는 백분율과 비의 값을 동시에 다루면서 백분율과 비의 값이 동일한 비율을

표현하는 다른 방법임을 이해하도록 하였다.

이는 현행 교과서에서 비율의 의미 이해보다는 비의 값을 분수나 소수로 나타내는 기능 습득 측면을 지나치게 강조하고 있다는 문제점을(박정 외, 2001; 정은실 2003a; Streefland, 1985) 개선하기 위한 시도이다. 또한, 제7차 수정·고시 수학과 교육과정(교육인적자원부, 2006)에 제시된 내용인 ‘비율을 여러 가지 방법으로 나타낼 수 있다’를 구현하기 위한 시도라고 할 수 있다. 그리고 ‘비율’이라는 용어를 중심으로 학습하고, 기준량이 1, 10, 100일 때의 비교하는 양을 다르게 나타내는 활동을 통해 비율에 대한 감각을 길러주는 것이 적절하다고 제안한 장혜원(2002)의 연구 결과를 부분적으로 구현한 것이다.

재구성한 교과서에서의 백분율과 비의 값 지도 내용과 그 이론적 근거인 선행 연구를 개략적으로 제시하면 다음의 <표 V-2>와 같다.

[다시 알아보기]에서는 1차시에 학습한 비율과의 연결성을 위하여, 기덕이가 과학 시험에서 정답을 한 문항의 비율을 구하도록 하였다. [생활에서 알아보기 1, 2, 3]에서는 20문제 중에서 17문제에서 정답을 한 수학 점수와 25문제 중에서 21문제에서 정답을 한 사회 점수를 비교하는 맥락을 제시한 후, 수학 점수와 사회 점수를 100점 만점으로 환산하여 비교하도록 함으로써 백분율의 필요성을 인식하도록 하였다. [약속]에서는 [생활에서 알아보기]의 맥락을 활용하여 백분율과 비의 값을 정의하고, 백분율은 기준량을 100으로 본 비율이고 비의 값은 기준량을 1로 본 비율임을 도식화하여 표현하였다.

[활동으로 알게 된 것]에서는 비의 값과 백분율의 관계를 설명하도록 했다. [물음 1]에서는 아빠의 발과 아기의 발을 소재로 하여 비의 값과 백분율의 차이를 이해하고 익히고, 비율을 백분율과 비의 값으로 나타내도록 하였다.

이것은 비와 비율 지도에 있어서 닳음, 확대와 같은 기하학적 맥락을 활용하는 것이 바람직하다는 선행 연구 결과를(Freudenthal, 1983; Streefland, 1985) 반영한 것이다. 이어서 [물음 2, 3]에서는 비율을 비의 값과 백분율로 나타내기를 다루었고, [좀 더 알아보기]에서는 실생활 맥락에서 백분율 적용하기 등을 다루었다.

5. 비의 지도

현행 교과서에서의 비의 도입은 학생들이 이전에 학습한 어떠한 수학적 개념과도 연결되지

않는 점이 문제점으로 지적되었다. 본 연구에서는 이러한 문제점을 개선하기 위하여, 비를 다루기 이전에 비율을 다루고, 비율로부터 비를 도입하고자 하였다. 비율로부터 비를 이끌어 내기 위한 맥락에서는 학생들이 가법적 사고와 승법적 사고를 하고, 그 차이점을 인식할 수 있도록 하였다. 이는 비 개념의 기초로서 승법적 사고를 강조한 선행 연구 결과를(Piaget et al., 1977; NCTM, 2000) 구현하기 위한 시도이다.

재구성한 교과서에서의 비의 지도 내용과 그 이론적 근거인 선행 연구를 개략적으로 제시하면 다음의 <표 V-3>과 같다.

<표 V-2> 교과서 재구성: 백분율과 비의 값 지도

코너명	구성 의도	관련 선행 연구
다시 알아보기	기대치가 정답을 한 문항의 비율 구하기	현행 교과서 문제점 개선
생활에서 알아보기 1, 2, 3	수학 점수(20문제 중에서 17문제를 맞음)와 사회 점수(25문제 중에서 21문제 맞음) 비교하기: 백분율, 비의 값 필요한 맥락 제시	현행 교과서 문제점 개선
약속	백분율과 비의 값 정의하기	장혜원(2002)
생활에서 알아보기 4	비의 값과 백분율의 차이 익히기	장혜원(2002). 현행 교과서 문제점 개선
활동으로 알게 된 것	비의 값과 백분율의 관계 알기	현행 교과서 문제점 개선
물음 1, 2, 3	비율을 비의 값과 백분율로 나타내기	장혜원(2002)
좀 더 알아보기	실생활 맥락에서 백분율 해석하기	Streefland(1985)

<표 V-3> 교과서 재구성: 비의 지도

코너명	구성 의도	관련 선행 연구
되돌아보기	두 양의 크기를 비교하기	현행 교과서 문제점 개선, NCTM(2000)
생활에서 알아보기 1	승법적 사고 맥락 소개: 가법적 사고와 승법적 사고의 차이 인식 하기	Piaget et al.(1977), Karplus et. al.(1983), Noelting(1980), NCTM(2000)
약속	비 정의하기	현행 교과서 문제점 개선
생활에서 알아보기 2	비 개념 익히기, 비에서 기준량, 비교하는 양 알기	현행 교과서 문제점 개선
활동 1, 활동 2, 활동으로 알게 된 것	a에 대한 b의 비, a와 b의 비, b에 대한 a의 비, b와 a의 비 이해하기	현행 교과서 문제점 개선
좀 더 알아보기 1	비율표를 통해 100원짜리 동전과 50원짜리 동전의 비 구하기	Streefland(1985), 정은실(2003a)
좀 더 알아보기 2	비 '그림자: 실제 물건=1:2' 해석하기	Streefland(1985)
좀 더 알아보기 3	비 2:4에 알맞은 문제 만들기	Streefland(1985)
좀 더 알아보기 4	비의 값과 비 연결하여 이해하기	Streefland(1985)

재구성 교과서의 [되돌아보기]에서는 두 양을 비교하여 분수로 표현하도록 하였다. [생활에서 알아보기 1]에서는 남학생 3명과 여학생 6명으로 이루어진 기대네 모둠을 제시한 후, 남학생의 수와 여학생의 수를 여러 가지 방법으로 비교하도록 하였다. 남학생 수와 여학생 수를 가법적으로 비교하고 승법적으로 비교한 후, 그 차이점을 설명해보도록 하였다. 이를 바탕으로 [약속]에서 비를 도입하고 ‘여학생 수에 대한 남학생 수의 비를 3:6’으로 정의하고, 이것은 여학생 수를 기준으로 남학생 수를 비교하는 것이며, ‘남학생과 여학생의 비’라고도 함을 설명하였다.

