

# 수학과 교육과정에 비추어 본 탱그램과 유사탱그램의 재조명

송 상 현\*

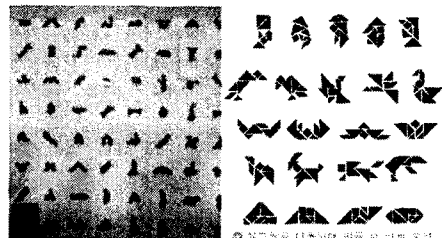
탱그램이라고 불리는 전통적인 칠교판(도형판)에 대한 기존의 연구들도 학교수학의 내용을 바탕으로 한 활동의 가능성에 초점을 두고 있다. 현행 수학과 교육과정에서 탱그램을 언급하고 있기는 하지만 교과서의 활용에서 탱그램의 유용한 특성을 제대로 반영하지 못할 뿐만 아니라 교육과정상의 다른 내용과 제대로 연결을 시키지 못하고 있다. 이에 본 연구는 초등학교 수학 교과서와 익힘책에 제시하고 있는 탱그램 사용이 교육과정과의 관련에서 갖는 문제점과 한계를 분석하면서, 학교 현장에서 바르게 활용할 수 있는 방안(제대로 그리기, 모양이 아닌 다각형 만들기, 수학적사고와 관련하여 현 교육과정의 수준에 적합한 활동 분석, 교육과정의 한계를 넘나들며 활용할 수 있는 수준별 도형 탐구의 예시 등)과 유사탱그램까지 좀 더 확장하여 보다 적극적으로 활용할 수 있는 대안을 제안하였다.

## 1. 들어가는 말

고대 중국의 퍼즐로 알려진 탱그램은 정사각형을 7 조각으로 나눈 실루엣(silhouette) 퍼즐 또는 분할(dissection) 퍼즐의 한 종류로서 흔히 '칠교판(七巧板)'이라고도 부른다. 청나라 시대인 1803년에는 이 놀이에 관한 책이 출간되어 유럽으로 전래되었고 1800년대 초에 독일과 영국에서도 출판되었다는 기록은 있으나 그것의 정확한 역사는 알려진 바 없다(김남희, 2000, 박교식, 2004).

본래 이 칠교판은 다양한 동물이나 재미있는 형상을 만드는 놀이 활동에서 출발하였으나 일상생활 속에서는 건축의 벽면 디자인에 활용되기도 한다. 한정된 개수의 조각으로 너무나 다양한 여러 가지의 모양들을 만들 수 있다는 것

이 탱그램의 매력이다. 그리고 각 조각들을 연결한 길이들의 미묘한 차를 이용하면 [그림 1-3]과 같은 여러 가지의 패러독스가 등장하기도 한다.



[그림 1-1] 각종 칠교도 [그림 1-2] 칠교도의 해법

탱그램은 일본과 중국의 각종 교과서에도 자주 등장하는 편이다. 우리나라에서는 제 5차 교육과정 이래로 수학 교과서의 도형 영역에서 모양 만들기와 다각형의 넓이 탐구를 위한 소재로 가끔씩 등장하다가 제 7차 교육과정에서는

\* 경인교육대학교, shsong@ginue.ac.kr

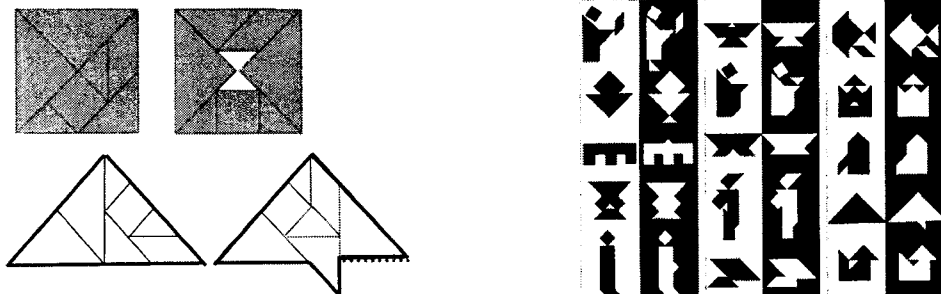
1) 이 연구는 2007년도 경인교육대학교 교내 학술 연구비의 지원을 받아 수행된 것임.

공간감각이라는 소영역에서의 활용 가능성이 더욱 인식되면서 탱그램을 주제로 한 몇 차례의 논의가 있어왔다. 그 동안 우리나라에서 이루어진 연구들로는 다음과 같다.

이인환 외 2인(1999)이 초등학교 수준의 기하학적 개념은 연역적인 추론이나 논리적인 전개, 형식화된 제시보다는 직관에 의존하거나 비형식적인 방법에 의해 제시된다고 전제하면서 직관에 의한 관찰을 통해 도형의 기본개념과 성질을 파악하도록 함을 목적으로 7가지 내용(모양 구성, 다각형 만들기, 선대칭도형과 대칭축, 도형의 닮음, 도형의 넓이, 다각형의 둘레와 길이, 다각형의 각 재기)의 예시 활동을 제안하였다. 이경화(1999)도 탱그램 안에 들어 있는 수학적 성질을 확인하고 이를 활용한 수학적 문제상황을 구성하거나 피타고라스정리의 증명을 시도하는 수업의 예를 제시하고 있다. 김남희(2002)는 탱그램으로 주어진 모양을 맞추는 놀이 차원에서 다루는 내용을 넘어 수학의 문제해결과정이나 수학적 사고 교육에 적절하고도 효과적으로 활용하는 방안을 모색하기 위해 중등학교의 범위까지 확대하여 수학의 내용 영역별로 예시문제와 더불어 탱그램의 활용 방법을 소개하면서 탱그램 7조각들이 도형의 넓이와 변의 길이 사이에 일정한 비로 이루어져 있다는 사실을 교사가 염두에 두면서 이용함으로써 수학적 개념과 내용을 보다 구체화

할 수 있고 수학교육적으로도 가치가 있음을 강조했다. 또한 박교식(2002)은 전통적인 정사각형 탱그램(칠교판)을 넘어 조각의 개수를 확장하여 오교판에서부터 십사교판까지 6종 31가지의 유사탱그램을 소개하면서 이들을 탱그램과 병행하여 활용할 때 수학적 사고를 심화시키거나 개별화하는 데 유용함을 제안하고 있다. 이후 박교식(2004)은 정사각형이 아닌 직사각형과 곡선형의 유사탱그램까지 다루면서 그들의 기원과 출처를 소개하면서 각 탱그램들이 가지는 특징을 분석하고 이를 활용한 탐구 문제를 함께 수록하고 있다.

