대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 18 권 제 3 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 18, No. 3, 373-389. Aug 2008

예비중등교사의 수학화 학습을 위한 교수단원의 설계: 분할모델과 일반화된 피보나치 수열 사이의 관계 탐구[1)]

김 진 환* · 박 교 식**

이 연구에서는 예비중등교사들의 수학화 학습을 위해 분할모델과 일반화된 피보나치 수열 사이의 관계를 탐구하는 교수단원을 설계한다. 이 교수단원에서는 먼저 예비중등교사들이 조직해야 할 현상을 탐구문제의 형태로 제공한다. 그들은 이 탐구문제를 해결하면서, 그것을 조직하는 본질 즉, 분할의 수에 대한 패턴을 찾게 된다. 이 과정에서 점차 커지는 분할될 수의 집합에 따라 분할모델의 유형도 다양해진다. 이러한 분할모델에 대한 분할의 수를 구하고, 이 수들 사이의 패턴을 찾아 공식을 만들고, 이 공식들이 일반화된 피보나치 수열과 관계가 있음을 찾는다. 분할모델과 피보나치 수열 사이의 이러한 관계는 이전에 알려지지 않은 소재인 만큼, 그것은 예비중등교사들로 하여금 수학화를 가상적으로 연습하게 하는 것이 아니라, 실제처럼 연습할 수 있게 한다.

I. 서 론

이 연구에서는 예비중등교사들의 수학화 학습을 위해 분할모델과 일반화된 피보나치 수열 사이의 관계를 탐구하는 교수단원을 설계한다. 수학화는 수학자들이 현실을 수학으로 조직하는 대역적 또는 국소적 메커니즘을 의미한다. 현실은 그들이 일종의 상식으로 받아들이는 수학 지식이다. 이렇게 보면 수학 지식으로부터 수학화를 통해 새로운 수학 지식이 출현한다. 수학자들은 새로운 수학으로 조직할 필요가 있는 현실 즉, 현상을 임의적으로 선택하고, 그것을 조직하기 위한 수단으로서의 새로운 수학 즉, 본질을 고안한다. 본질이 현상을 조직하고 나면, 그 본질을 새로운 현상으로 보고, 그것을 조직하는 새로운 본질을 고안하는 새로운 수학화가 계속될 수 있다. 이렇게 보면 수학화는 사실상 거의 모든 수학적 활동의 메커니즘이라 할 수 있다(Freudental, 1973, 1983, 2008; 박교식, 1992; 정영옥, 1997; 우정호, 2000). 프로이덴탈(1973)은 실행수학의 관점에서 수학화를 바탕으로 하는 교수 · 학습을 강조하였으나, 교수 · 학습의 차원에서 수학화의 실제에 관한 아이디어를 체계적으로 제시하지는 않았다. 이에 이 연구에서는 그러한 아이디어의 구현을 비트만(Wittmann, 1984, 1995, 1999, 2001)의 교수단원에서 찾고 있다. 비트만은 설계 과학(design science)의 관점에서, 교수단원을 제시하고 있는 바, 그것은 적절한 수학적 소재의 교수학적 전개를 구조적으로 예시하는 것으로, 단위 수업 시간의 전개를 상술한

* 영남대학교 kimjh@ynu.ac.kr
** 경인교육대학교 pkspark@gin.ac.kr
1) 이 연구는 2007학년도 영남대학교 학술연구조성비에 의한 것임.

지도안과는 다르다.

예비중등교사들에게는 장차 중고등학교에서 학생들의 수학화를 안내할 사명이 있지만, 정작 교사교육의 과정에서 예비중등교사들이 이러한 수학화를 제대로 연습해 볼 기회는 사실상 거의 없다고 할 수 있다. 대개 그들은 기성수학(Freudental, 1973)에서 주어진 대로, 정리-증명을 답습할 뿐이다. 이러한 답습은 예비중등교사들에게 새로운 수학 지식을 만들어 볼 기회를 거의 주지 않는다. 이 연구는 그들에게 정리를 만들어 볼 기회 즉, 그들이 정리를 발견하고 증명할 기회를 제공하기 위한 것이다.

이 연구에서는 예비중등교사들이 수학화를 실제로 경험하게 하는 것을 목표로 한다. 그러나 현실적으로 이러한 경험에는 한계가 있다. 수학자들과는 달리, 예비중등교사들이 현상을 스스로 선택하는 것은 사실상 가능하지 않기 때문이다. 그들이 할 수 있는 것은 제공된 현상을 조직하는 본질을 고안하는 것이다. 이 연구는 예비중등교사들이 본질을 실제로 고안해 보는 경험을 하게 하는 것으로, 이를 위해서는 그러한 목적을 가진 적절한 교수·학습 과정이 필요하다. 비트만이 제시한 교수단원이 바로 이러한 역할을 할 수 있다. 교수단원은 그 목적에 따라 여러 가지 형태가 가능하다. 이 연구에서는 특별히 예비중등교사들의 수학화 경험을 위한 교수단원을 설계하고자 하는 바, 이 설계에서 가장 중요한 것은 의미 있는 소재의 개발이다. 예비중등교사들이 수학자들의 수학화 과정을 모방할 수 있게 하는 즉, 예비중등교사들의 입장에서는 진정한 수학화를 경험할 수 있는 소재가 필요하다. 그러한 소재가 예비 중등교사가 가지고 있는 기존의 지식과 경험에 연결된다면 더욱 의미 있는 교수단원이 될 것이다. 그러한 소재로 김진환과 박교식(2006a)은 n-단체(simplex)의 n-부피와 수 분할모델을 제시하고 있다. 김진환, 박교식, 이광호(2006)에서는 일정한 차를 갖는 수 분할모델을 제시하고 있다.

이 연구에서는 김진환과 박교식(2006b)에서 사용한 용어와 기호를 그대로 사용한다. 그들은 수의 유한 배열, 일정한 넓이의 가로와 세로의 길이 등을 수 분할의 관점에서 통합한 다음, 일반화된 분할모델인 수 S의 k-분할모델을 정의했다. 피보나치 수열은 수학사적으로 의미 있고 매우 유용한 수열로 다양한 문제의 보고이다(Garland, 1987). 또한 피보나치 수열은 영재교육이나 심화된 자료로 중등학생들에게 중요하게 다루어지는 수학적 소재이기도 하다. 교수단원 <분할모델과 일반화된 피보나치 수열 사이의 관계 탐구>에서는 분할될 수의 집합을 정수의 유한 부분집합으로 하여 분할모델의 분할의 수와 일반화된 피보나치수열 사이의 관계 탐구를 목적으로 한다. 따라서 이를 위해서는 예비중등교사들이 분할모델과 피보나치 수열에 대한 예비중등교사들의 선수 지식이 필요하다.

이 교수단원에서는 먼저 예비중등교사들이 조직해야 할 현상을 탐구문제의 형태로 제공한다. 그들은 이 탐구문제를 해결하면서, 그것을 조직하는 본질 즉, 분할의 수에 대한 패턴을 찾게 된다. 이 과정에서 점차 커지는 분할될 수의 집합에 따라 분할모델의 유형도 다양하다. 이러한 분할모델들에 대한 분할의 수를 구하고, 이 수들 사이의 패턴을 찾아 공식을 만들고, 이 공식들이 일반화된 피보나치 수열과 관계가 있음을 보인다. 이 연구는 특정한 분할모델이 피보나치 수열뿐만 아니라 일반형의 피보나치 수열을 다루는 수학적 모델로 활용될 수 있음을 보여 준다.

II. 분할모델의 유형

자연수 S의 k-분할모델에서 분할원소는 정수의 부분집합 A에 속한다. 더 나아가 분할원소 사이의 인접관계 $R=(R_1, R_2, \cdots, R_{k-1})$의 A에서 관계 R_i는 다음과 같이 주어진다.

$$p_i R_i p_{i+1} \Leftrightarrow p_i, p_{i+1} \in A \ (i=1, 2. \cdots, k\text{-}1)$$

$(p_1, p_2, \cdots, p_k)$는 n의 k-분할을 나타낸다(김진환, 박교식, 2006b). 이러한 인접관계는 두 인접원소 사이의 제약조건을 최소화한다. 이 논문에서 A는 정수 집합 Z의 부분집합

$$Z_m=\{1, 2, \cdots, m\} \ (m=1, 2, 3, \cdots)$$

으로 한정하기로 한다.