비의 정의에 이어 [생활에서 알아보기 2]에서는 [생활에서 알아보기 1]의 맥락을 활용하여 ‘남학생 수에 대한 여학생 수의 비, 이 비에서의 기준량과 비교하는 양’, ‘여학생 수와 남학생 수의 비, 이 비에서의 기준량과 비교하는 양’ 등을 다루면서 [약속]에서 정의한 비에 대한 개념을 이해하고 익히도록 하였다. [활동 1], [활동 2]에서는 a에 대한 b의 비, a와 b의 비, b에 대한 a의 비, b와 a의 비 등을 개념을 이해하고 익히도록 하였다. [활동으로 알게 된 것]에서는 ‘b에 대한 a의 비, a와 b의 비’라는 표현에서 기준량과 비교하는 양의 개념을 정확히 이해하도록 하였다.

[좀 더 알아보기 1]에서는 비율표를 통해 100원짜리 동전과 50원짜리 동전의 개수의 비를 구하도록 했으며, [좀 더 알아보기 2]에서는 ‘그림자:실제 물건=1:2’라는 실생활 맥락에서 비 해석하고 적용하기, [좀 더 알아보기 3]에서는 비 2:4에 알맞은 문제 만들기, [좀 더 알아보기 4]에서는 비와 비의 값을 관련지어 이해하기 등을 다루었다.

[좀 더 알아보기 1]에서 비율표를 활용한 것은, 비를 처리함에 있어서 비례표(ration table)와

같은 도식적 모델과 시각적 모델을 역동적으로 사용할 필요가 있다는 선행 연구 결과(Streefland, 1985; 정은실, 2003a)를 반영하기 위한 것이다. 비례표는 두 양 사이에 내재하는 관계, 즉 ‘비가 같다’는 구조의 불변성(Freudenthal, 1983)을 학생들이 직관적으로, 시각적으로 인식하는 데에 도움을 주는 것으로 제안되었다. 또한 [좀 더 알아보기 2]에서 그림자와 실제 물건의 길이의 비를 소재로 삼은 것은, 적합한 맥락 속에 문제 상황을 위치시킴으로써 학생들이 비에 의미를 부여할 수 있도록 하고(정은실 2003a), 비를 다루기 위한 맥락으로서 그림자와 같은 기하학적 맥락을 활용하는 것이 바람직하다는(Streefland, 1985) 선행 연구 결과를 구현하기 위한 시도이다.

VI. 재구성 교과서를 활용한 교수·학습의 실제

재구성된 교과서를 활용한 교수·학습은 초등학교 정규 수학 수업의 일환으로 이루어졌다. 재구성 교과서를 활용한 수업은, 현직 교사인 본 연구자들 중의 한 명이 자신이 담당하고 있는 초등학교 6학년 학생들을 대상으로 실시하였다. 본 연구자들이 재구성한 교과서로 비와 비율을 지도하는 데는 3시간이 아닌 5시간이 소요되었다. 그 이유는 이미 언급한 바와 같이, 재구성 교과서에서 현행 교과서의 문제점을 개선하기 위해 새로운 내용이 추가됨으로써 재구성 교과서의 내용이 증가했기 때문이다.

본 연구자들이 재구성 교과서를 활용하여 비와 비례 개념을 지도한 결과, 학생들은 비율, 백분율, 비의 값 등을 학습하는 데는 별다른 어려움을 겪지 않았지만, 비 개념을 학습함에 있어서는 상대적으로 더 많은 어려움을 겪는 것으로 확인되었다.

1. 비율의 지도

가. 상대 비교와 절대 비교의 이해

다음은 상대 비교와 절대 비교의 도입 맥락으로 제시된 [생활에서 알아보기]의 교수·학습 과정에서 이루어진 교사와 학생들의 대화이다.

[생활에서 알아보기]

T 그런데, 우리 반 대부분의 친구와는 다르게, 민수라는 친구는 강천초등학교가 더 많다고 그랬어. 우리 반 몇몇 친구와 비슷한 의견이지? 민수는 왜 그렇게 생각했을까?

S1 운천초등학교는 9명이 안경을 썼고, 강천초등학교는 10명이 안경을 썼으니깐, 강천초등학교가 더 많다고 생각했습니다.

T 여러분도 동의합니까?

S2 예.

T 그런데, 다른 의견을 가진 정희라는 친구가 나왔네. 우리 반 대부분의 의견과 맞네. 정희라는 친구는 여러분과 같이 운천초등학교 친구들이 안경을 더 많이 쓰고 있다고 했어요. 왜 그렇게 생각했을까? 조금 고민해 볼까? [시간이 약간 흐른 후에] 그럼 누가 한번 발표해 볼까? 그래 진식이야 발표해 보자.

S3 구할 때요, 4학년 때가 5학년 때 배운 건데요. 운천초는 전체 36명 중에 안경 쓴 사람이 9명이구요. 강천초는 전체 42명 중에 안경 쓴 사람이 10명이라서요. 운천초는 4분의 1이구요. 강천초는 21분의 5예요. 그래서 통분을 했는데요. 운천초가 더 많아요.

[생활에서 알아보기]에서는 안경 쓴 친구가 운천초는 9명이고 강천초는 10명이라고 제시하였다. 수업을 받은 33명의 학생들 중에서 28명의 학생들이 운천초 학생들이 안경을 더 많이 썼다고 대답하였다. 28명의 학생들 중에서 2명의 학생은 전체 학생수에 대한 안경을 쓴 학생수를 정확하게 분수로 계산하여 대답하였다. 나머지 26명의 학생들은 운천초와 강천초의 전체

학생수가 각각 36명, 42명으로 다르기 때문에 안경을 쓴 학생이 운천초가 1명이 적더라도, 운천초 학생들이 안경을 더 많이 썼다고 응답하였다. 이 학생들은 안경 쓴 학생의 수만을 비교하는 것은 적절하지 않고 전체 학생수가 다르다는 것을 고려해야 한다고 생각한 것이다. 이를 통하여 학생들이 상대 비교의 필요성에 대해서 직관적으로 인식하고 있음을 알 수 있다. 이러한 관점에서, 학생들이 상대 비교의 필요성을 인식하도록 하기 위해 제시된 [생활에서 알아보기]의 맥락은 적절했다고 판단할 수 있다.