특히, 안주형, 송상현(2002)는 Welchman(1999)의 연구를 바탕으로 직사각형 유사탱그램 중에 하나인 모자이크퍼즐을 가지고 실제 수업에의 적용 가능성을 탐구하였는데, 이 연구에 따르면 탱그램과 모자이크퍼즐을 함께 사용하면 3-4 단계부터 5-6 단계까지의 도형학습(각종 도형의 모양, 각도, 길이, 넓이 등)에서 계통성을 살릴 수 있고 내용면에서도 유용하게 활용할 수 있는 가능성을 확인하였다고 한다. 특히, 교구뿐만 아니라 그것의 활동판(학습지)을 병행하여 사용할 때 활동의 결과를 제대로 표현하고 직관적인 이해를 통한 수학적 개념 형성에 도움이 될 것이라고 하였다. 그러나 대부분의 연구들이 수학적 내용을 바탕으로 한 활동의 가능성에 초점을 맞추기는 하지만 교육과정이나 교



[그림 1-3] 탱그램의 패러독스들(<http://www.archimedes-lab.org/page6b.html>)

과서와 관련지어 상세히 분석하지는 않고 있다.

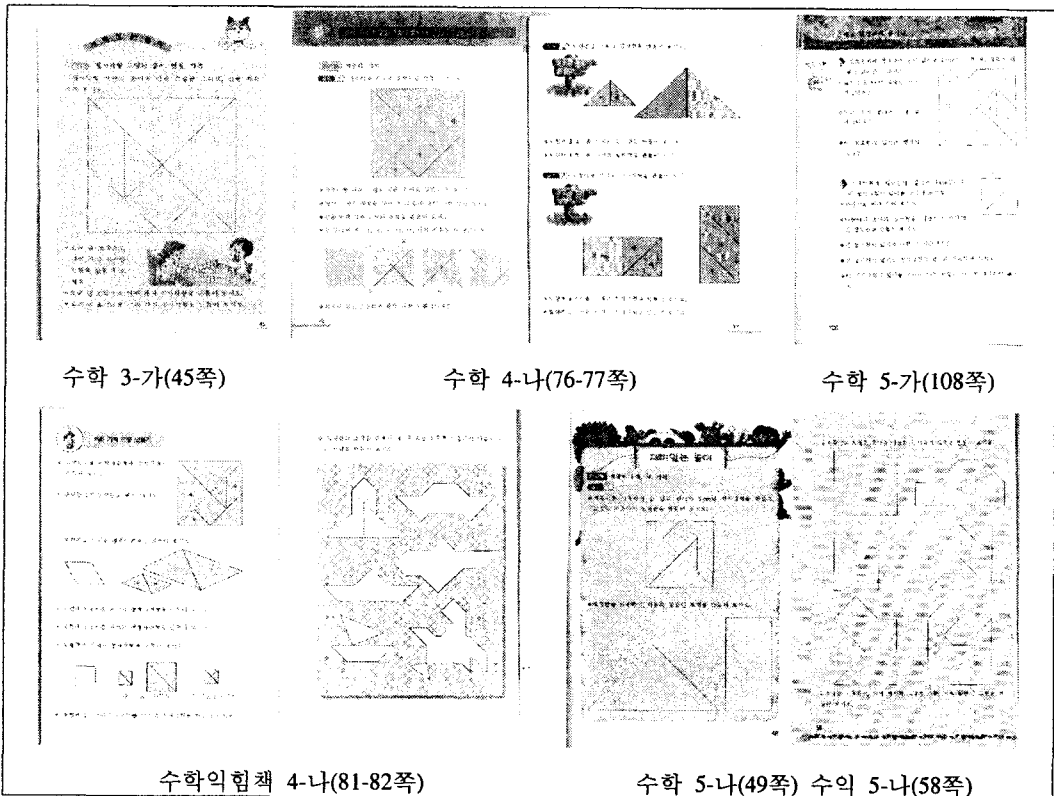
이 외에도 조보영(2003), 신현진(2004), 서은영(2007)과 같이 탱그램을 초등학교 교육과정에 맞추어 활용하고자 했던 다양한 시도들이 있어 왔다. 특히, 남승인(2003)은 도형·측정 영역뿐만 아니라 제7차 교육과정의 모든 영역에서 탱그램의 유용한 특성을 반영하여 그 활용에 대해 논의한 바 있다.

따라서 이 글에서는 초등학교 수학 교과서와 익힘책에 제시하고 있는 탱그램 사용이 교육과정과의 관련에서 갖는 문제점과 한계를 분석하고 좀 더 적극적인 활용을 위한 대안을 제시하고자 한다.

## II. 교과서에 나타나는 탱그램 활용에 대한 비판적 분석

### 1. 교과서에 나타나는 탱그램 활용의 예

탱그램(칠교판)은 제7차 교육과정의 초등학교 수학 교과서(3-가, p.45; 4-나, pp.76-77; 4-나(수익), pp.81-82; 5-가, p.108; 5-나, p.49; 5-나(수익), p.58)에는 ‘도형판’이라는 이름으로 ‘재미있는 놀이’(3-가)와 ‘여러 가지 모양 만들기’(4-나), ‘문제해결’(5-가)을 위해 등장한다.<sup>2)</sup>



[그림 II-1] 초등학교 교과서에 나오는 탱그램 활용의 예들

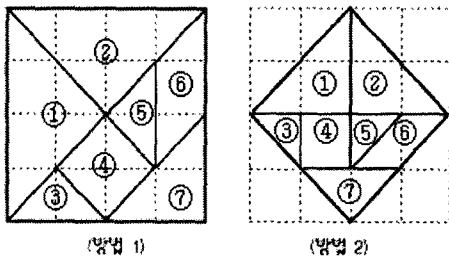
2) 중학교 수학 교과서 7-나의 도형 단원에서 단원의 도입이나 준비학습으로 가끔씩 활용되고 있는데, 해당 출판사는 박교식(2007a)에서 확인할 수 있다.

## 2. 교과서 활동의 비판적 분석과 대안

### 가. 탱그램을 제대로 만들고 그리기

7차 교육과정에 따른 수학 교과서에서 탱그램이 처음 도입되는 3-가 단계에서는 주어진 모양의 탱그램을 (색)종이에 직접 그리고 그것을 가위로 오려낸 조각들을 사용하여 직각삼각형과 직사각형, 정사각형을 만들도록 하고 있다. 그러나 초등학교 3학년 학생은 그림을 본 뜨거나 오려내는 일을 정교하게 수행하지 못하여 비뚤게 오려낸 직각의 크기와 직각도형의 개념 이해에 혼란을 초래할 수 있다. 따라서 저학년에서는 이미 만들어 놓은 교구를 활용하는 것이 더 유용하다. 하지만 저가의 조잡한 교구는 오히려 학생들의 흥미와 탐구 의지를 꺾을 수도 있으므로 교구의 선정에도 유의해야 한다. 교구는 탐구를 위한 도구이지만 아동의 오감을 자극하여 학습의 의욕과 개념의 이해에도 도움이 되어야 하기 때문이다.

현재 교과서의 여러 곳에 나오는 탱그램의 전체 모양과 각 조각들의 배열 위치는 서로 다른 3 가지 유형(3-가; 4-나와 7-나; 5-가와 5-나는 서로 동일한 모양임)을 보여주고 있지만 이들은 모두 [그림 II-2]의 (방법 1)처럼 정사각형의 한 변이 바닥에 오도록 그리고 있다.