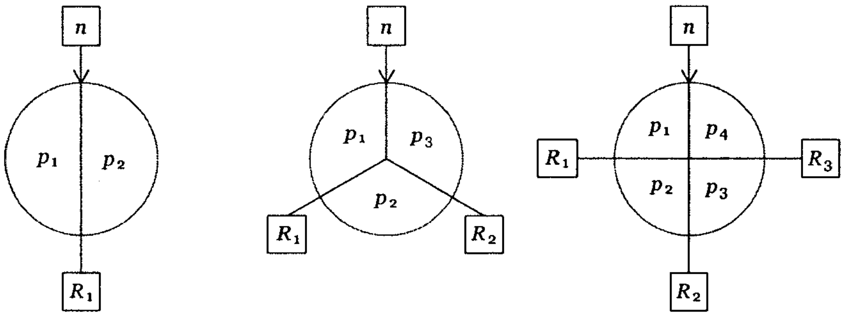
[그림 II-1]은 자연수 n의 k-분할모델(k=2, 3, 4)을 나타낸 것이다. 분할원소 사이의 인접관계 R_i는 다음과 같이 주어진다.

$$\Leftrightarrow p_i, p_{i+1} \in A \ (i=1, 2. \cdots, k\text{-}1)$$

이제 분할모델에 대한 이러한 지식을 바탕으로 예비중등교사들에게 다음과 같은 탐구문제를 제시한다. 이 탐구문제는 예비중등교사들이 해결해야 하는 과제이므로 교사교육자는 충분한 시간을 허용해야 한다. 예비중등교사들은 이 탐구문제를 해결하는 과정에서 분할의 수에 대한 귀납 결과를 바탕으로 이 수들 사이의 패턴을 찾아 공식을 만들게 된다. 이 탐구문제의 해결은 수학화의 본질로 볼 수 있는 패턴의 공식화를 촉발하는 매우 유용한 기준 과제(Wills, 1970)이다.

[탐구문제] (1) 분할원소 p_i(i=1, 2. $\cdots$, k-1)는 Z_m(m=1, 2, 3)에 속한다. 분할될 수 n이 1, 2, 3, 4, 5이고, k가 1, 2, 3, 4, 5인 경우에 대해 자연수 n의 k-분할의 수를 각각 모두 구하여라. (2) 분할원소 p_i(i=1, 2. $\cdots$, k-1)는 Z_m에 속한다. 이 수들 사이의 관계에서 얻어질 수 있는 일반적 패턴을 찾아라.

[탐구문제]에 대한 구체적 해결에 앞서 먼저 분할원소가 $Z_1=\{1\}$, $Z_2=\{1, 2\}$, $Z_3=\{1, 2, 3\}$, 그리고 일반적으로 $Z_m=\{1, 2, 3, \cdots, m\}$에 속하는 경우로 나누어 분할모델을 구성하도록 한다. 편의상 분할원소가 속하는 정수의 부분집합 Z_m에 따른 분할모델의 유형에 <표 II-1>과 같은 이름을 붙이기로 한다. 이를 위해 교사교육자는 예비중등교사들의 탐구 과정에 일시적으로 개입할 수 있다. 이 개입은 그들의 수평적 수학화를 위한 기호화 또는 이름 붙이기를 효율적으로 할 수 있도록 안내하기 위한 것이므로, <표 II-1>의 이름을 강요할 필요가 없다. 다른 이름도 충분히 가능하다.



[그림 II-1] n의 k-분할모델(김진환, 박교식, 2006b)

<표 II-1> 분할원소에 따른 분할모델의 유형

분할모델의 유형	분할원소
F1형	Z_1
F2형	Z_2
F3형	Z_3
F m형	Z_m

예비중등교사들은 분할원소가 Z_1, Z_2, Z_3에 속하는 경우에서 알 수 있는 사실을 바탕으로, 분할원소가 Z_m에 속할 때의 일반적 패턴을 추측할 수 있어야 하고, 그 추측이 실제로 성립한다는 것을 보여야 한다.

III. 분할의 수와 피보나치 수열 사이의 관계

[탐구문제]의 목적은 예비중등교사들이 분할의 수와 피보나치 수열 사이의 관계를 찾게 하는 것이다. 분할원소 $p_i(i=1, 2. \cdots, k-1)$는 $Z_m(m=1, 2, 3, \cdots, m)$에 속한다. 특히 [탐구문제]의 (1)에서는 $m=1, 2, 3$인 경우에 한정한다. [탐구문제]를 해결하는 과정에서 예비중등교사들은 스스로 필요한 기호를 고안해야 하는 바, 이 수평적 수학화를 위해 교사교육자가 개입할 수 있다. 여기서는 특히 분할원소가 Z_m에 속하는 자연수 n의 k-분할의 수와 분할원소가 Z_m에 속하는 자연수 n의 전체 분할의 수를 나타내는 기호가 필요하다. 첫째로, 기호 $F(n, m; k)$는 분할원소가 Z_m에 속하는 자연수 n의 k-분할의 수를 나타내는 것으로 한다. 예를 들어 $F(5, 3; 2)$는 분할원소가 Z_3에 속하는 자연수 5의 2-분할의 수 즉, 5의 F3형 2-분할의 수를 나타낸다. 예비중등교사들은 기호 $F(n, m; k)$를 이렇게 약속하는 것으로부터 분명히 알 수 있는 다음 사실을 발견할 수 있어야 한다.

$k=n$이면, 자연수 n의 k-분할은 (1, 1, ⋯, 1) (즉, 1이 n개) 하나뿐이다. 즉,

$$F(n, m; k)=1 \quad (\text{단, } k=n)$$

둘째로, 기호 $F(n, m)$은 분할원소가 Z_m에 속하는 자연수 n의 전체 분할의 수를 나타내는 것으로 한다. 즉,

$$F(n, m)=\sum_{k=1}^{n} F(n, m; k)$$

이다. 예를 들어 $F(5, 3)$은 분할원소가 Z_3에 속하는 자연수 5의 전체 분할의 수 즉, 자연수 5의 F3형 1-분할, 2-분할, 3-분할, 4-분할, 5-분할의 수를 모두 더한 것이다.

이 장에서는 $m=1, 2, 3$인 경우에 한정해서 F1형, F2형, F3형 분할의 수와 피보나치 수열 사이의 관계를 탐구한다.

1. F1형 분할의 수와 피보나치 수열 사이의 관계

예비중등교사들로 하여금 $n=1, 2, \cdots, 5$인 경우의 n의 F1형 분할의 수 $F(n, 1)$을 구해 표로 만들어 보게 한다. (예를 들어 <표 III-1>). 예비중등교사들은 이 과정에서 F1형 분할모델에서 분할원소는 $Z_1=\{1\}$에 속해야 하므로, $k<n$이면 n의 F1형 k-분할은 존재하지 않는다는 사실을 설명할 수 있어야 한다.