[약속]에서 상대 비교와 절대 비교를 정의한 후, [물음]에 대한 학생들의 응답을 살펴본 결과, 33명의 학생들 중에서 31명(93.9%)의 학생들이 상대 비교를 제대로 이해하고 있었으며, 절대 비교와 상대 비교의 차이점을 인식하고 있었다. 다음의 그림은 [물음]에 대한 한 학생의 응답을 제시한 것이다.

2. 지훈이는 "한국이 중국보다 PC의 수가 적다"고 말합니다. 표재는 지훈이의 말에 동의하지 않습니다. 표재가 지훈이의 말에 동의하지 않는 이유는 무엇일까요? 현재는 인구는 각각 보고서 중국은 14억 8900만명, 한국은 5300만명, 쓰지않고 무지한 건은 4900만명, 중국 2600만명, 약 반이, 컴퓨터를 쓰고 있는 것만여

[그림 VI-1] [물음]에 대한 학생 응답: 상대 비교의 이해

나. 비율의 의미 이해

재구성 교과서에서는 [약속]에서 비율, 기준량, 비교하는 양 등의 개념을 정의한 후, [활동 3], [활동 4], [활동으로 알게 된 것] 등에서 기준량, 비교하는 양, 비율의 개념을 익히고, 기준량과 비교하는 양이 서로 바뀌면 비율이 달라짐을 알고 그 이유를 설명할 것을 다루었다.

[활동 3]에서는 "11월에 가는 졸업여행지 희망조사를 하였습니다. 운수네 반에서는 놀이동산 22명, 문화유적지 14명이 희망하였습니다."라는 맥락을 제시한 후, 반 전체 학생에 대한 놀이동산 희망 학생의 비율(전체-부분 비율),

문화유적지 희망 학생에 대한 놀이동산 희망 학생의 비율(부분-부분 비율, 기준량이 비교하는 양보다 더 적은 경우), 놀이동산 희망 학생에 대한 문화유적지 희망 학생의 비율(부분-부분 비율, 기준량이 비교하는 양보다 더 큰 경우), 문화유적지 희망 학생에 대한 놀이동산 희망 학생의 비율과 놀이동산 희망 학생에 대한 문화유적지 희망 학생의 비율이 다른 이유 설

명하기 등을 다루었다. [활동 3]에서 제시한 졸업 여행 맥락은, 본 연구에 참여한 학생들이 초등학교 6학년이라는 점을 고려한 것이다.

다음의 <표 VI-1>~<표 VI-4>는 [활동 3]에 대한 학생들의 응답을 분석한 것이다. 학생들의 응답은 실제 수업에서 이루어진 것이므로, 학생들의 응답 분석을 통해 학생들의 개념화(conception) 과정을 확인할 수 있다.

<표 VI-1> 전체-부분 비율에 대한 학생들의 개념화

반 전체 학생에 대한 놀이동산 희망 학생의 비율 (전체-부분 비율)									
비율 구하기	응답 유형	$\frac{22}{36}$ ($\frac{11}{18}$)	22:36	$\frac{22}{36}$ & 22:36				무응답	총계
	응답 빈도 (학생수, %)	27 (81.8)	3 (9.1)	2 (6.7)				1 (3.0)	33명 (100%)
기준량, 비교하는 양 알기	응답 유형	기준량은 반 전체(36명), 비교하는 양은 놀이동산 희망(22명)		$\frac{22}{36}$	비율	반 전체	놀이동산	무응답	총계
	응답 빈도 (학생수, %)	28 (84.8)		1 (3.0)	1 (3.0)	1 (3.0)	1 (3.0)	1 (3.0)	33명 (100%)

<표 VI-2> 부분-부분 비율에 대한 학생들의 개념화: 기준량이 비교하는 양보다 더 적은 경우

문화유적지 희망 학생에 대한 놀이동산 희망 학생의 비율 (부분-부분 비율)										
비율 구하기	응답 유형	$\frac{22}{14}$ ($\frac{11}{7}$)	22:14	$\frac{22}{14}$ & 22:14	$\frac{14}{36}$	$\frac{14}{36}$ & 14:36	$\frac{36}{14}$		무응답	총계
	응답 빈도 (학생수, %)	23 (69.7)	5 (15.2)	2 (6.7)	1 (3.0)	1 (3.0)	1 (3.0)		0	33명 (100%)
기준량, 비교하는 양 알기	응답 유형	문화유적지 희망(14명), 놀이동산 희망(22명)	기준량은 22, 비교하는 양은 14	기준량은 반 전체(36명), 비교하는 양은 문화유적지 희망(14)	문화유적지	놀이동산, 문화유적지	문화유적지, 반 전체	11:7	무응답	총계
	응답 빈도 (학생수, %)	20 (60.7)	2 (6.7)	3 (9.1)	1 (3.0)	1 (3.0)	1 (3.0)	1 (3.0)	4 (12.1)	33명 (100%)

<표 VI-3> 부분-부분 비율에 대한 학생들의 개념화: 기준량이 비교하는 양보다 더 큰 경우

놀이동산 희망 학생에 대한 문화유적지 희망 학생의 비율 (부분-부분 비율)										
비율 구하기	응답 유형	$\frac{14}{22}$ ($\frac{7}{11}$)	14:22	$\frac{14}{22}$ & 14:22	$\frac{22}{14}$				무응답	총계
	응답 빈도 (학생수, %)	24 (72.7)	3 (9.1)	2 (6.7)	2 (6.7)				2 (6.7)	33명 (100%)
기준량, 비교하는 양 알기	응답 유형	놀이동산 희망(22명), 문화유적지 희망(14명)	기준량은 14, 비교하는 양은 22	반 전체, 문화유적지, 놀이동산	문화유적지			무응답	총계	
	응답 빈도 (학생수, %)	25 (75.8)	1 (3.0)	1 (3.0)	1 (3.0)			2 (6.7)	33명 (100%)	

<표 VI-4> 기준량, 비교하는 양에 대한 학생들의 개념화

a에 대한 b의 비율과 b에 대한 a의 비율이 다른 이유 설명하기					
응답 유형	다르다. 기준이 다르기 때문에	같다. 순서만 바뀌었기 때문에	답이 같다.	무응답	총계
응답 빈도 (학생수, %)	28 (84.8)	1 (3.0)	2 (6.7)	2 (6.7)	33 (100%)

<표 VI-1>~<표 VI-4>에서 알 수 있는 학생들의 비율의 개념화 과정의 특징을 정리하면 다음과 같다. 첫째, 학생들은 전체-부분 비율보다 부분-부분 비율에서 더 많은 어려움을 겪는다. 반 전체 학생에 대한 놀이동산 희망 학생의 비율을 알아보는 전체-부분 비율에 대한 정답률은 27명(81.8%)인 반면에, 문화유적지 희망 학생에 대한 놀이동산 희망 학생의 비율이나 놀이동산 희망 학생에 대한 문화유적지 희망 학생의 비율은 각각 69.7%와 72.7%로 나타났다.