[그림 II-2] 전통적인 탱그램(칠교판)을 그리는 방법

그런데 평행사변형을 학습하는 4-나 단계에

서는 [그림 II-2]의 (방법 2)처럼 모눈종이 위에 기울어진 모양으로 도입할 수도 있다. 이때 모눈종이의 경계선을 따라 큰 정사각형의 중심을 통과하는 가로 방향의 주대각선을 하나 먼저 그려놓고 그 아래 부분에 있는 직각이등변삼각형의 두 변의 중점을 연결하는 선분을 그리면 이 두 선분은 서로 평행이고 길이는 절반이라는 사실, 그리고 세로 방향의 주 대각선이 이 두 선분을 수직으로 이등분한다는 것을 직관적으로 이해하기가 쉽다.

(방법 1)의 탱그램 모양에서는 전체 정사각형의 가로와 세로의 길이는 자연수이지만 잘려진 각 조각들에서 대부분의 변의 길이는 무리수가 되므로 초등학교 정규교육과정에서 길이를 탐구하기에는 곤란하다. 그래서인지 길이와 넓이의 관계를 다루는 수학 5-가 단계의 교과서에서는 탱그램 대신 패턴블록을 사용하여 무늬꾸미기를 하는 수준에 머물고 있다. 그러나 탱그램을 [그림 II-2]의 (방법 2)로 마름모꼴로 도입하면 넓이와 길이의 단위를 모눈종이의 칸의 크기나 대각선의 길이와 일치시켜 도입함으로써 조각들의 변의 길이와 넓이의 관계를 탐구하기에 편리하다. 따라서 탱그램을 그릴 때는 상황에 따라 두 가지 방법을 모두 도입하면서 기준이 되는 한 변의 길이(모눈종이에서 한 칸의 길이)나 가장 작은 정사각형의 넓이(모눈종이 한 칸의 크기)를 바탕으로 5-가 단계에서 직각삼각형, 정사각형, 평행사변형의 길이와 넓이의 관계까지 탐구해볼 수 있다.

### 나. 모양(일상적인 형상)이 아닌 도형(다각형) 만들기

각과 직각을 학습하는 3-가 단계에서는 단원의 마무리 단계에서 모양 만들기를 통해 나타나는 각과 직각을 찾아보고 놀이 속에서 각을 탐구하도록 할 수 있다. 그러나 교육과정이나

교사용지도서의 어느 부분에도 탱그램을 활용하는 의도와 목적을 기술하고 있지는 않다. 또한 다각형을 만들어야 하는 4나 단계의 익힘책에서는 3조각을 사용하여 평행사변형을 만들거나 3~5조각으로 정사각형을 만들도록 한 다음 교육과정에서 공식적으로 취급하지 않는 오목다각형까지 만들도록 요구하고 있다. 도형의 합동을 다루는 5나 단계에서도 오목다각형이나 점으로만 연결된 모양을 만들도록 익힘책에 제공하고 있다.

탱그램으로 여러 가지 형상을 만드는 활동은 유아들의 창의적인 놀이 활동으로 많이 활용되곤 한다. 그러나 이들은 다각형이나 도형의 합동을 통한 수학적 성질을 찾도록 하는 교육과정의 내용적 본질에서 벗어날 뿐만 아니라 다각형과 합동의 의미를 오히려 오해하게 하는 불필요한 활동이므로 삭제되어야 한다. 흥미위주로 도입된 활동들이 수학의 내용면에서 본질을 훼손하는 결과(메타인지적 이동)를 초래할 수 있기 때문이다.

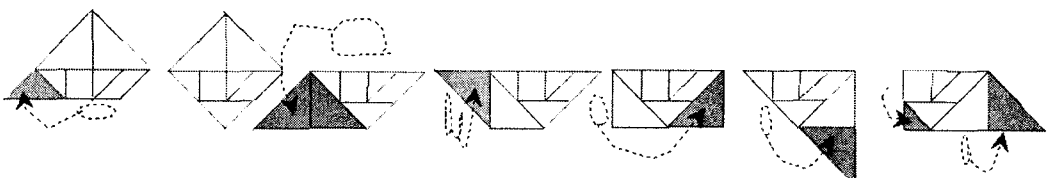
#### 다. 교육과정의 수준에 적합한 다각형 만들기

4나 교과서의 5단원 '사각형과 도형 만들기'의 여러 가지 모양 만들기 활동(76쪽)에서는 색 종이를 접어 탱그램을 직접 만드는 방법을 소개하고 있다. 이 때 그 직전의 4단원 '수직과 평행'의 내용과 충분히 관련지어 설명할 수 있음에도 종이를 접고 잘라서 만들어지는 도형에만 주목함으로써 수학적 관계와 성질의 탐구활동은 간과되는 듯하다. 4나 단계에서는 수직과

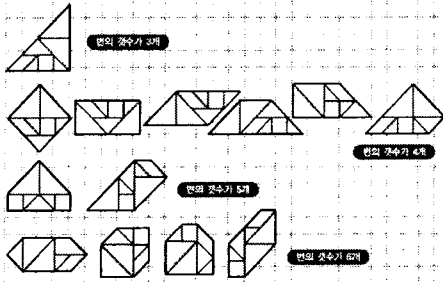
평행에 대한 이해를 바탕으로 사다리꼴과 평행사변형, 마름모 그리고 여러 가지의 다각형을 학습하는 것이 교육과정상의 주된 목표임에도 교과서에 구현되고 있는 내용은 단지 조각의 개수만 늘리면서 여러 가지 모양 만들기 활동을 하면서 3나 단계에서 이미 학습했던 삼각형과 직사각형을 또 다시 만들도록 요구하고 있다. 물론 이전 단계의 학습내용을 복습할 수는 있지만 본 단계의 중요내용을 취급하지도 않는다면 교육과정에서 다루는 내용의 수준과 기본적인 연계를 고려하지 못한 조치이다.

4나 단계에서는 도형을 만드는 활동에 그치지 않고 만든 도형들의 내부에 놓이는 조각들의 배열은 달라도 외곽선의 모양에 주목하면서 변의 개수로 다각형의 종류를 분류하도록 할 수도 있을 것이다. 다각형의 모양은 같더라도 그 안에 놓이는 조각의 위치와 배열은 다를 수 있다. 어떤 배열은 [그림 II-3]과 같이 이미 만들어 놓은 다각형에서 일부 조각들의 위치를 변화시키면서 모양이 다른 도형들을 쉽게 만들 수 있다. 이는 5나 단계와 연결하면 넓이의 등적변형을 경험시킬 수도 있다.