(1) $n=1$: 1의 F1형 1-분할은 (1)의 하나이므로 $F(1, 1; 1)=1$이다. 따라서 1의 F1형 분할의 수는 다음과 같다.

$$F(1, 1)=\sum_{k=1}^{1} F(1, 1; k) = F(1, 1; 1)=1$$

(2) n=2: 2의 F1형 1-분할은 존재하지 않으므로 $F(2, 1; 1)=0$이다. 2의 F1형 2-분할은 (1, 1)의 하나이므로 $F(2, 1; 2)=1$이다. 따라서 2의 F1형 분할의 수는 다음과 같다.

$$F(2, 1)= \sum_{k=1}^{2} F(2, 1; k)$$
$$= F(2, 1; 1)+ F(2, 1; 2)$$
$$=0+1=1$$

(3) n=3: 3의 F1형 1-분할 및 2-분할은 존재하지 않으므로, $F(3, 1; 1)=0$, $F(3, 1; 2)=0$이다. 3의 F1형 3-분할은 (1, 1, 1)의 하나이므로 $F(3, 1; 3)=1$이다. 따라서 3의 F1형 분할의 수는 다음과 같다.

$$F(3, 1)= \sum_{k=1}^{3} F(3, 1; k)$$
$$= F(3, 1; 1)+ F(3, 1; 2)+ F(3, 1; 3)$$
$$=0+0+1=1$$

(4) n=4: 4의 F1형 1-분할, 2-분할, 3-분할은 존재하지 않으므로, $F(4, 1; 1)=0$, $F(4, 1; 2)=0$, $F(4, 1; 3)=0$이다. 4의 F1형 4-분할은 (1, 1, 1, 1)의 하나이므로 $F(4, 1; 4)=1$이다. 따라서 4의 F1형 분할의 수는 다음과 같다.

$$F(4, 1)= \sum_{k=1}^{4} F(4, 1; k)$$
$$= F(4, 1; 1)+ F(4, 1; 2)+ F(4, 1; 3)+ F(4, 1; 4)$$
$$=0+0+0+1=1$$

(5) n=5: 5의 F1형 1-분할, 2-분할, 3-분할, 4-분할은 존재하지 않으므로, $F(5, 1; 1)=0$, $F(5, 1; 2)=0$, $F(5, 1; 3)=0$, $F(5, 1; 4)=0$이다. 5의 F1형 5-분할은 (1, 1, 1, 1, 1)의 하나이므로 $F(5, 1; 5)=1$이다. 따라서 5의 F1형 분할의 수는 다음과 같다.

$$F(5, 1)= \sum_{k=1}^{5} F(5, 1; k)$$
$$= F(5, 1; 1)+ F(5, 1; 2)+ F(5, 1; 3)$$
$$+ F(5, 1; 4)+ F(5, 1; 5)$$
$$=0+0+0+0+1=1$$

<표 III-1>은 n의 F1형 k-분할(n=1, 2, ⋯, 6; k=1, 2, ⋯, 6)을 나타낸 것이다. 예비중등교사들은 <표 III-1>로부터 귀납적으로 $F(n, 1)=1$ (n=1, 2, ⋯)일 것으로 추측할 수 있을 것이다. 사실상 n의 F1형 k-분할은 항상 n의 F1형 (k-1)-분할에 1을 추가함으로써 얻을 수 있다. 예를 들어 6의 F1형 6-분할은 5의 F1형 5-분할 (1, 1, 1, 1, 1)에 1을 추가한 (1, 1, 1, 1, 1, 1)이다.

일반적으로 분할원소가 1이어야 하는 n의 F1형 k-분할은 $k=n$일 때만 (1, 1, ⋯, 1) (즉, 1이 n개)의 하나뿐이고, 그 이외의 경우는 존재하지 않는다. 즉, n의 F1형 분할의 수를 나타내는 수열은 다음과 같다.

1, 1, 1, ⋯

이것은 일반항을 $a_n = F(n, 1)$ (n=1, 2, ⋯)으로 하는 수열이다. 이 수열은 '단계 1의 피보나치 수열' 또는 '퇴화된 피보나치 수열'이라고 불

<표 III-1> n의 F1형 k-분할

k \ n	1	2	3	4	5	6
1-분할	(1)					
2-분할		(1, 1)				
3-분할			(1, 1, 1)			
4-분할				(1, 1, 1, 1)		
5-분할					(1, 1, 1, 1, 1)	
6-분할						(1, 1, 1, 1, 1, 1)
$F(n, 1)$	1	1	1	1	1	1

리는 것이다. 이 논문에서는 단계 1의 피보나치 수열이라는 이름을 사용하기로 한다. 한편, $n=0$ 일 때도 이 식이 성립하도록 편의상 $F(0, 1)=1$ 로 약속할 수 있다. 이러한 약속은 우리가 보통 피보나치 수열이라고 부르는 것과의 관계를 알아보기 위해 필요하다. 그러나 만약 예비중등교사들이 일반항이 $a_n = F(n, 1)$ ($n=0, 1, 2, \cdots$)으로 주어지는 수열이 단계 1의 피보나치 수열이라는 것을 아직 알지 못하는 상태라면, F1형 분할모델과 단계1의 피보나치 수열과의 관계에 대한 논의는 3절 이후로 미루어도 된다.

2. F2형 분할의 수와 피보나치 수열 사이의 관계

F2형 분할모델에서 분할원소는 $Z_2=\{1, 2\}$에 속해야 한다. 예비중등교사들로 하여금 $n=1, 2, \cdots, 5$인 경우의 n의 F2형 분할의 수 $F(n, 2)$를 구해 표로 만들어 보게 한다. (예를 들어 <표 III-2>).

(1) $n=1$: 1의 F2형 1-분할은 (1)의 하나이므로 $F(1, 2; 1)=1$이다. 따라서 1의 F2형 분할의 수는 다음과 같다.

$$F(1, 2) = \sum_{k=1}^{1} F(1, 2; k) = F(1, 2; 1) = 1$$

(2) $n=2$: 2의 F2형 1-분할은 (2)의 하나이므로 $F(2, 2; 1)=1$, 2의 F2형 2-분할은 (1, 1)의 하나이므로 $F(2, 2; 2)=1$이다. 따라서 2의 F2형 분할의 수는 다음과 같다.

$$F(2, 2) = \sum_{k=1}^{2} F(2, 2; k) = F(2, 2; 1) + F(2, 2; 2) = 1+1=2$$

(3) $n=3$: 3의 F2형 1-분할은 존재하지 않으므로 $F(3, 2; 1)=0$, 3의 F2형 2-분할은 (1, 2)와 (2, 1)의 두 개이므로 $F(3, 2; 2)=2$, 3의 F2형 3-분할은 (1, 1, 1)의 하나이므로 $F(3, 2; 3)=1$이다. 따라서 3의 F2형 분할의 수는 다음과 같다.

$$F(3, 2) = \sum_{k=1}^{3} F(3, 2; k) = F(3, 2; 1) + F(3, 2; 2) + F(3, 2; 3) = 0+2+1=3$$

(4) $n=4$: 4의 F2형 1-분할은 존재하지 않으므로 $F(4, 2; 1)=0$, 4의 F2형 2-분할은 (2, 2)의 하나이므로 $F(4, 2; 2)=1$, 4의 F2형 3-분할은 (1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1)의 세 개이므로 $F(4, 2; 3)=3$, 4의 F2형 4-분할은 (1, 1, 1, 1)의 하나이므로 $F(4, 2; 4)=1$이다. 따라서 4의 F2형 분할의 수는 다음과 같다.

$$F(4, 2) = \sum_{k=1}^{4} F(4, 2; k) = F(4, 2; 1) + F(4, 2; 2) + F(4, 2; 3) + F(4, 2; 4) = 0+1+3+1=5$$

(5) $n=5$: 5의 F2형 1-분할, 2-분할은 존재하지 않으므로 $F(5, 2; 1)=0$, $F(5, 2; 2)=0$이다. 5의 F2형 3-분할은 (1, 2, 2), (2, 1, 2), (2, 2, 1)의 세 개이므로 $F(5, 2; 3)=3$, 5의 F2형 4-분할은 (1, 1, 1, 2), (1, 1, 2, 1), (1, 2, 1, 1), (2, 1, 1, 1)의 네 개이므로 $F(5, 2; 4)=4$, 5의 F2형 5-분할은 (1, 1, 1, 1, 1)의 하나이므로 $F(5, 2; 5)=1$이다. 따라서 5의 F2형 분할의 수는 다음과 같다.

$$F(5, 2) = \sum_{k=1}^{5} F(5, 2; k) = F(5, 2; 1) + F(5, 2; 2) + F(5, 2; 3) + F(5, 2; 4) + F(5, 2; 5) = 0+0+3+4+1=8$$

<표 III-2>는 n의 F2형 k-분할(n=1, 2, ⋯, 6; k=1, 2, ⋯, 6)을 나타낸 것이다. 예비중등교사들은 <표 III-2>의 작성을 통해 n의 F2형 k-분할을 (n-2)의 F2형 (k-1)-분할에 2를 추가해서, 그리고 (n-1)의 F2형 (k-1)-분할에 1을 추가해서 얻을 수 있다는 것을 귀납적으로 추측할 수 있다. 예를 들어 6의 F2형 5-분할은 4의 F2형 4-분할 (1, 1, 1, 1)에 2를 추가해서, 그리고 5의 F2형 5-분할 (1, 1, 1, 2), (1, 1, 2, 1), (1, 2, 1, 1), (2, 1, 1, 1)에 각각 1을 추가해서 얻을 수 있다. 즉, 6의 F2형 5-분할은 다음의 다섯 개임을 알 수 있다.