둘째, 부분-부분 비율에서는, 기준량이 비교하는 양보다 더 큰 경우에 비해 기준량이 비교하는 양보다 더 적은 경우에 학생들이 더 많은 어려움을 겪는 것으로 확인되었다. 기준량이 더 큰 경우와 더 적은 경우의 부분-부분 비율 구하기에서는 정답률이 각각 69.7%와 72.7%로서 큰 차이가 나타나지 않았지만, 기준량과 비교하는 양을 제시하는 문제에서는 정답률이 각각 60.7%와 75.8%로서 그 차이가 크게 나타났다. 특히, 기준량이 비교하는 양보다 더 적은 부분-부분 비율의 경우, 두 부분에서 무조건 더 큰 양을 기준량으로 취급하고 더 작은 양을 비교하는 양으로 취급하거나, 부분(문화유적지 희망 학생)과 부분(놀이동산 희망 학생)이 속한 반 전체를 기준량으로 취급하는 오개념을 드러냈다(<표 VI-2> 참고). 따라서 부분-부분 비율에서 기준량이 비교하는 양보다 더 작은 경우에는 비율을 분수로 나타낸 값이 1보다 크다는 것을 지도할 필요가 있다.

이로부터, 비율을 도입함에 있어서 전체-부

분 비율, 부분-부분 비율(기준량이 비교하는 양보다 더 큰 경우), 부분-부분 비율(기준량이 비교하는 양보다 더 작은 경우)의 순서로 학생들을 지도하는 것이 바람직함을 확인할 수 있다. 이러한 관점에서 보면, 재구성 교과서의 비율의 구체적 내용 제시 순서는 개선을 필요로 한다고 할 수 있다.

2. 백분율과 비의 값 지도

학생들은 재구성 교과서의 시험 문제 맥락, 즉 20문제 중에서 17문제에서 정답을 한 수학 점수와 25문제 중에서 21문제에서 정답을 한 사회 점수를 비교하는 맥락으로부터 백분율의 필요성을 자연스럽게 이해하였다. 또한 재구성 교과서에서 비율을 나타내는 다른 방법으로서 백분율과 비의 값을 도식화하여 제시한 것도 학생들의 이해를 돕는 것으로 확인되었다.

다음은 비율을 나타내는 다른 표현으로서 백분율과 비의 값을 익히고, 백분율과 비의 값의 관계 이해를 위해 제시된 [생활에서 알아보기 4]와 [활동으로 알게 된 것]의 교수·학습 과정에서 이루어진 교사와 학생들의 대화이다.

[생활에서 알아보기 4]와 [활동으로 알게 된 것]

T 준태와 태규가 똑같은 길이의 띠를 다르게 입을 까닭은 무엇인가요? S1 발표해보자.

S1 준태는 노란띠의 기준을 1로 잡았고, 태규는 노란띠의 기준을 100으로 잡았기 때문에. 기준을 다르게 잡았기 때문에

T 그래, 기준이 달라서. 둘의 길이는 ……

- S 같았어요.
- T 어, 그래. 그럼 여러분이 위의 활동을 통해 백분율과 비의 값 사이의 관계를 알게 된 것을 적어보세요. 알 수 있었던 것을 다 적어보세요.
- Ss 기준량이 달라요.
- Ss 그래도 비교하는 양은 같다.
- T 어떤 친구가 발표해 볼까?
- S1 비의 값을 소수로 나타내고 곱하기 100을 하면 백분율이 나타납니다.
- S2 똑같은 길이인데 값이 달라요.
- S3 비의 값 곱하기 100은 백분율
- T 다시 말해서, 비의 값은 뭐가 될까? 저꾸로 표현하면
- Ss ……
- T 빨간띠는 비의 값은 0.45가 나오고 백분율로는 45퍼센트라고 했어요. S3 친구가 비의 값에 백을 곱하면 백분율이 나온다고 했어요. 여러분 왜 곱하기 100을 하면 백분율이 나올까?
- S4 비의 값은 기준을 1로 하고 백분율은 기준을 100으로 하니까 1 곱하기 100을 하면 100이 되니까요.

[생활에서 알아보기 4]에서는 비의 값과 백분율의 관계를 의미 있게 학습하기 위한 소재로서 cm와 m를 활용하였다. 1m와 100cm는 같은 길이지만 기준(단위)를 무엇으로 하느냐에 따라 50cm가 되기도 하고, 0.5m가 되기도 한다. 0.5(m)에 곱하기 100을 하면 50(cm)가 되는 것은, 비의 값 0.5에 곱하기 100을 하면 백분율 50(%)가 되는 것과 거의 같은 원리이다.

준태와 태규가 똑같이 노란 띠의 길이를 읽었으나 각각 0.55, 55라고 다르게 읽은 것에 대하여, 학생들은 각각의 기준이 무엇이며, 똑같은 길이의 띠를 다르게 읽은 이유에 대하여 생각하였다. 그리고 기준을 100으로 하는가, 1로 하는가에 따라 똑같은 길이도 다르게 표현될 수 있음을 이해하였다. 학생들은 이를 토대로 100을 기준으로 할 때의 비율이 백분율이며, 1

을 기준으로 할 때의 비율이 비의 값을 더욱 심층적으로 이해할 수 있었다.