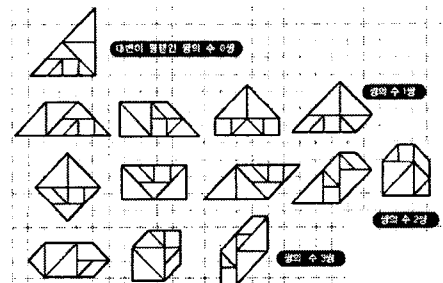
현재 교과서에서 가장 많이 활용하고 있듯이, 수준에 따라서는 7조각을 모두 사용하지 않고 일부 조각만으로도 동일한 도형을 만들어 볼 수도 있다. 그러나 7조각을 모두 사용하여 만들 수 있는 도형은 [그림 II-4]과 같이 삼각형과 다양한 종류의 사각형, 오각형, 육각형까지 모두 13가지의 볼록다각형뿐이다.



[그림 II-3] 조각의 위치 변화로 만들 수 있는 다양한 볼록다각형들



[그림 2-4] 변의 개수에 따른 다각형의 분류



[그림 2-5] 평행인 쌍의 수에 따른 다각형의 분류

제한된 수업시간 안에 학생 개개인이 이러한 도형들을 모두 만들 시간은 충분하지 않기 때문에 수준별로는 일부 조각만 사용하는 것도 허용하거나 모듈별로 학생들이 협력하여 7조각을 모두 사용한 다각형들을 만들고 분류하는 활동을 게임형식으로 진행할 수도 있다. 5-나 단계에서는 2-3학년에서 학습하는 옮기기, 돌리기, 뒤집기와 같은 공간 감각 기르기 활동에 머물지 않고 합동과 닮음, 선대칭 또는 점대칭으로 분류하고 대칭의 성질을 탐구할 요소도 충분하다.

#### 라. 수학적 사고를 위한 수업으로

현재 교과서에는 탱그램 조각의 개수를 지정하여 주고 그것으로 특정한 모양을 만들어 보는 활동에 그치고 있다. 그러나 학생들의 자율적인 학습태도와 수학적 사고를 자극하기 위해서는 지정된 모양을 만들 수 있는 여러 가지 방법을 학생들이 스스로 찾아서 그것들을 서로 비교해 보면서 토론하고 검증해 볼 수도 있을

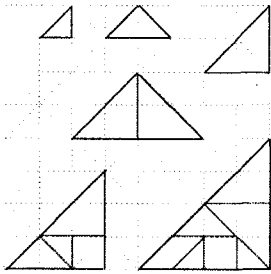
것이다. 보다 수준이 높은 학생들에게는 그런 모양을 만들 수 있는 모든 종류를 탐색해 보고 왜 그것이 전부인지를 설명하도록 할 수 있다. 이렇게 되면 일정한 기준에 따라 분류해보는 수학적 사고를 자극할 수 있다.

예를 들어, 탱그램 조각으로 만들 수 있는 다각형을 구하도록 할 때 학생들이 몇 가지 조각들을 붙여서 나름대로의 몇 가지 다각형들을 만들어 보는 경험이 수업의 목표의 전부가 되어서는 안 된다. 학생들에게 자신들이 만든 다각형들에는 어떤 종류의 다각형들이 얼마나 가능한지를 탐구해 보고 싶은 욕구가 저절로 생기지는 않는다. 이는 교육과정이나 교사가 의도를 가지고 자극해 주어야 하는 부분이다. 여기서 고려해 볼 수 있는 수학적 사고의 한 가지는 ‘기준에 따라 분류해보는 생각’이다. 그 기준은 학생 자신이 정한 기준이 될 수도 있고 교육과정과 관련하여 교과서나 교사가 정해주는 기준이 될 수도 있다.

학생들이 만든 다각형을 발표하는 동안 교사는 서로 같은 개수 또는 다른 크기들끼리 분류해 둘 필요가 있다. 각과 모양을 탐구하는 저학년에서는 같은 개수로 만든 다각형들에 주목할 수 있겠지만, 다각형의 변의 개수나 평행개념을 알고 있는 중학년에서는 변의 개수([그림 2-4])나 평행선의 개수([그림 2-5])로, 넓이의 개념을 알고 있는 고학년에서는 크기가 다른 다각형([그림 2-6])으로 분류하는 것이 해당학년의 교육과정은 물론 보다 의미있는 후속학습과 연계를 맺기가 더 쉽다. 교사는 이런 교육과정에 대한 전체적인 안목이 있어야 한다.

탱그램으로 만들 수 있는 삼각형에 대해서 좀 더 구체적으로 살펴보자. 탱그램의 7조각에 나타나는 각도는 모두 45도의 배수들뿐이므로 이 조각들의 일부 또는 전부를 사용하더라도 예각삼각형이나 둔각삼각형을 만들 수가 없고 크기가 다른 6가지의 직각이등변삼각형뿐이다

([그림 II-6]). 이는 작은 정사각형의 조각의 한 변의 길이를 1이라고 할 때 다른 조각들의 변의 길이는 1,  $\sqrt{2}$ , 2,  $2\sqrt{2}$  뿐이므로 한 변의 길이가 1,  $\sqrt{2}$ , 2,  $2\sqrt{2}$ , 3, 4 (또는 넓이가 0.5, 1, 2, 4, 4.5, 8)인 6가지의 직각이등변삼각형뿐임을 쉽게 확인할 수 있다. 그러려면 우선 <표 II-1>과 같은 탱그램 각 조각들의 특징에 대해 탐구가 선행되어야 하는 것은 당연하다.



[그림 II-6] 탱그램 조각으로 만들 수 있는 크기가 다른 모든 삼각형들

<표 II-1> 탱그램 조각들의 특징

번호	조각 이름	조각에 나타나는 모든 각도 (단위 °)	변의 길이		크기	
			(방법1)	(방법2)	(방법1)	(방법2)
①, ②	(큰) 직각이등변삼각형	45, 45, 90	$2\sqrt{2}, 4$	$2, 2\sqrt{2}$	4	2
③, ⑤	(작은) 직각이등변삼각형	45, 45, 90	$\sqrt{2}, 2$	$1, \sqrt{2}$	1칸	0.5칸
④	정사각형	90, 90, 90, 90	$\sqrt{2}$	1	2	1
⑥	평행사변형	45, 135, 45, 135	$\sqrt{2}, 2$	$1, \sqrt{2}$	2	1
⑦	(중간) 직각이등변삼각형	45, 45, 90	$2, 2\sqrt{2}$	$\sqrt{2}, 2$	2	1
전체		45, 90, 135	$\sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4$	$1, \sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}$	16	8

중학교 수준에서는 수학적 증명을 위해서는 변의 길이에 사용되는 무리수를 언급해야 하겠지만, 초등학교 수준에서는 모눈종이를 사용하여 한 변의 길이가 1인 정사각형의 대각선의

길이나 그 대각선으로 둘로 나눈 직각이등변삼각형의 빗변의 길이로 간단히 약속하면 이러한 탐구는 충분히 가능하다. 그렇게 되면, 넓이의 탐구에서도 한 변의 길이가 그 대각선의 길이에 해당하는 정사각형의 넓이가 2라는 것도 직관적으로 탐구할 수 있다.