(1, 1, 1, 1, 2), (1, 1, 1, 2, 1), (1, 1, 2, 1, 1), (1, 2, 1, 1, 1), (2, 1, 1, 1, 1)

예비중등교사들은 n의 F2형 분할의 수를 나타내는 수열 즉, $F(n, 2)$ (n=1, 2, ⋯)는 다음과 같을 것으로 추측할 수 있다.

1, 2, 3, 5, 8, ⋯

이것은 피보나치 수열을 생각나게 한다. 이제 예비중등교사들은 n의 F2형 분할의 수를 나타내는 수열이 피보나치 수열인지 확인해야 한다. 이를 위해 <표 III-2>를 <표 III-3>과 같이 정리해 보자.

예비중등교사들로 하여금 <표 III-2>와 <표 III-3>로부터 얻을 수 있는 규칙적인 성질들을 귀납적으로 찾아보게 한다. 그들은 특히 다음과 같은 성질을 추측할 수 있어야 한다.

<표 III-2> n의 F2형 k-분할

k \ n	1	2	3	4	5	6
1-분할	(1)	(2)				
2-분할		(1, 1)	(1, 2) (2, 1)	(2, 2)		
3-분할			(1, 1, 1)	(1, 1, 2) (1, 2, 1) (2, 1, 1)	(1, 2, 2) (2, 1, 2) (2, 2, 1)	(2, 2, 2)
4-분할				(1, 1, 1, 1)	(1, 1, 1, 2) (1, 1, 2, 1) (1, 2, 1, 1) (2, 1, 1, 1)	(1, 1, 2, 2) (1, 2, 1, 2) (2, 1, 1, 2) (1, 2, 2, 1) (2, 1, 2, 1) (2, 2, 1, 1)
5-분할					(1, 1, 1, 1, 1)	(1, 1, 1, 1, 2) (1, 1, 1, 2, 1) (1, 1, 2, 1, 1) (1, 2, 1, 1, 1) (2, 1, 1, 1, 1)
6-분할						(1, 1, 1, 1, 1, 1)
$F(n, 2)$	1	2	3	5	8	13

<표 III-3> n의 F2형 분할의 수

k \ n	1	2	3	4	5	6
1-분할의 수	1	1	0	0	0	0
2-분할의 수	0	1	2	1	0	0
3-분할의 수	0	0	1	3	3	1
4-분할의 수	0	0	0	1	4	6
5-분할의 수	0	0	0	0	1	5
6-분할의 수	0	0	0	0	0	1
$F(n, 2)$	1	2	3	5	8	13

첫째, $k=n$이면 n의 F2형 k-분할은 하나이다. 즉,

$$F(n, 2; n)=1 \ (k=n) \quad \cdots \text{(식 III-1)}$$

둘째, $1 \le k < \frac{n}{2}$ $(n \ge 3)$ 이면 n의 F2형 k-분할은 존재하지 않는다. 즉,

$$F(n, 2; k)=0, \ (1 \le k < \frac{n}{2}, \ n \ge 3) \quad \cdots \text{(식 III-2)}$$

셋째, $\frac{n}{2} \le k < n$ $(n \ge 3)$이면 n의 F2형 k-분할의 수는 (n-2)의 F2형 (k-1)-분할의 수와 (n-1)의 F2형 (k-1)-분할의 수의 합과 같다. 그런데 이것은 $k=n$일 때도 성립한다. 즉,

$$F(n, 2; k) = F(n-2, 2; k-1) + F(n-1, 2; k-1)$$

$$(\frac{n}{2} \le k \le n, \ n \ge 3) \quad \cdots \text{(식 III-3)}$$

넷째, $n \ge 3$일 때 n의 F2형 분할의 수는 (n-2)의 F2형 분할의 수와 (n-1)의 F2형 분할의 수의 합과 같다. 이때 n=2일 때 이 식이 성립하도록 편의상 $F(0, 2)=1$로 약속할 수 있다. 앞에서 $F(1, 2)=1$이다. 즉,

$$F(0, 2)=1, \ F(1, 2)=1,$$

$$F(n, 2) = F(n-2, 2) + F(n-1, 2) \ (n \ge 2)$$

$$\cdots \text{(식 III-4)}$$

이 수열이 우리가 보통 피보나치 수열이라고 부르는 것이다. 피보나치 수열의 일반화 과정에서 이 수열을 흔히 단계 2의 피보나치 수열이라고 한다. 여기서도 이 수열을 단계 2의 피보나치 수열이라고 부르기로 한다.

이제 예비중등교사들은 식 (III-1) ~ (III-4)가 성립한다는 것을 보여야 한다. 그런데 앞에서 이미 (식 III-1)이 성립한다는 것을 보였다. 예비중등교사들로 하여금 (식 III-2), (식 III-3), (식 III-4)가 성립한다는 것을 보이도록 한다. 예를 들어 다음과 같이 보일 수 있다.

먼저 (식 III-2)가 성립한다는 것을 보이기로 하자. n의 F2형 k-분할 $(p_1, p_2, \cdots, p_k)$에서 k개의 분할원소는 집합 $Z_2=\{1, 2\}$에 속하므로, k개의 분할원소의 합의 최댓값은 $2k$이다. 따라서 $2k < n$이면 n의 F2형 k-분할은 존재하지 않는다. 즉, (식 III-2)가 성립한다.

다음으로 (식 III-3)이 성립한다는 것을 보이기로 하자. n의 F2형 k-분할 $(p_1, p_2, \cdots, p_k)$에서 맨 마지막의 원소 p_k가 1인 경우와 2인 경우로 나눌 수 있다. 먼저 $p_k=1$인 경우에는 $p_1, p_2, \cdots, p_{k-1}$는 $Z_2=\{1, 2\}$에 속하는 수들이고 그 합은 n-1이어야 한다. 이 경우에 n의 F2형 k-분할의 수를 구하는 것은 (n-1)의 F2형 (k-1)-분할의 수를 구하는 것과 같다. 따라서 그 수는 $F(n-1, 2; k-1)$임을 알 수 있다. 다음으로 $p_k=2$인 경우에는 $p_1, p_2, \cdots, p_{k-1}$는 $Z_2=\{1, 2\}$에 속하는 수들이고 그 합은 n-2이어야 한다. 이 경우에 n의 F2형 k-분할의 수를 구하는 것은 (n-2)의 F2형 (k-1)-분할의 수를 구하는 것과 같다. 따라서 그 수는 $F(n-2, 2; k-1)$임을 알 수 있다. 이 두 경우를 종합하면 (식 III-3)을 얻을 수 있다.

셋째로 (식 III-4)가 성립한다는 것을 보이기로 하자. $F(0, 2)=1$은 편의상 도입한 것이고, $F(1, 2)=1$이다. 이렇게 하면 (식 III-3)은 $n \ge 2$일 때 성립한다. 또, 편의상 $F(n, m; 0)=0$으로 약속하면, $1 \le k \le n$, $n \ge 2$일 때 다음이 성립한다.

$$F(n, 2) = \sum_{k=1}^{n} F(n, 2; k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \{ F(n-2, 2; k-1) + F(n-1, 2; k-1) \}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} F(n-2, 2; k-1) + \sum_{k=1}^{n} F(n-1, 2; k-1)$$

$$= F(n-2, 2) + F(n-1, 2)$$

즉, (식 III-4)가 성립한다.

예비중등교사들은 이 결과로부터 n의 F2형 분할의 수를 나타내는 수열이 피보나치 수열임

을 확인할 수 있다. 즉, 일반항을 $a_n = F(n, 2)$ (n=0, 1, 2, …)로 하는 수열

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89,
144, 233, 377, …

은 $a_0 = F(0, 2)=1$, $a_1 = F(1, 2)=1$로 하고

$a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$ ($n \geq 2$)

또는 $a_{n+1} = a_{n-1} + a_n$ ($n \geq 1$)

을 만족하는 피보나치 수열이다.