3. 비의 지도

본 연구에서 재구성한 교과서로 비를 지도한 결과, 비율, 백분율, 비의 값 등에 비해 비 개념의 학습에서 학생들이 상대적으로 더 큰 어려움을 겪는 것으로 확인되었다. 학생들은 [약속]에서 비의 정의를 학습한 후 후, 비 개념 익히기, 비에서 기준량과 비교하는 양 알기를 다룬 [생활에서 알아보기 2] 및 a에 대한 b의 비, a와 b의 비, b에 대한 a의 비, b와 a의 비 이해하기를 다룬 [활동 1], [활동 2], [활동으로 알게 된 것]에서는 성공적으로 학습하였다. 그러나 학생들은 [좀 더 알아보기 1]과 [좀 더 알아보기 2]에서 많은 어려움을 겪었다. 이하에서는 이에 대한 교수·학습 과정을 상세히 살펴보기로 한다.

다음은 100원짜리 동전의 수와 50원짜리 동전의 수의 관계 및 그 비를 다룬 [좀 더 알아보기 1]의 (3)번, (4)번 문제에 대한 교사와 학생들의 교수·학습 과정이다.

[좀 더 알아보기 1]

- T 그럼 (3)번을 해 보자. 100원짜리 동전의 수와 50원짜리 동전의 수는 어떤 관계에 있죠?
- S1 100원짜리 동전의 수 곱하기 2는 50원짜리 동전의 수이다.
- S2 두 배다.
- S3 100원짜리 동전의 수에 대한 50원짜리 동전의 수는 2분의 1이다.
- S4 50원짜리 동전은 100원짜리 동전의 2배다.
- T 그래, 잘했어. 100원짜리 동전의 수와 50원짜리 동전의 수의 비를 구해 봤어요?
- Ss 1대 2
- T 1대 2?
- Ss 1대 0.5

T 1대 0.5? 100원짜리 동전의 수와 50원짜리 동전의 수의 비라고 했어. 어떻게 나와? 몇 대 몇이야?
 Ss 100대 50
 T 응? 100대 50? 애들아, 동전의 수로 비교를 해야지.
 Ss 1대 2

위의 교수·학습 과정에 알 수 있듯이, 학생들은 100원짜리 동전의 수와 50원짜리 동전의 수의 관계와 그 비에 대해 혼란스러워하고 있다. 100원짜리 동전의 수와 50원짜리 동전의 수의 관계에 대해, 일부 학생들은 “100원짜리 동전의 수에 대한 50원짜리 동전의 수는 2분의 1이다.”라고 대답함으로써 오류를 드러냈다. 또한 학생들은 100원짜리 동전의 수와 50원짜리 동전의 수의 비에 대해 처음에는 1:2라고 대답했지만, 교사의 계속되는 질문에 대해 1:0.5, 100:50 등으로 대답을 바꾸었다. 이는 학생들이 100원짜리 동전과 50원짜리 동전이 나타내는 양과 그 수 사이의 비를 대해 혼란스러워하고 있음을 의미한다.

[좀 더 알아보기 1]에서 100원짜리, 50원짜리 동전의 맥락을 활용한 것은 학생들이 일상생활에서 쉽게 접하고 있는 소재를 활용하기 위한 것이었다. 그러나 100원짜리 동전과 50원짜리 동전의 맥락이 학생들에게 혼란을 야기하고 있음을 확인할 수 있다. 동전의 개수의 비 측면에서 보면, 100원짜리와 50원짜리 동전의 개수의 비는 1:2이지만, 100원과 50원이라는 양의 관점에서 보면 100원과 50원의 양의 비는 2:1

이다. ‘동전의 개수’와 ‘동전이 나타내는 양’이 학생들의 인지적 혼란을 불러온 것이다. 학생들은 동전이 주는 이러한 복잡함 때문에 100원짜리 동전의 개수와 50원짜리 동전의 개수의 비에 대하여 1:0.5, 100:50 등의 오류를 나타냈다고 할 수 있다.

따라서 재구성 교과서의 [좀 더 알아보기 1]의 동전 맥락은 학생들의 인지적 혼란과 부담을 경감할 수 있는 맥락으로 대체될 필요가 있다. 예를 들어, 자전거의 개수와 자전거 바퀴의 개수의 비, 의자의 개수와 의자 다리의 개수의 비 등의 맥락과 같이, 학생들에게 익숙하되 인지적 혼란을 야기하지 않는 맥락을 활용하는 것이 바람직할 것으로 판단된다. 물론, 학생들에게 익숙하되 인지적 혼란을 야기하지 않는 맥락과 비례표를 통해 비 개념을 확실하게 이해한 후에는, 동전 맥락과 같은 다소 복잡한 맥락을 소개하면서 두 가지 다른 차원, 예를 들어 ‘동전의 개수’와 ‘동전이 표현하는 양’을 구분할 수 있도록 지도할 필요가 있다.

재구성 교과서로 학생들을 지도한 내용 중에서, 학생들이 많은 어려움을 겪었던 또 다른 내용은 비와 비의 값을 관련지어 이해하는 부분이었다. [좀 더 알아보기 2]의 “실제 물건의 길이에 대한 그림자의 길이의 비가 1:2인 것과 비의 값이 $\frac{1}{2}$ 인 것은 어떤 관계가 있을까요?”라는 질문에 대해 학생들이 수업 중에 기록한 활동지를 분석한 결과, 학생들은 다음의 <표 VI-5>와 같이 응답하였다.

<표 VI-5> 비의 값과 비의 관계에 대한 학생들의 개념화

응답 유형	비의 값을 비로 고치면 1:2이다.	같다 (50%와 같다, 같은 수이다, 같은 관계이다)	반이 다	기준량이 달라서 1:2	기준량이 2이니 1/2	1은 분자, 2는 분모로 간다	0.5% 배이다	1:2=1÷2로 하면 1/2이다	기준량이 분모가 되고 비교하는 양이 분자가 됨	무응답	총계
빈도 (학생수, %)	2 (6.1)	14 (42.4)	4 (12.1)	1 (3.0)	1 (3.0)	1 (3.0)	1 (3.0)	1 (3.0)	1 (3.0)	7 (3.0)	33명 (100%)

위의 표에서 알 수 있는 바와 같이, '비의 값 $\frac{1}{2}$ 을 비로 고치면 1:2'라고 수학적으로 옳게 응답한 학생들이 6.1%에 불과했다. 42.4%의 학생들은 '같다, 50%와 같다, 같은 수이다, 같은 관계이다'라고 응답하였는데, 이 학생들은 '비의 값 $\frac{1}{2}$ '과 '비 1:2'의 관련성을 불완전하게 이해하고 있는 것이다. 그러나 51%에 가까운 학생들은 '비의 값 $\frac{1}{2}$ '과 '비 1:2'를 관련시켜 이해하지 못하고 있었다. 학생들이 수업 중에 기록한 활동지를 분석한 결과, 학생들이 재구성 교과서에서 다룬 내용 중에서 가장 어려운 내용이 바로 비의 값과 비를 연결하는 내용이었다. 따라서 비의 값과 비를 연결하기 위해 시도된 재구성 교과서의 내용은 성공적이지 못했다고 판단할 수 있다. 학생들이 비의 값과 비를 관련시켜 의미 있게 이해하도록 하기 위해서는 재구성 교과서를 개선할 필요가 있다.