많은 답을 얻거나 많은 활동을 하는 것보다는 한 가지의 활동으로 시작하여 다양한 수준의 사고로 확장해보는 것이 필요하다. 탱그램으로 만들 수 있는 도형들을 학생들이 그들의 수준에 따라 다양하게 만들면서 그것들을 일정한 유형으로 분류하고 토론하면서 그 이유까지 설명해보도록 하고 나중에는 종합과 정리에 까지 이르는 방법은 단순히 교구로서의 탱그램을 배우는 것이 아니라 탱그램을 활용한 수학적 사고와 태도의 향상이라는 수학교육의 목표 중 하나를 달성하기 위한 교육과정의 의도가 될 수 있다.

#### 마. 교육과정의 수준을 넘어


정규교육과정에서 사각형의 여러 가지 이름을 붙이는 과정에서 각, 변의 길이, 평행 등의 성질을 고려하여 직사각형으로부터 정사각형, 사다리꼴, 평행사변형, 마름모라는 이름이 도입되고 있지만 이들은 외관상의 모양에 따른 이름(사다리꼴, 마름모)과 도형의 성질에 따른 이름(정사각형, 평행사변형)이 혼용되고 있다. 정규교육과정에서는 취급하지 않지만 각의 개수에 따라 다각형이라고 불리듯이 심화수준에서의 토론을 활용한 수업에서는 탱그램으로 만든 여러 가지 다각형들을 변의 개수에 따라 다변형으로 분류할 수도 있을 것이다. 사각형 중 평행인 변의 쌍이 1쌍인 것은 사다리꼴, 2쌍인 것은 평행사변형이라고 하였듯이, 학생들은 육각형 중에서도 1쌍 평행육변형, 2쌍 평행육변형, 3쌍 평행육변형과 같은 이름을 붙여보는 활동을 하면서 평행인 쌍의 개수에 따라 여러 가지 다각형을 분류해 볼 수

도 있을 것이다. 그리고 교육과정에서는 다루지 않는 오목다각형까지 허용하려면 개념적으로는 ‘블록다각형’을 간단히 약속<sup>3)</sup>하는 것도 필요하다. 탱그램을 활용하여 폭넓은 도형탐구를 위해 오목다각형을 만들고자 할 때는 반드시 변의 길이가 일치하는 오목다각형만 허용해야 한다. 정규교육과정의 범위에서 탱그램으로 만들 수 있는 다각형이 13가지뿐임을 확인하였다면 정규교육과정의 수준을 넘는 심화학습이나 보다 높은 단계에서는 그것을 증명할 수도 있다.<sup>4)</sup>

<표 II-2> 교과서에서 사용하는 탱그램 활용의 현황 분석

출처	단원명	기본 개념	탱그램 활용의 현황 분석
3가 수학(45쪽), 재미있는 놀이	3. 평면도형	각, 직각, 직각삼각형, 직사각형, 정사각형	오려낸 조각으로 여러 가지 직각삼각형, 직사각형, 정사각형 만들로 사용하고 있음. 색종이를 오리는 것이 정확하지 않고 한 번 오려서 붙여버리면 재활용이 불가능
4나 수학(76-77쪽), 수익(81-82쪽) 여러 가지 모양 만들기	5. 사각형과 도형만들기	사다리꼴, 평행사변형, 마름모, 직사각형과 정사각형의 관계, 다각형과 대각선	여러 가지 모양을 만들도록 하고 있으나 4-5조각을 사용하여 삼각형과 직사각형만 제시함. <의심>책에서는 오목다각형과 모양 만들기에 치중하고 있는데 이는 교육과정과 무관함. <의심> 7조각을 모두 사용하면 다양한 사각형과 오각형, 육각형까지 13가지의 서로 다른 모양의 다각형을 만들 수 있고 일부만 사용하면 칠각형도 만들 수 있음.
5가 수학(108쪽) 문제를 해결하여 봅시다.	6. 평면도형의 둘레와 넓이	직사각형과 정사각형의 둘레, 도형의 넓이, $1cm^2$ , $1m^2$	작은 정사각형의 넓이를 1이라 할 때 다른 조각들의 넓이 구하기 <의심> 임의단위를 기준으로 한 넓이의 비교로는 가능하지만 표준단위로는 부적절함. <의심> 모눈종이 위에 [그림 1]의 (방법2)로 칠각판을 그리는 것이 변의 길이와 넓이 탐구에 보다 유용함.
5나 수학(49쪽), 수익(58쪽) 재미있는 놀이	3. 도형의 합동	도형의 합동, 대응점, 대응변, 대응각, 합동인 삼각형 그리기	한 변의 길이가 5cm인 정사각형으로 도형판을 직접 만들어 주어진 도형과 합동인 도형 만들기, 오목다각형이나 점으로만 붙어있는 형상 만들기 <의심> 직접 활동하기에는 크기가 너무 작음. 직접 만들기보다 기성의 목제품을 활용하면 편리함. 오목다각형을 도입할 필요가 없음.

- 3) ‘오목다각형’은 모양만을 가지고 꼭지점이 도형의 내부로 움푹하게 들어간 모양의 다각형이라는 비형식적인 정의도 가능하다. 하지만 블록다각형이 아닌 도형을 오목다각형이라고 하면서, 블록다각형을 각, 선분의 연장, 도형의 포함이라는 개념을 활용한 3가지의 형식적 정의 방법이 있다. 즉, ① 모든 내각이 180도보다 작은 다각형 ② 모든 변의 연장선이 도형의 내부와 만나지 않는 다각형, ③ 도형의 내부에서 임의의 두 점을 잇는 선분이 항상 그 도형의 내부에 포함되는 다각형.
- 4) 이것은 1942년 중국의 수학자 Fu Tsiang Wang과 Chuan-Chih Hsiung에 의해 증명되었다.(Gardner, M., 1996). 박교식(2004), 박교식(2007)도 이에 대한 보다 간편한 증명을 소개하고 있다. 이들을 종합해 보면 다음과 같다. 탱그램 조각들을 모두 사용하여 만들 수 있는 다각형의 내각 중에서 45°의 개수를 p개, 90°의 개수를 q개, 135°의 개수를 r개라고 하면  $p+q+r=n$ 이다. 또 n각형의 내각의 크기의 합은  $180(n-2)^\circ$ 이므로,  $45p+90q+135r=180(n-2)$ 에서  $p+2q+3r=4(n-2)$ 을 얻는다. 이로부터  $2p+q=8-n$ (단, p와 q는 0이상의 정수이고, n은 3이상 8이하의 자연수)이 조건을 만족하는 p, q, n과 n을 구하면 다음 표와 같다.

n각형 각도별 개수	3			4			5			6			7			8			참고
	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	
p(45°)	2	0	1	2	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	6조각으로 만든 칠각형 
q(90°)	1	4	2	0	3	1	2	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0		
r(135°)	0	0	1	2	2	3	4	5	6	8	0	0	0	0	0	0	0		
종류	직각이 동변각 각별	직사각 형1개 정사각 형1개	사다리 꼴	평행사변 형1, 등변사 다리꼴1개	대칭형	비대칭형	선대칭1, 점대칭1, 선+점대칭2	불가	불가	불가	불가	불가	불가	불가	불가	불가	불가	불가	계
개수	1	2	2	2	1	1	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	13

그러나 이 중 7조각들의 변의 길이와 넓이를 고려하면 여러 개를 만들 수 있는 경우도 있지만 블록다각형으로는 만들 수 없는 경우도 있다. 예를 들어 위의 표에서 모든 각이 90°인 정사각형과 직사각형은 같은 종류이지만 서로 다른 모양이 된다.