3. F3형 분할의 수와 피보나치 수열 사이의 관계

F3형 분할모델에서 분할원소는 $Z_3=\{1, 2, 3\}$에 속해야 한다. 예비중등교사들로 하여금 n=1, 2, 3, 4, 5인 경우의 n의 F3형 분할의 수 $F(n, 3)$을 구해 표로 만들어 보게 한다.

(1) n=1: 1의 F3형 1-분할은 (1)의 하나이므로 $F(1, 3; 1)=1$이다. 따라서 1의 F3형 분할의 수는 다음과 같다.

$$F(1, 3) = \sum_{k=1}^{1} F(1, 3; k) = F(1, 3; 1) = 1$$

(2) n=2: 2의 F3형 1-분할은 (2)의 하나이므로 $F(2, 3; 1)=1$, 2의 F3형 2-분할은 (1, 1)의 하나이므로 $F(2, 3; 2)=1$이다. 따라서 2의 F3형 분할의 수는 다음과 같다.

$$F(2, 3) = \sum_{k=1}^{3} F(2, 3; k) = F(2, 3; 1) + F(2, 3; 2) = 1+1 = 2$$

(3) n=3: 3의 F3형 1-분할은 (3)의 하나이므로 $F(3, 3; 1)=1$, 3의 F3형 2-분할은 (1, 2)와 (2, 1)의 두 개이므로 $F(3, 3; 2)=2$, 3의 F3형 3-분할은 (1, 1, 1)의 하나이므로 $F(3, 3; 3)=1$이다. 따라서 3의 F3형 분할의 수는 다음과 같다.

$$F(3, 3) = \sum_{k=1}^{3} F(3, 3; k) = F(3, 3; 1) + F(3, 3; 2) + F(3, 3; 3) = 1+2+1 = 4$$

(4) n=4: 4의 F3형 1-분할은 존재하지 않으므로 $F(4, 3; 1)=0$, 4의 F3형 2-분할은 (1, 3), (2, 2), (3, 1)의 세 개이므로 $F(4, 3; 2)=3$, 4의 F3형 3-분할은 (1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1)의 세 개이므로 $F(4, 3; 3)=3$, 4의 F3형 4-분할은 (1, 1, 1, 1)의 하나이므로 $F(4, 3; 4)=1$이다. 따라서 4의 F3형 분할의 수는 다음과 같다.

$$F(4, 3) = \sum_{k=1}^{4} F(4, 3; k) = F(4, 3; 1) + F(4, 3; 2) + F(4, 3; 3) = 0+3+3+1 = 7$$

(5) n=5: 5의 F3형 1-분할은 존재하지 않으므로 $F(5, 3; 1)=0$, 5의 F3형 2-분할은 (2, 3), (3, 2)의 두 개이므로 $F(5, 3; 2)=2$, 5의 F3형 3-분할은 (1, 1, 3) (1, 2, 2), (2, 1, 2), (1, 3, 1), (2, 2, 1), (3, 1, 1)의 여섯 개이므로 $F(5, 3; 3)=6$, 5의 F3형 4-분할은 (1, 1, 1, 2), (1, 1, 2, 1), (1, 2, 1, 1), (2, 1, 1, 1)의 네 개이므로 $F(5, 3; 4)=4$, 5의 F3형 5-분할은 (1, 1, 1, 1, 1)의 하나이므로 $F(5, 3; 5)=1$이다. 따라서 5의 F3형 분할의 수는 다음과 같다.

$$F(5, 3) = \sum_{k=1}^{5} F(5, 3; k) = F(5, 3; 1) + F(5, 3; 2) + F(5, 3; 3) + F(5, 3; 4) + F(5, 3; 5) = 0+2+6+4+1 = 13$$

<표 III-4>는 n의 F3형 k-분할(n=1, 2, …, 6; k=1, 2, …, 6)을 나타낸 것이다. 예비중등교

사들은 <표 III-2>의 작성을 통해 n의 F3형 k-분할을 (n-3)의 F3형 (k-1)-분할에 3을 추가해서, (n-2)의 F3형 (k-1)-분할에 2를 추가해서, (n-1)의 F3형 (k-1)-분할에 1을 추가해서 얻을 수 있다는 것을 귀납적으로 추측할 수 있다. 예를 들어 6의 F3형 4-분할은 3의 F3형 3-분할 (1, 1, 1)에 3을 추가해서, 4의 F3형 3-분할 (1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1)에 각각 2를 추가해서, 그리고 5의 F3형 3-분할 (1, 1, 3), (1, 2, 2), (2, 1, 2), (1, 3, 1), (2, 2, 1), (3, 1, 1)에 1을 추가해서 얻을 수 있다. 즉, 6의 F2형 4-분할은 다음의 열 개임을 알 수 있다.

(1, 1, 1, 3), (1, 1, 2, 2), (1, 2, 1, 2),
(2, 1, 1, 2), (1, 1, 3, 1), (1, 2, 2, 1),
(2, 1, 2, 1), (1, 3, 1, 1), (2, 2, 1, 1),
(3, 1, 1, 1)

이 예로부터 귀납적으로 n의 F3형 분할의 수를 나타내는 수열 즉, $F(n, 3)$ (n=1, 2, …)은 다음과 같을 것으로 추측할 수 있다.

1, 2, 4, 7, 13, 24, …

이제 예비중등교사들로 하여금 이 수열과 단계 2의 피보나치 수열과의 유사점을 찾아보게 한다. 단계 2의 피보나치 수열에서 앞의 두 항의 합이 새로운 항을 이룬 것처럼, 여기서는 앞의 세 항이 새로운 항을 이루는 것처럼 보인다. 즉, 다음과 같다.

1+2+4=7, 2+4+7=13, 4+7+13=24

이 수열은 단계 2의 피보나치 수열과 매우 유사하다. 예비중등교사들은 n의 F3형 분할의 수를 나타내는 수열이 단계 2의 피보나치 수열과 어떻게 유사한지 확인해야 한다. 이를 위해 <표 III-4>를 <표 III-5>과 같이 정리해 보자.

<표 III-5> n의 F3형 분할의 수

$k \backslash n$	1	2	3	4	5	6
1-분할의 수	1	1	1	0	0	0
2-분할의 수	0	1	2	3	2	1
3-분할의 수	0	0	1	3	6	7
4-분할의 수	0	0	0	1	4	10
5-분할의 수	0	0	0	0	1	5
6-분할의 수	0	0	0	0	0	1
$F(n, 3)$	1	2	4	7	13	24

<표 III-4> n의 F3형 k-분할

$k \backslash n$	1	2	3	4	5	6
1-분할	(1)	(2)	(3)			
2-분할		(1, 1)	(1, 2) (2, 1)	(1, 3) (2, 2) (3, 1)	(2, 3) (3, 2)	(3, 3)
3-분할			(1, 1, 1)	(1, 1, 2) (1, 2, 1) (2, 1, 1)	(1, 1, 3) (1, 2, 2) (2, 1, 2) (1, 3, 1) (2, 2, 1) (3, 1, 1)	(1, 2, 3) (2, 1, 3) (1, 3, 2) (2, 2, 2) (3, 1, 2) (2, 3, 1) (3, 2, 1)
4-분할				(1, 1, 1, 1)	(1, 1, 1, 2) (1, 1, 2, 1) (1, 2, 1, 1) (2, 1, 1, 1)	(1, 1, 1, 3) (1, 1, 2, 2) (1, 2, 1, 2) (2, 1, 1, 2) (1, 1, 3, 1) (1, 2, 2, 1) (2, 1, 2, 1) (1, 3, 1, 1) (2, 2, 1, 1) (3, 1, 1, 1)
5-분할					(1, 1, 1, 1, 1)	(1, 1, 1, 1, 2) (1, 1, 1, 2, 1) (1, 1, 2, 1, 1) (1, 2, 1, 1, 1) (2, 1, 1, 1, 1)
6-분할						(1, 1, 1, 1, 1, 1)
$F(n, 3)$	1	2	4	7	13	24

예비중등교사들로 하여금 <표 III-4>, <표 III-5>로부터 얻을 수 있는 규칙적인 성질들을 귀납적으로 찾아보게 한다. 그들은 특히 다음과 같은 성질을 추측할 수 있어야 한다.