Ⅶ. 결론 및 제언

본 연구에서는 비와 비율 개념 교수·학습과 관련된 선행 연구를 고찰하고, 선행 연구를 토대로 현행 초등학교 교과서의 비와 비율 단원의 문제점을 분석하였다. 현행 교과서의 문제점 분석을 토대로 교과서를 새롭게 재구성하였으며, 재구성된 교과서를 활용하여 실제 교수·학습을 실시하고, 그 과정에서 재구성 교과서의 장점과 한계 등을 확인하고 분석하였다.

본 연구에서 재구성된 교과서를 활용하여 비와 비율에 대한 실제 교수·학습을 실시한 결과는 다음과 같다. 첫째, 본 연구의 재구성 교과서에서 시도한 지도 순서인, '비율 → 비의

값과 백분율→비'는 적절한 것으로 확인되었다. 재구성 교과서에서는 비율 지도에 앞서 두 양의 크기를 비교하여 분수로 나타내기, 상대 비교와 절대 비교 등을 다루었는데, 학생들은 이러한 내용을 토대로 비율 개념을 자연스럽게 이해할 수 있었다. 또한 비의 지도에 앞서 가법적 사고와 승법적 사고를 다루고 비율로부터 비 개념을 도입했는데, 학생들은 이러한 과정에서 별다른 어려움 없이 학습을 진행할 수 있었다.

둘째, 본 연구의 재구성 교과서에서 학생들이 상대 비교의 필요성을 인식하도록 하기 위해 제시된 맥락은 적절한 것으로 확인되었다. 학생들은 재구성 교과서에서 제시된 맥락(문제 상황)을 해결하기 위해 이전에 학습한 '두 양의 크기를 비교하여 분수로 나타내기'를 활용하였으며, 이로부터 상대 비교와 절대 비교의 차이점을 인식하였다. 또한, 학생들은 상대 비교로부터 비율 개념을 자연스럽게 이해할 수 있었으며, 비율에서 기준량과 비교하는 양의 개념을 이해하는데도 별다른 어려움을 겪지 않았다.

한편, 본 연구에서는 재구성 교과서를 활용한 실제 교수·학습 과정에서 학생들의 비율 개념화(conception) 과정에서의 상대적 어려움을 분석하였다. 일부 학생들은 전체-부분 비율보다 부분-부분 비율에서 상대적으로 더 많은 어려움을 겪는 것으로 확인되었다. 또한, 부분-부분 비율에서는, 기준량이 비교하는 양보다 더 큰 경우에 비해 기준량이 비교하는 양보다 더 적은 경우에 학생들이 더 많은 어려움을 겪는 것으로 확인되었다. 이로부터, 비율을 지도함에 있어서 전체-부분 비율, 부분-부분 비율(기준량이 비교하는 양보다 더 큰 경우), 부분-부분 비율(기준량이 비교하는 양보다 더 작은 경우)의 순서로 학생들을 지도하는 것이 바람직함을 확인할 수 있다. 또한 부분-부분 비율에서 기준량

이 비교하는 양보다 더 작은 경우에는 비율이 1보다 크다는 것을 지도할 필요가 있다는 것을 알 수 있다.

셋째, 재구성 교과서에서 비율을 나타내는 다양한 방법으로서 백분율과 비의 값을 함께 다룬 것은 적절한 것으로 확인되었다. 또한 재구성 교과서에서 비율을 나타내는 다른 방법으로서 백분율과 비의 값을 도식화하여 제시한 것도 학생들의 이해를 돕는 것으로 확인되었다. 학생들은 백분율과 100을 기준으로 할 때의 비율이 백분율이며, 1을 기준으로 할 때의 비율이 비의 값을 심층적으로 이해할 수 있었다.

넷째, 재구성 교과서에 제시된 맥락 중에서 일부는 부적절한 것으로 확인되었다. 이에 해당하는 대표적인 맥락은, 100원짜리 동전의 수와 50원짜리 동전의 수의 관계를 비로 나타내도록 한 것이었다. 동전의 개수의 비 측면에서 보면, 100원짜리와 50원짜리 동전의 개수의 비는 1:2이지만, 100원과 50원이라는 양의 관점에서 보면 100원과 50원의 비는 2:1이다. '동전의 개수'와 '동전이 나타내는 양'이 학생들의 인지적 혼란을 불러온 것이다. 따라서 재구성 교과서의 동전 맥락은 학생들의 인지적 혼란과 부담을 경감할 수 있는 맥락으로 대체될 필요가 있다.

다섯째, 재구성 교과서로 지도한 내용 중에서, 학생들이 가장 많은 어려움을 겪었던 내용은 비와 비의 값을 관련지어 이해하는 부분이었다. 재구성 교과서에서 비와 비의 값의 관련성을 보다 명시적으로 다룬 것은, 현실과 관련이 없는 비의 값을 계산 위주로 지나치게 강조하고 있으며 비 개념은 다른 수학 주제와 연결되지 않는 채로 지도되고 있다는 문제점(박정외, 2001; 정은실 2003a; Streefland, 1985)을 개선하기 위한 시도였다. 그러나 비의 값과 비를

연결하기 위해 시도된 재구성 교과서의 내용은 성공적이지 못했다고 할 수 있다. 이는, 학생들이 비의 값과 비를 관련시켜 의미 있게 이해하도록 하기 위해서는 재구성 교과서를 개선할 필요가 있음을 시사한다.