(심화) 일곱 조각으로의 칠각형은 왜 불가능할까?



지금까지 초등학교 교과서에서 탱그램을 활용하고 있는 현황을 분석하면서 드러난 주요 문제점과 그에 대한 대안들을 요약하면 <표 II-2>와 같다.

### III. 교육과정에서 탱그램의 추가 활용 가능성

교과서에 제시된 활동이외에 탱그램을 추가로 활용할 수 있는 단계와 그 단계에 적절한 내용들을 제안하면 <표 III-1>과 같다.

3-나의 도형에서 거울에 비친 모양을 탐구할 때 탱그램의 조각 중 뒤집어 놓으면 원래와 모양이 달라지는 조각을 찾아보도록 할 수 있다. 이는 거울에 비친 모양에 대한 탐구가 3-가 단계의 모양 움직이기(뒤집기)와 5-나 단계의 도형의 대칭을 자연스럽게 연결시켜주는 매개 활동으로 적절하다. 뒤집기 활동을 통해 원래의 모양과 일치하는 것은 선대칭도형이며 거울이 놓인 위치가 바로 대칭축이 된다.

4-나 단계의 4단원인 수직과 평행을 다루는 단원에서는 탱그램을 사용하고 있지는 않지만 탱그램을 직접 그려보는 활동을 통해 평행과 수직의 응용문제를 탐구할 수 있다. 이는 곧이어 나오는 5단원인 '사각형과 도형 만들기' 활동에서 도형을 만들기 전에 이루어지고 있는 '색종이를 접어 탱그램을 만들기' 활동 대신에 '탱그램을 직접 그려보기' 활동으로 대체하여 통합적으로 지도할 수도 있다.

5-나 단계는 도형의 합동과 대칭을 다루고 있다. 그런데 탱그램을 도형의 합동에서만 활용하고 있다. 대신 4-나 단계의 활동을 회상하면서 13개의 블록다각형들을 선대칭도형, 점대칭도형, 그리고 선대칭이면서 점대칭인 도형들을 분류해 볼 수도 있을 것이다.

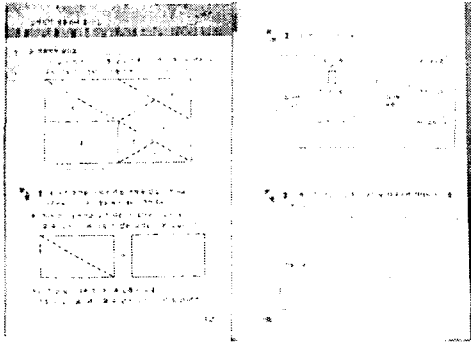
### IV. 교과서에 나타난 유사탱그램 활용의 예시 분석과 제안

5-나 수학교과서의 8단원 「문제푸는 방법

<표 III-1> 탱그램의 추가 활용을 위한 제안

단계	단원명	기본 개념	탱그램의 추가 활용을 위한 제안
3-나	3. 도형	원, 거울에 비친 모양, 규칙 찾아 무늬 꾸미기	☞ 거울에 비친 상이 원상과 같은 조각과 다른 조각의 구분에 활용 가능
4-가	3. 각도 4. 삼각형	각의 크기, 삼각형과 사각형의 내각의 합/이등변삼각형, 정삼각형, 예각, 둔각, 예각삼각형, 둔각삼각형	☞ 탱그램으로는 정삼각형, 예각삼각형, 둔각삼각형을 만들 수 없고 직각이등변삼각형만 가능/모자이크퍼즐을 병행하면 좋음.
4-나	4. 수직과 평행	수직, 수선, 평행선	☞ 모눈종이에 [그림 1]의 (방법 2)로 탱그램을 직접 그려보면서 수직과 평행의 관계를 탐구할 수 있음
5-나	5. 도형의 대칭	선대칭도형, 점대칭도형, 선대칭의 위치에 있는 도형, 점대칭의 위치에 있는 도형	☞ 4-나에서 만든 다각형들을 선대칭도형과 점대칭도형, 선대칭과 점대칭이 모두 되는 도형으로 분류할 수 있음. 7조각을 적절히 분배하여 합동인 두 도형을 만들 수 있으므로 대칭의 위치에 있는 두 도형을 만들 수도 있음.

찾기」에서는 [그림 IV-1]와 같이 유사탱그램을 하나 소개하고 있다.

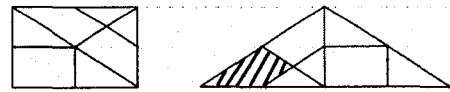


[그림 IV-1] 교과서에 소개된 유사탱그램 (5-나, 137-138쪽)

Welchman(1999)는 이 도형을 반힐(van Hiele)이 '7조각 모자이크 퍼즐'이라는 이름으로 소개하면서 도형의 여러 가지 성질을 탐구하는데 매우 유용하다고 밝히고 있다. 이는 본래 독일의 리히터 회사가 운영하는 웹사이트에서 [그림 IV-2]와 같이 당시 유행하고 있는 유사탱그램들을 모아놓은 것 중에 '스핑크스(sphinx)'라는 이름이 붙은 것이며, 박교식(2004)은 이를 직사각형 칠교판과 정삼각형 칠교판으로 소개하고 있다.

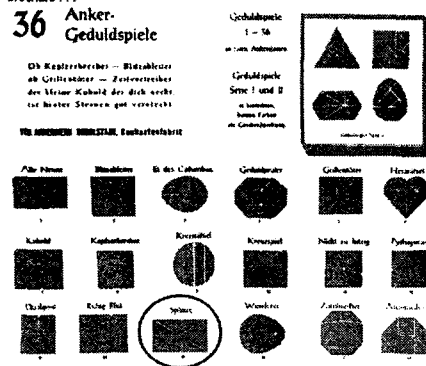
교육과정에 따르면 5-나 단계는 도형의 합동과 대칭을 학습하는 곳임도 교과서의 활동은 2-3조각을 이용하여 집 모양을 만들거나 삼각형 만들기, 그리고 자신이 정한 도형 만들기에 국한하고 있다. 즉, 스팅크스퍼즐이라는 유사탱그램을 도입하려면 교육과정에 적합한 수학 활동을 구성할 수 있어야 하고 또한 탱그램과 병행하면서 탐구한다면 보다 의미가 있을 것이다.