첫째, $k=n$이면 n의 F3형 k-분할은 하나이다. 즉,

$$F(n, 3; n)=1 \ (k=n) \quad \cdots \text{(식 III-5)}$$

둘째, $1 \le k < \frac{n}{3}$ $(n \ge 4)$ 이면 n의 F3형 k-분할은 존재하지 않는다. 즉,

$$F(n, 3; k)=0, \ (1 \le k < \frac{n}{3}, \ n \ge 4) \quad \cdots \text{(식 III-6)}$$

셋째, $\frac{n}{3} \le k < n$ $(n \ge 4)$이면 n의 F3형 k-분할의 수는 $(n-3)$의 F3형 $(k-1)$-분할의 수, $(n-2)$의 F3형 $(k-1)$-분할의 수, $(n-1)$의 F3형 $(k-1)$-분할의 수의 합과 같다. 그런데 이것은 $k=n$일 때도 성립한다. 즉,

$$F(n, 3; k)= F(n-3, 3; k-1)+ F(n-2, 3; k-1) + F(n-1, 3; k-1)$$

$$(\frac{n}{3} \le k \le n, \ n \ge 4) \quad \cdots \text{(식 III-7)}$$

넷째, $n \ge 4$일 때 n의 F3형 분할의 수는 $(n-3)$의 F3형 분할의 수, $(n-2)$의 F3형 분할의 수, $(n-1)$의 F3형 분할의 수의 합과 같다. 이때 $n=3$일 때 이 식이 성립하도록 편의상 $F(0, 3)=1$로 약속할 수 있다. 앞에서 $F(1, 3)=1$, $F(2, 3)=2$이다. 즉,

$$F(0, 3)=1, \ F(1, 3)=1, \ F(2, 3)=2,$$

$$F(n, 3)= F(n-3, 3)+ F(n-2, 3)+ F(n-1, 3)$$

$$(n \ge 3) \quad \cdots \text{(식 III-8)}$$

피보나치 수열의 일반화 과정에서 이 수열을 흔히 단계 3의 피보나치 수열, 일반화된 3-피보나치 수열, 혹은 tetranacci sequence이라고 한다. 여기서는 이 수열을 단계 3의 피보나치 수열이라고 부르기로 한다.

이제 예비중등교사들은 식 (III-5) ~ (III-8)이 성립한다는 것을 보여야 한다. 그런데 앞에서 이미 (식 III-5)가 성립한다는 것을 보였다. 예비중등교사들로 하여금 (식 III-6), (식 III-7), (식 III-8)이 성립한다는 것을 보이도록 한다. 예를 들어 다음과 같이 보일 수 있다.

먼저 (식 III-6)이 성립한다는 것을 보이기로 하자. n의 F3형 k-분할 $(p_1, p_2, \cdots, p_k)$에서 k개의 분할원소는 집합 $Z_3=\{1, 2, 3\}$에 속하므로, k개의 분할원소의 합의 최댓값은 $3k$이다. 따라서 $3k < n$이면 n의 F3형 k-분할은 존재하지 않는다. 즉, (식 III-6)이 성립한다.

다음으로 (식 III-7)이 성립한다는 것을 보이기로 하자. n의 F3형 k-분할 $(p_1, p_2, \cdots, p_k)$에서 맨 마지막의 원소 p_k가 1인 경우, 2인 경우, 3인 경우로 나눌 수 있다. $p_k=1$인 경우에는 $p_1, p_2, \cdots, p_{k-1}$는 $Z_3=\{1, 2, 3\}$에 속하는 수들이고 그 합은 n-1이어야 한다. 이 경우에 n의 F3형 k-분할의 수를 구하는 것은 $(n-1)$의 F3형 $(k-1)$-분할의 수를 구하는 것과 같다. 따라서 그 수는 $F(n-1, 3; k-1)$임을 알 수 있다. $p_k=2$인 경우에는 $p_1, p_2, \cdots, p_{k-1}$는 $Z_3=\{1, 2, 3\}$에 속하는 수들이고 그 합은 n-2이어야 한다. 이 경우에 n의 F3형 k-분할의 수를 구하는 것은 $(n-2)$의 F3형 $(k-1)$-분할의 수를 구하는 것과 같다. 따라서 그 수는 $F(n-2, 3; k-1)$임을 알 수 있다. $p_k=3$인 경우에는 $p_1, p_2, \cdots, p_{k-1}$는 $Z_3=\{1, 2, 3\}$에 속하는 수들이고 그 합은 n-3이어야 한다. 이 경우에 n의 F3형 k-분할의 수를 구하는 것은 $(n-3)$의 F3형 $(k-1)$-분할의 수를 구하는 것과 같다. 따라서 그 수는 $F(n-3, 3; k-1)$임을 알 수 있다. 이 세 경우를 종합하면 (식 III-7)을 얻을 수 있다.

셋째로 (식 III-8)이 성립한다는 것을 보이기로 하자. $F(0, 3)=1$은 편의상 도입한 것이고, $F(1, 3)=1$, $F(2, 3)=2$이다. 이렇게 하면 (식

III-7)은 $n \geq 3$일 때 성립한다. 또, 편의상 $F(n, m; 0)=0$으로 약속하면, $1 \leq k \leq n$, $n \geq 3$일 때 다음이 성립한다.

$$F(n, 3)= \sum_{k=1}^{n} F(n, 3; k)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \{ F(n-3, 3; k-1)+ F(n-2, 3; k-1) + F(n-1, 3; k-1)\}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} F(n-3, 3; k-1)+ \sum_{k=1}^{n} F(n-2, 3; k-1)+ \sum_{k=1}^{n} F(n-1, 3; k-1)$$
$$= F(n-3, 3)+ F(n-2, 3)+ F(n-1, 3)$$

즉, (식 III-8)이 성립한다.

예비중등교사들은 이 결과로부터 n의 F3형 분할의 수를 나타내는 수열이 단계 3의 피보나치 수열임을 확인할 수 있다. 즉, 일반항을 $a_n = F(n, 3)$ (n=0, 1, 2, …)로 하는 수열

1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, …

는 $a_0 = F(0, 3)=1$, $a_1 = F(1, 3)=1$, $a_2 = F(1, 3)=1$로 하고

$a_n = a_{n-3}+ a_{n-2}+ a_{n-1}$ ($n \geq 3$)

을 만족하는 단계 3의 피보나치 수열이다.

IV. F *m*형 분할과 일반화된 피보나치 수열 사이의 관계

III장에서 F1형, F2형, F3형 분할의 수로 이루어지는 수열과 단계 1, 2, 3의 피보나치 수열 사이의 관계에 대해 논의했다. 여기서는 이러한 논의를 F m형 분할(m=1, 2, …, m)의 경우로 일반화하기로 한다. F m형의 분할모델에서 분할원소는 $Z_m=\{1, 2, \cdots, m\}$에 속해야 한다. 먼저 예비중등교사들은 귀납적으로 다음의 추측을 할 수 있어야 한다.