이와 같은 본 연구의 결과는 다음과 같은 시사점을 갖는다. 먼저, 본 연구의 결과는 2011학년부터 초등학교 현장에서 사용될 새로운 수학 교과서 개발에 의미 있는 시사점을 줄 것으로 기대한다. 다음으로, 본 연구의 결과는 현행 초등학교 수학 6-가 단계 비와 비율 단원의 1~3차시의 내용이, 폭과 깊이 측면에서 더 확장될 필요가 있음을 시사한다. 현행 교과서의 1~3차시(총 7쪽)의 내용만으로는 비와 비율의 의미 있는 교수·학습이 어려운 실정이다. 이미 언급한 바와 같이, 본 연구의 재구성 교과서의 양은 총 14쪽으로 확대되었으며, 실제 교수·학습에는 5개의 차시가 소요되었다. 그 이유는 현행 교과서의 문제점으로 확인된 사항들을 반영하여 교과서의 개선을 시도하는 과정에서 새롭게 추가된 내용들이 많았기 때문이다. 그럼에도 불구하고, 본 연구에서의 재구성 교과서는 현행 교과서와 마찬가지로 외적비를 의미 있게 다루지 못한 한계를 가지고 있다. 외적비는 서로 다른 종류의 두 양 사이의 비로서, 예를 들어, 시간과 거리의 비(속도), 단위 면적과 인구의 비(인구 밀도) 등을 말한다. 여러 선행 연구들(Freudenthal, 1983; 정은실, 2003a, 2003b)에서 주장하고 있듯이, 내적비의 불변성을 먼저 인식하고 다양한 맥락에서 충분한 경험을 한 후에는 외적비의 불변성을 학습하는 것이 비 개념의 학습에서 본질적이다. 또한, 제7차 수정·고시 수학과 교육과정에서도 <교수·학습 상의 유의점>에서 '속력, 인구밀도 등과 같이 타 교과 및 실생활에서 비율이 사용되는 예를 찾아보고, 관련된 문제를 해결해 보게 한

다.’를 명시하고 있다(교육인적자원부, 2006). 그러므로 외적비를 의미 있게 다루기 위해서는 현재 1개 차시로 구성되어 있는 비의 교수·학습 내용을 2~3개 차시로 확장할 필요가 있다. 1차시에서는 학생들에게 의미 있는 맥락으로부터 내적비를 도입하고 정의하고 내적비에 대한 개념을 확고히 한 다음, 2~3차시에서는 외적비를 집중적으로 다룸으로써 학생들이 두 양 사이의 불변의 관계로서의 비 개념의 본질을 보다 다양한 상황에서 이해하고 적용할 수 있도록 하는 것이 중요하다.

참고문헌

- 교육인적자원부(1997). **제7차 수학과 교육과정**. 서울: 교육인적자원부.
- 교육인적자원부(2003). **수학 6-가**. 서울: 교육인적자원부.
- 교육인적자원부(2006). **제7차 수정·고시 수학과 교육과정**. 서울: 교육인적자원부.
- 박정, 홍미영, 나귀수(2001). **TIMSS-R 국제기준에 따른 우리나라 중학생의 수학·과학 성취도 분석**. 한국교육과정평가원.
- 유현주(1995). **유리수 개념의 교수현상학적 분석과 학습-지도 방향에 관한 연구**. 서울대학교 박사학위 논문.
- 장혜원(2002). **초등학교 수학에서 비의 값과 비율 개념의 구별에 대한 논의**. **학교수학**, 4(4), 633-642.
- 정은실(2003a). **비 개념에 대한 교수학적 분석**. **수학교육학연구**, 13(3), 247-265.
- 정은실(2003b). **비 개념에 대한 역사적, 수학적, 심리적 분석**. **학교수학**, 5(4), 421-440.
- Britannica(2001a). *Mathematics in Context -Ratios and Rates*. 나온교육연구소(역), 수
- 학으로 보는 세상-Ratios and Rates. 서울: 도서출판 나온.
- Britannica(2001b). *Mathematics in Context -Comparing Quantities*. 나온교육연구소(역), **수학으로 보는 세상-Comparing Quantities**. 서울: 도서출판 나온.
- Britannica(2001c). *Mathematics in Context -Per Sense*. 나온교육연구소(역), **수학으로 보는 세상-Per Sense**. 서울: 도서출판 나온.
- Freudenthal. H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.
- Karplus, R. et al. (1983). *Proportional Reasoning of Early Adolescents*. In R. Lesh (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts & Processes*. Academic Press.
- Lamon, S. J. (1999). *Teaching Fractions and Ratios for Understanding: Essential context knowledge and instructional strategies for teachers*. Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Lesh, R., Post, T., Behr, M. (1988). *Proportional reasoning*. In J. Hiebert, & M. Behr (Ed.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 93-118). Lawrence Erlbaum Associates.
- NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA. : The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.
- Noelting, G. (1977). *The Development of Proportional Reasoning and the Ratio Concept*. *Educational Studies in Mathematics*, 11.
- Piaget, J. et. al. (1977). *Epistemology and Psychology of Functions*. Castellanos, F. X.

- Anderson, V. D. (trans.), Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.
- Streefland, L. (1985). Search for the roots of ratio: some thoughts on the long term learning process (towards a theory) part II: the outline of the long term learning process. *Educational Studies in Mathematics*, 16, 75-94.
- Thomson, P. (1994). The development of the concept of speed and its relation to concepts of Fate. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 179-234). Albany, NY: Sunny Press.

Teaching the Concept of Rate and Ratio - Focused on Using the Reconstructed Textbook -

Kim, Su Hyun (Unchoen Elementary School)

Na, Gwi Soo (Cheongju National University of Education)

In this research, we reconstructed the textbook on the concept of rate and ratio, which is based on the review on the previous researches and the analysis on the elementary textbook of the 7th mathematics curriculum. We conducted the teaching experiment using the reconstructed textbook, which is to identify the students' conception of rate and ratio and the appropriateness and limit of the reconstructed textbook. As the results of this study, we identify that the changed sequence of instruction (that is,

ratio \rightarrow percent and value of rate \rightarrow rate) was very proper to help students understand the concept of rate and ratio. The relative comparison and absolute comparison and the additive thinking and multiplicative thinking included in the reconstructed textbook were identified very helpful to students' understanding. Meanwhile some contexts given in the reconstructed textbook were identified to cause the students' cognitive confusions.

* **Key words** : reconstruction of textbook(교과서 재구성), ratio and rate(비와 비율), teaching experiment(교수실험), elementary mathematics(초등수학)

논문접수: 2008. 7. 10

논문수정: 2008. 8. 11

심사완료: 2008. 8. 13

[부 록: 재구성 교과서]

비율 알아보기

활동 1
외줄아보기
 4는 16의 퍼센트
 5는 15의 퍼센트
 6은 18의 퍼센트

활동 2
생활에서 알아보기
 온점도등학교 6학년 1반 학생들 국어 시험을 끝낸 것을 2명뿐이냐? 강점도등학교 6학년 1반 학생들 국어 시험을 끝낸 학생은 10명뿐이냐?