우선 스팅크스퍼즐을 그릴 때는 교과서([그림 IV-1])나 리히터회사의 웹사이트에 제시한 그림([그림 IV-2])보다 [그림 IV-3]의 방식이 더 간편하다. 탱그램은 정사각형이 기본형인 반면, 스팅크스퍼즐은 정삼각형이 기본형이다. [그림 IV-3]에서 보듯이 정삼각형 하나의 크기를 1이라 하면 각 조각들의 넓이는 1, 2, 3, 4이고 전체 직사각형의 넓이는 16이다. 작은 조각들을 서로 붙이면 큰 조각들을 만들 수도 있다.

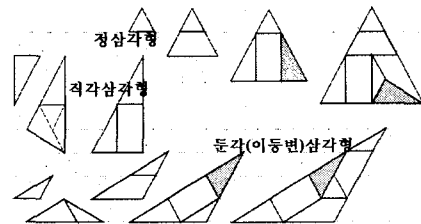


[그림 IV-3] 7조각의 유사탱그램 (스핑크스퍼즐)

**The Richter Puzzles . . .**  
Amazing dissection puzzles with a rich history. Below are scans from an early brochure . . .



[그림 IV-2] 리히터회사의 퍼즐들 중에 나타난 스팅크스퍼즐



[그림 IV-4] 스팅크스퍼즐로 만들 수 있는 모든 종류의 삼각형들

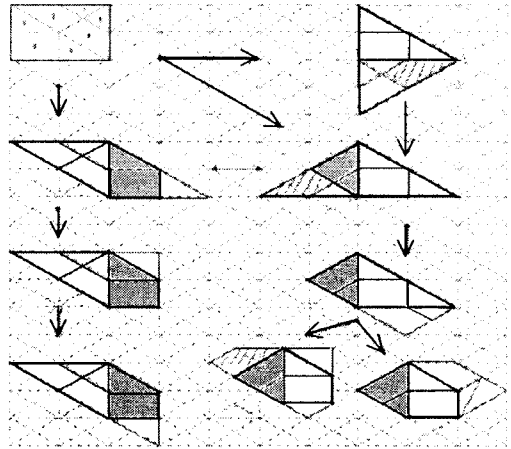
앞에서도 보았듯이, 탱그램 조각에 나타나는 각도는 45도의 배수들뿐이므로 탱그램으로 만들 수 있는 삼각형은 직각삼각형뿐이어서 예각과 둔각을 가진 삼각형을 학습하는 수학 4-가

단계에서는 탱그램을 사용할 수가 없다. 그러나 '스핑크스'라는 유사탱그램은 <표 IV-1>에서 보듯이 각 조각들의 각도가 30도의 배수들이므로 [그림 IV-4]와 같이 정삼각형뿐만 아니라 둔각삼각형까지 만들 수 있어서 4-가 단계의 활동에도 활용할 수 있다.

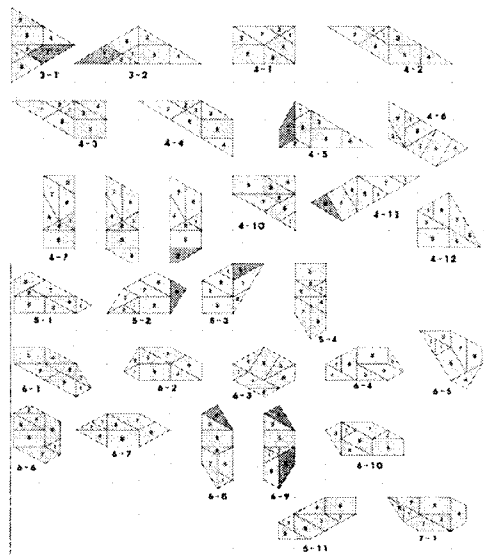
<표 IV-1> 스템크스퍼즐 조각들의 특징

번호	조각 이름	조각에 나타나는 모든 각도 (단위 °)	평행인 쌍의 개수	대칭 축의 개수	정삼각형을 기준으로		
					변의 길이	넓이	크기
①	정삼각형	60, 60, 60	0	3	1, 1, 1	1	$\frac{1}{16}$
②	둔각이등변삼각형	30, 30, 120	0	1	1, 1, $\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{16}$
③	직각삼각형	30, 60, 90	0	0	1, $\sqrt{3}$ , 2	2	$\frac{1}{8}$
④	직사각형	90, 90, 90, 90	2	2	1, $\sqrt{3}$	4	$\frac{1}{4}$
⑤	등변사다리꼴	60, 60, 120, 120	1	1	1, 1, 1, 2	3	$\frac{3}{16}$
⑥	사다리꼴	30, 60, 120, 150	1	0	1, 1, $\sqrt{3}$ , 2	3	$\frac{3}{16}$
전체 종류 (또는 합계)		30, 60, 90, 120, 150			1, $\sqrt{3}$ , 2	16	1

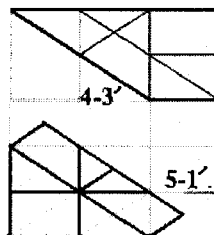
또한 [그림 IV-5]과 같은 방법으로 등적변형에 의해 [그림 IV-6]처럼 탱그램보다 훨씬 다양한 다각형들을 만들 수 있다. 여기서 빗금이나 음영으로 표시한 부분은 [그림 IV-3]의 직사각형을 기준으로 할 때 각 조각을 뒤집어 놓은 것이다. 선대칭인 도형은 뒤집어 놓아도 다시 돌려놓으면 원래의 모양과 똑같아지지만 선대칭이 아닌 3개의 조각(③, ④, ⑦번)은 뒤집어 놓으면 다른 모양이 된다. 따라서 [그림 IV-7]처럼 선분의 개수를 줄이거나 빗금 또는 음영 부분이 적게 나타나도록 보다 간단한 방법으로 그릴 수도 있다. 이들은 '보다 우아한 풀이에 대한 모색'이라는 수학적 사고를 자극하는 소재로 활용할 수도 있다.



[그림 IV-5] 조각의 위치를 바꾸어 쉽게 변형하는 방법

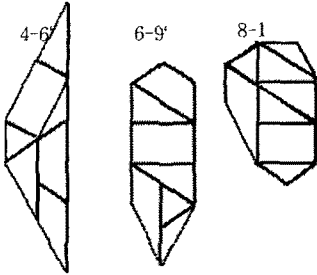


[그림 IV-6] 스템크스퍼즐로 만들 수 있는 다각형들(중복 도형 포함)



해설: 사용한 선분의 개수를 A, 뒤집은 조각의 개수를 B라 하고 A(B)로 표시하면 3-1은 5(1)이며 기본형인 4-1과 4-3, 그리고 5-1은 각각 5(0)이다. 하지만 왼쪽의 4-3'과 5-1'은 각각 4(0)으로 선분의 개수를 하나씩 줄였다.