첫째, $k=n$이면 n의 F m형 k-분할은 하나이다. 즉,

$$F(n, m; n)=1 \ (k=n) \quad \cdots \text{(식 IV-1)}$$

둘째, $1 \leq k < \frac{n}{m}$ ($n \geq m+1$) 이면 n의 F m형 k-분할은 존재하지 않는다. 즉,

$$F(n, m; k)=0, \ (1 \leq k < \frac{n}{m}, \ n \geq m+1) \quad \cdots \text{(식 IV-2)}$$

셋째, $\frac{n}{m} \leq k < n$ ($n \geq m+1$)이면 n의 F m형 k-분할의 수는 ($n-m$)의 F m형 (k-1)-분할의 수, ($n-m+1$)의 F m형 (k-1)-분할의 수, …, (n-1)의 F m형 (k-1)-분할의 수의 합과 같다. 그런데 이것은 $k=n$일 때도 성립한다. 즉,

$$F(n, m; k)= \sum_{i=1}^{m} F(n-i, m; k-1)$$
$$= F(n-m, m; k-1)+ F(n-m+1, m; k-1) + \cdots + F(n-1, m; k-1)$$
$$(\frac{n}{m} \leq k \leq n, \ n \geq m+1) \quad \cdots \text{(식 IV-3)}$$

넷째, $n \geq m+1$일 때 n의 F m형 분할의 수는 ($n-m$)의 F m형 분할의 수, ($n-m+1$)의 F m형 분할의 수, …, (n-1)의 F m형 분할의 수의 합과 같다. 이때 $n=m$일 때 이 식이 성립하도록 편의상 $F(0, m)=1$로 약속할 수 있다. <표 IV-1>에서 $F(1, m)=1= 2^0$, $F(2, m)=2= 2^1$, $F(3, m)=4= 2^2$, $F(4, m)=8= 2^3$, …, $F(m-1, m)= 2^{m-2}$임을 추측할 수 있다. 즉,

$$F(0, m)=1, \ F(1, m)=1, \ F(2, m)=2, \ \cdots, \ F(m-1, m)= 2^{m-2}$$

$$F(n, m)= \sum_{i=1}^{m} F(n-i, m)$$
$$= F(n-m, m)+ F(n-m+1, m)+\cdots + F(n-1, m) \ (n \geq m) \quad \cdots \text{(식 IV-4)}$$

이제 예비중등교사들로 하여금 식 (IV-1) ~ (IV-4)가 성립한다는 것을 보이도록 한다. 그런데 앞에서 이미 (식 IV-1)이 성립한다는 것을 보였다. 예비중등교사들은 (식 IV-2), (식 IV-3),

(식 IV-4)가 성립한다는 것을 보여야 한다. 하지만 그에 앞서 예비중등교사들은 (식 IV-3)와 (식 IV-4)이 단계 m의 피보나치 수열을 정의한다는 것을 짐작할 수 있을 것이다. <표 IV-2>는 위의 (식 IV-4)에 따라 n=0, 1, 2, ⋯, 11 그리고 m=1, 2, ⋯, 7일 때의 $F(n, m)$을 각각 구해 표로 나타낸 것이다.

m=1, 2, 3일 때 일반항을 $a_n = F(n, m)$ (n=0, 1, 2, ⋯)으로 하는 수열을 각각 단계 1, 단계 2, 단계 3의 피보나치 수열이라고 한다는 것은 이미 앞에서 언급했다. 단계 1, 단계 2, 단계 3의 피보나치 수열을 또한 각각 퇴화된(degenerated) 피보나치 수열, 피보나치 수열, Tribonacci 수열이라고 한다. 같은 방법으로 단계 4, 단계 5, 단계 6, 단계 7 등의 피보나치 수열을 각각

Tetranacci 수열, Pentanacci 수열,
Hexanacci 수열, Heptanacci 수열, ⋯

이라고 한다.[2)]

예를 들어 (식 IV-2)가 성립한다는 것을 다음과 같이 보일 수 있다. 먼저 (식 IV-2)가 성립한다는 것을 보이기로 하자. $n \geq m+1$일 때, n의 F m형 k-분할 (p_1, p_2, ⋯, p_k)에서 k개의 분할원소는 집합 Z_m={1, 2, ⋯, m}에 속하

<표 IV-1> n의 F m형 k-분할

k \ n	1	2	3	4	5	6
1-분할	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
2-분할		(1, 1)	(1, 2), (2, 1)	(1, 3), (2, 2), (3, 1)	(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4,1)	(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)
3-분할			(1, 1, 1)	(1, 1, 2), (1, 2, 1) (2, 1, 1)	(1, 1, 3), (1, 2, 2), (2, 1, 2), (1, 3, 1) (2, 2, 1), (3, 1, 1)	(1, 1, 4), (1, 2, 3), (2, 1, 3), (1, 3, 2), (2, 2, 2), (3, 1, 2), (1, 4, 1), (2, 3, 1), (3, 2, 1), (4, 1, 1)
4-분할				(1, 1, 1, 1)	(1, 1, 1, 2), (1, 1, 2, 1), (1, 2, 1, 1), (2, 1, 1, 1)	(1, 1, 1, 3), (1, 1, 2, 2), (1, 2, 1, 2), (2, 1, 1, 2), (1, 1, 3, 1), ((1, 2, 2, 1), (2, 1, 2, 1), (1, 3, 1, 1), (2, 2, 1, 1), (3, 1, 1, 1)
5-분할					(1, 1, 1, 1, 1)	(1, 1, 1, 1, 2), (1, 1, 1, 2, 1) (1, 1, 2, 1, 1), (1, 2, 1, 1, 1) (2, 1, 1, 1, 1)
6-분할						(1, 1, 1, 1, 1, 1)
$F(n, m)$	1	2	4	8	16	32

<표 IV-2> 일반항을 $a_n = F(n, m)$으로 하는 수열

m \ n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	Degenerate
2	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	Fibonacci
3	1	1	2	4	7	13	24	44	81	149	274	504	Tribonacci
4	1	1	2	4	8	15	29	56	108	208	401	773	Tetranacci
5	1	1	2	4	8	16	31	61	120	236	464	912	Pentanacci
6	1	1	2	4	8	16	32	63	125	248	492	976	Hexanacci
7	1	1	2	4	8	16	32	64	127	253	504	1004	Heptanacci

2) http://mathworld.wolfram.com

므로, k개의 분할원소의 합의 최댓값은 mk이다. 따라서 $mk< n$이면 n의 Fm형 k-분할은 존재하지 않는다. 즉, (식 IV-2)가 성립한다.

다음으로 (식 IV-3)이 성립한다는 것을 보이기로 하자. n의 Fm형 k-분할 $(p_1, p_2, \cdots, p_k)$에서 맨 마지막의 원소 p_k가 1인 경우, 2인 경우, $\cdots$ m인 경우로 나눌 수 있다. $p_k=1$인 경우에는 $p_1, p_2, \cdots, p_{k-1}$는 $Z_m=\{1, 2, \cdots, m\}$에 속하는 수들이고 그 합은 n-1이어야 한다. 이 경우에 n의 Fm형 k-분할의 수를 구하는 것은 $(n$-1)의 Fm형 $(k$-1)-분할의 수를 구하는 것과 같다. 따라서 그 수는 $F(n-1, m; k-1)$임을 알 수 있다. $p_k=2$인 경우에는 $p_1, p_2, \cdots, p_{k-1}$는 $Z_m=\{1, 2, \cdots, m\}$에 속하는 수들이고 그 합은 n-2이어야 한다. 이 경우에 n의 Fm형 k-분할의 수를 구하는 것은 $(n$-2)의 Fm형 $(k$-1)-분할의 수를 구하는 것과 같다. 따라서 그 수는 $F(n-2, m; k-1)$임을 알 수 있다. 같은 방법으로 $p_k=m$인 경우에는 $p_1, p_2, \cdots, p_{k-1}$는 $Z_m=\{1, 2, \cdots, m\}$에 속하는 수들이고 그 합은 $n-m$이어야 한다. 이 경우에 n의 Fm형 k-분할의 수를 구하는 것은 $(n-m)$의 Fm형 $(k$-1)-분할의 수를 구하는 것과 같다. 따라서 그 수는 $F(n-m, m; k-1)$임을 알 수 있다. 이 m개의 경우를 종합하면 (식 IV-3)을 얻을 수 있다.

셋째로 (식 IV-4)가 성립한다는 것을 보이기로 하자. 편의상 $F(0, m)=1$로 약속했다. <표 IV-1>에서 $F(1, m)=1=2^0$, $F(2, m)=2=2^1$, $F(3, m)=4=2^2$, $F(4, m)=8=2^3$, $\cdots$, $F(m-1, m)=2^{m-2}$ $(m\geq 2)$ 임을 추측할 수 있다. 실제로는 $F(m-1, m)=2^{m-2}(m\geq 2)$임을 수학적 귀납법을 사용하여 보일 수 있다. 이렇게 하면 (식 IV-3)은 $n\geq m$일 때 성립한다. 또, 편의상 $F(n, m; 0)=0$으로 약속하면, $1\leq k\leq n$, $n\geq m$일 때 다음이 성립한다.

$$F(n, m)=\sum_{k=1}^{n} F(n, m; k)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\{F(n-m, m; k-1)$$

$$+F(n-m+1, m; k-1)+\cdots+F(n-1, m; k-1)\}$$

$$=\sum_{k=1}^{n} F(n-m, m; k-1)$$

$$+\sum_{k=1}^{n} F(n-m+1, m; k-1)+\cdots$$

$$+\sum_{k=1}^{n} F(n-1, m; k-1)$$

$$=F(n-m, m)+F(n-m+1, m)+\cdots+F(n-1, m)$$

즉, (식 IV-4)가 성립한다.