1. 온점도등학교 6학년 1반 학생들 국어 시험을 끝낸 학생들 중 시험을 끝낸 학생을 몇 사람이라고 할지 써주세요. 그 답을 구하는 방법을 보여주세요.
2. 온점도등학교 6학년 1반 학생들 국어 시험을 끝낸 학생을 몇 사람이라고 할지 써주세요. 그 답을 구하는 방법을 보여주세요.
3. 온점도등학교 6학년 1반 학생들 국어 시험을 끝낸 학생을 몇 사람이라고 할지 써주세요. 그 답을 구하는 방법을 보여주세요.
4. 세지훈은 국어는 누구가 잘하고 써-았어?

각각의 문제를 풀다가 막고 있는 친구가 수업을 하고 있는 것을 물어보려고 합니다.
 문제 안 풀었을 때 국어로만 답을 쓸 수 없습니다. 반드시 설명을 써주세요.

활동 3
외줄아보기
 4는 16의 퍼센트
 5는 15의 퍼센트
 6은 18의 퍼센트

활동 4
생활에서 알아보기
 온점도등학교 6학년 1반 학생들 국어 시험을 끝낸 것을 2명뿐이냐? 강점도등학교 6학년 1반 학생들 국어 시험을 끝낸 학생은 10명뿐이냐?

1. 온점도등학교 6학년 1반 학생들 국어 시험을 끝낸 학생들 중 시험을 끝낸 학생을 몇 사람이라고 할지 써주세요. 그 답을 구하는 방법을 보여주세요.
2. 온점도등학교 6학년 1반 학생들 국어 시험을 끝낸 학생을 몇 사람이라고 할지 써주세요. 그 답을 구하는 방법을 보여주세요.
3. 온점도등학교 6학년 1반 학생들 국어 시험을 끝낸 학생을 몇 사람이라고 할지 써주세요. 그 답을 구하는 방법을 보여주세요.
4. 세지훈은 국어는 누구가 잘하고 써-았어?

비율 알아보기

활동 1
 4는 16의 퍼센트
 5는 15의 퍼센트
 6은 18의 퍼센트

활동 2
생활에서 알아보기
 온점도등학교 6학년 1반 학생들 국어 시험을 끝낸 것을 2명뿐이냐? 강점도등학교 6학년 1반 학생들 국어 시험을 끝낸 학생은 10명뿐이냐?

1. 온점도등학교 6학년 1반 학생들 국어 시험을 끝낸 학생들 중 시험을 끝낸 학생을 몇 사람이라고 할지 써주세요. 그 답을 구하는 방법을 보여주세요.
2. 온점도등학교 6학년 1반 학생들 국어 시험을 끝낸 학생을 몇 사람이라고 할지 써주세요. 그 답을 구하는 방법을 보여주세요.
3. 온점도등학교 6학년 1반 학생들 국어 시험을 끝낸 학생을 몇 사람이라고 할지 써주세요. 그 답을 구하는 방법을 보여주세요.
4. 세지훈은 국어는 누구가 잘하고 써-았어?

활동 1
 4는 16의 퍼센트
 5는 15의 퍼센트
 6은 18의 퍼센트

활동 2
생활에서 알아보기
 온점도등학교 6학년 1반 학생들 국어 시험을 끝낸 것을 2명뿐이냐? 강점도등학교 6학년 1반 학생들 국어 시험을 끝낸 학생은 10명뿐이냐?

1. 온점도등학교 6학년 1반 학생들 국어 시험을 끝낸 학생들 중 시험을 끝낸 학생을 몇 사람이라고 할지 써주세요. 그 답을 구하는 방법을 보여주세요.
2. 온점도등학교 6학년 1반 학생들 국어 시험을 끝낸 학생을 몇 사람이라고 할지 써주세요. 그 답을 구하는 방법을 보여주세요.
3. 온점도등학교 6학년 1반 학생들 국어 시험을 끝낸 학생을 몇 사람이라고 할지 써주세요. 그 답을 구하는 방법을 보여주세요.
4. 세지훈은 국어는 누구가 잘하고 써-았어?

활동 1
 4는 16의 퍼센트
 5는 15의 퍼센트
 6은 18의 퍼센트

활동 2
생활에서 알아보기
 온점도등학교 6학년 1반 학생들 국어 시험을 끝낸 것을 2명뿐이냐? 강점도등학교 6학년 1반 학생들 국어 시험을 끝낸 학생은 10명뿐이냐?

1. 온점도등학교 6학년 1반 학생들 국어 시험을 끝낸 학생들 중 시험을 끝낸 학생을 몇 사람이라고 할지 써주세요. 그 답을 구하는 방법을 보여주세요.
2. 온점도등학교 6학년 1반 학생들 국어 시험을 끝낸 학생을 몇 사람이라고 할지 써주세요. 그 답을 구하는 방법을 보여주세요.
3. 온점도등학교 6학년 1반 학생들 국어 시험을 끝낸 학생을 몇 사람이라고 할지 써주세요. 그 답을 구하는 방법을 보여주세요.
4. 세지훈은 국어는 누구가 잘하고 써-았어?

백분율(% 퍼센트), 비의 값 알아보기

활동 1
 4는 16의 퍼센트
 5는 15의 퍼센트
 6은 18의 퍼센트

활동 2
생활에서 알아보기
 온점도등학교 6학년 1반 학생들 국어 시험을 끝낸 것을 2명뿐이냐? 강점도등학교 6학년 1반 학생들 국어 시험을 끝낸 학생은 10명뿐이냐?

1. 온점도등학교 6학년 1반 학생들 국어 시험을 끝낸 학생들 중 시험을 끝낸 학생을 몇 사람이라고 할지 써주세요. 그 답을 구하는 방법을 보여주세요.
2. 온점도등학교 6학년 1반 학생들 국어 시험을 끝낸 학생을 몇 사람이라고 할지 써주세요. 그 답을 구하는 방법을 보여주세요.
3. 온점도등학교 6학년 1반 학생들 국어 시험을 끝낸 학생을 몇 사람이라고 할지 써주세요. 그 답을 구하는 방법을 보여주세요.
4. 세지훈은 국어는 누구가 잘하고 써-았어?