(식 IV-2), (식 IV-3), (식 IV-4)가 성립한다는 것을 III장의 결과를 이용하여 수학적 귀납법으로 보일 수도 있다.

예비중등교사들은 이 결과로부터 n의 Fm형 분할의 수를 나타내는 수열이 단계 m의 피보나치 수열임을 확인할 수 있다. 즉, 일반항을 $a_n=F(n, m)$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$로 하는 수열은

$$a_0=F(0, 3)=1,\quad a_1=F(1, 3)=1,$$

$$a_2=a_0+a_1=2,\quad a_3=a_0+a_1+a_2=2^2, \cdots,$$

$$a_{m-1}=a_0+a_1+\cdots+a_{m-2}=2^{m-2}$$

로 하고

$$a_n=a_{n-m}+a_{n-m+1}+\cdots+a_{n-1}\ (n\geq m)$$

을 만족하는 단계 m의 피보나치 수열이다.

V. 결 론

이 연구에서는 예비중등교사들로 하여금 수학화를 연습할 수 있게 하는 교수단원 <분할모델과 일반화된 피보나치 수열 사이의 관계 탐구>를 설계하였다. 이 교수단원에서는 이전에 이미 알려진 소재를 학습하는 활동에 초점을

맞춘 것이 아니라, 이전에 학습한 수학 지식을 바탕으로 새로운 수학 지식을 만들어 가는 활동 즉, 수학화에 초점을 맞추고 있다. 그러나 예비중등교사들로 하여금 새로운 정리를 만들어 내게 하는 일은 간단치 않다. 무엇보다도 그들이 발견하고 증명해야 할 정리의 수준이 그들의 지식 수준을 넘어서는 안 된다. 또, 예비중등교사들로 하여금 자신들이 실제로 정리를 만들어 냈다는 마음을 갖게 하기 위해서는, 발견·증명해야 할 정리가 이전에 이미 알려진 것이 아니어야 한다.

분할모델은 예비중등교사들의 수학화 연습을 위한 소재로 이미 몇 차례 소개된 바 있다(김진환, 박교식, 2006a. 2006b; 김진환, 박교식, 이광호, 2006). 또, 피보나치 수열은 학교수학에서 생소한 것이 아니다. 예비중등교사들에게 단계 m의 피보나치 수열은 생소할 수 있지만, 그렇다고 해서 피보나치 수열로부터 단계 m의 피보나치 수열로의 일반화 자체를 쉽게 이해할 수 없는 것은 아니다. 피보나치 수열에서 새로운 항은 앞의 두 항의 합이다. 이것을 일반화하여 앞의 m 개의 항의 합을 새로운 항으로 하는 수열을 생각할 수 있다. 그것이 단계 m의 피보나치 수열이다. 예비중등교사들이 n의 Fm형 분할의 수로 이루어진 수열과 단계 m의 피보나치 수열이 동치라는 것을 발견하고 증명해야 한다. 분할모델과 피보나치 수열 사이의 이러한 관계는 이전에 알려지지 않은 소재인 만큼, 그것은 예비중등교사들로 하여금 수학화를 가상적으로 연습하게 하는 것이 아니라, 실제처럼 연습할 수 있게 한다. 그들은 분할모델과 피보나치 수열 사이의 관계를 찾기 위한 탐구문제를 해결하면서 분할모델과 피보나치 수열 사이의 관계를 수학자들처럼 찾아야 한다. 즉, 그들은 필요한 정의를 만들어야 하고, 귀납과 유추를 통해 관계를 발견해야 하고, 그 관계가 참이라는 것을 입증해야 한다. 이 소재는 바로 이러한 활동을 경험하게 하는데 유용하다. 이러한 활동을 통해 예비중등교사들은 수학에서 정리가 만들어지는 메커니즘을 보다 잘 이해할 수 있다. 학생들의 수학화를 안내하기 위해서는 먼저 교사가 그러한 수학화를 할 수 있어야 한다는 점에서 교수단원 <분할모델과 일반화된 피보나치 수열 사이의 관계 탐구>를 통한 예비중등교사들의 수학화 경험은 장차 그들의 학생들의 수학화를 안내하는데 도움이 될 것이다. 아울러 이 연구의 주요 소재가 되는 피보나치 수열을 포함한 일반화된 피보나치 수열을 이해하고 그 모델을 구하는 데 도움을 줄 수 있을 것이다.

참고문헌

김진환·박교식(2006a). 예비중등교사의 수학화 능력을 신장하기 위한 교수단원의 설계: n-단체(simplex)의 n-부피 탐구. **학교수학, 8**(1). 27-43.

김진환·박교식(2006b). 예비중등교사의 수학화 경험을 위한 교수단원의 설계: 수 분할모델의 탐구. **한국학교수학회논문집, 9**(1). 57-76.

김진환·박교식·이광호(2006). 일정한 차를 갖는 수 분할모델의 탐구를 위한 예비중등교사용 수학화 교수단원의 설계. **학교수학, 8**(2). 161-176.

박교식(1992). **함수 개념 지도의 교수현상학적 접근.** 서울대학교 박사학위 논문.

우정호(2000). **수학 학습-지도 원리와 방법.** 서울: 서울대학교 출판부.

정영옥(1997). **Freudenthal의 수학화 학습-지도론.** 서울대학교 대학원 박사학위논문.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Kluwer Academic Publishers.

Freudenthal, H. (2008). 프로이덴탈의 수학교육론, 우정호, 정은실, 박교식, 유현주, 정영옥, 이경화(공역). 서울: 경문사. (영어 원작은 1991년 출판).

Garland, T. H. (1987). *Fascinating Fibonaccis: Mystery and Magic in Numbers*. Dale Seymour.

Wills, H. (1970). Generalzations. *The Teaching of Secondary School Mathematics*. NCTM Thirty-third Yearbook. Washington, D.C.: NCTM.

Wittmann, E. (1984). Teaching units as the integrating core of mathematics education, *Educational Studies in Mathematics 15*(1), 25-36.

Wittmann, E. (1995). Mathematics education as a 'design science'. *Educational Studies in Mathematics, 29*(4), 355-374.

Wittmann, E. (1999). Designing teaching: The pythagorean theorem. In T. J. Cooney, et. al., *Mathematics, pedagogy, and secondary teacher education*. 97-165. Portsmouth, NH: Heinemann.

Wittmann, E. (2001). Developing mathematics education in a systemic process. *Educational Studies in Mathematics, 48*(1), 1-20.

(인터넷 자료) http://mathworld.wolfram.com

A Design of Teaching Unit to Foster Secondary pre-service Teachers' Mathematising Ability: Exploring the relationship between partition models and generalized fobonacci sequences

Kim, Jin Hwan (Yeungnam Univ.)
Park, Kyo Sik (Gyeongin Nat'l Univ. of Edu.)

In this paper, we designed a teaching unit for the learning mathematization of secondary pre-service teachers through exploring the relationship between partition models and generalized fibonacci sequences. We first suggested some problems which guide pre-service teachers to make phainomenon for organizing nooumenon. Pre-service teachers should find patterns from partitions for various partition models by solving the problems and also form formulas from the patterns. A series of these processes organize nooumenon. Futhermore they should relate the formulas to generalized fibonacci sequences. Finding these relationships is a new mathematical material. Based on developing these mathematical materials, pre-service teachers can be experienced mathematising as real practices.

* **Key words** : mathematising(수학화), phainomenon(현상), nooumenon(본질), teaching unit (교수단원), partition model(분할모델), fibonacci sequence(피보나치 수열), generalized fibonacci sequence(일반화된 피보나치 수열)

논문접수: 2008. 7. 10
논문수정: 2008. 8. 12
심사완료: 2008. 8. 16