[그림 IV-7] 스템크스퍼즐로 보다 간단하게 그리기

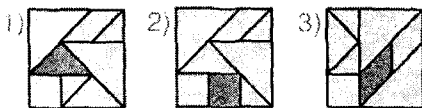


[그림 IV-8] [그림 14]에서 생략된 도형들

[그림 IV-6]는 7조각을 모두 사용하여 만들 수 있는 도형으로 27개의 예시를 소개하고 있지만 이는 실제로 중복되지 않게 만들 수 있는 박교식(2007b)의 27개와는 다른 모양이다. [그림 IV-6]는 뒤집어 놓으면 서로 동일한 모양(4-6과 4-9, 5-2와 5-3, 6-3과 6-6)을 추가하고 [그림 IV-8]의 새로운 도형(3가지)을 생략하였다. 따라서 중복된 도형과 추가할 도형을 더 찾아보도록 하는 활동지의 그림으로 사용할 수 있다.

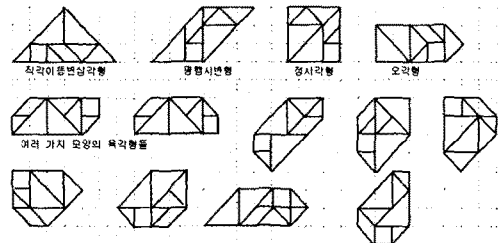
그리고 심화학습으로 스펅크스퍼즐의 7조각을 모두 사용하여 전부 몇 개의 다각형을 만들 수 있는지를 탐구해 보도록 해도 된다. 그러나 이들을 직접 만들어 보면서 일일이 발견해 내기란 매우 어려우므로 결국은 박교식(2007b)과 같은 수학적 증명에 필요하다.

한편, 박교식(2002, 2004)이 소개하는 유사탱그램과 같이 전체의 조각 수가 반드시 7개일 필요는 없다. 그런데 넓이가 8인 전통적인 칠교판에서 넓이가 1인 도형을 하나씩 추가하면 [그림 IV-9]과 같은 넓이가 9인 팔교판을 쉽게 얻을 수 있다. 아쉽게도 박교식(2002, 2004)이 제시한 5가지의 팔교판은 이러한 모양을 담고 있지는 않다.



[그림 IV-9] 전통적인 칠교판으로부터 얻은 팔교판

[그림 IV-9]의 각각의 경우에 대해 8조각을 모두 사용하여 볼록다각형을 만드는 것은 칠교판을 모두 사용하여 볼록다각형을 만드는 것보다 더 어렵다. 따라서 이는 넓이가 8인 정사각형으로부터 넓이가 9인 정사각형으로 변형하는 유사탱그램을 보여주는 예시로 활용하거나 두 사람이 조각을 번갈아 이어 붙여가는 다각형 만들기 게임에 활용할 수 있다. 다음은 [그림 IV-9]의 1)번 모양으로 만들 수 있는 다각형들의 일부 예시이다. 하지만 모든 다각형의 개수에 대해서는 아직 그 증명을 남겨두고 있다.



[그림 IV-10] 8교판 1)로 만든 일부 도형들

## V. 덧붙이는 말

교수-학습의 방법적인 측면에서 교사는 전통적인 탱그램으로부터 “탱그램은 왜 정사각형이어야만 할까?”, “왜 7조각이어야만 하지?”라는 질문을 통해 7조각이 아닌 조각퍼즐을 만들어 보려고 했던 발생적 과정을 제기하면서 학생들에게 자신만의 유사탱그램을 만들어 보게 할 수 있다. 교사는 다양한 종류의 유사탱그램이 있다는 것을 알고 그것을 결과적으로 소개만 하기 보다는 이들을 교육과정과 연계하면서 발생적 과정에 따라 재구성하여 학생들에게 발문을 통해 과정적으로 탐구해 보도록 할 수 있어야 한다.

이외에도 조각의 모양이나 개수에 변화를 강

조하면서 다양한 유사탱그램을 만들 수도 있지만 나아가 원판의 모양을 직선이 아닌 곡선으로 확대하여 원형 탱그램이나 달걀 모양 또는 타원형의 조각퍼즐, 그리고 이외에도 많이 알려진 것으로는 십사교판의 일종인 Synthemachion Puzzle, 글자 퍼즐인 T자(오각형 사교판), +자(직사각형 육교판), F자(팔각형 육교판)와 보다 고난이도의 테빌(또는 Kobold, 직사각형 칠교판)이라는 조각퍼즐들을 소개할 수는 있다.<sup>5)</sup>

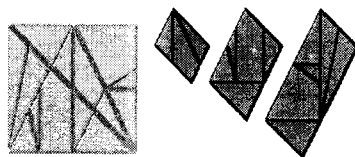
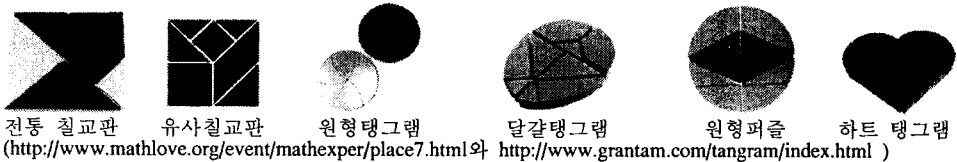
이처럼 “~라면 어떨까?(what if~?)” 또는 “~가 아니라면 어떨까?(what if ~not?)”의 기법을 사용하면 넓이가 8인 탱그램을 두 세트 사용하여 넓이가 16인 정사각형을 만들거나 평면이 아닌 입체탱그램도 생각할 수 있다.<sup>6)</sup> 입체탱그램은

6-가 단계의 부피 탐구와 7-나 단계의 입체도형에서의 면의 평행과 수직, 그리고 모양을 통한 입체의 공간감각을 익히는데 유용하게 활용할 수 있을 것이다. 하지만 이러한 유사탱그램들은 딱히 현 교육과정과 연계를 시키기가 쉽지 않기에 이들에 대한 활용의 사례는 더 많은 후속 연구를 필요로 하는 제한점으로 남겨둔다.

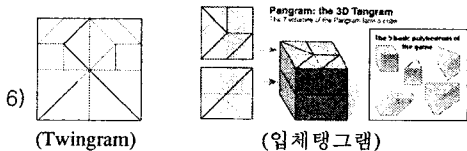
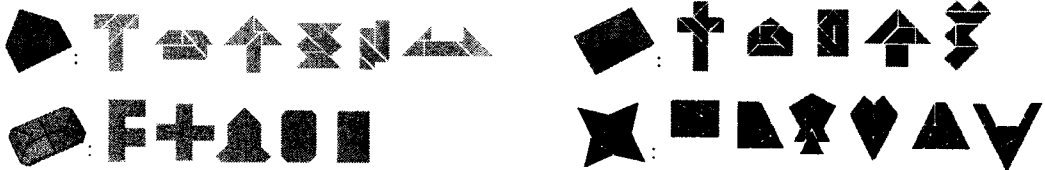
### 참고문헌

교육인적자원부(2007) 수학 교과서(3-가, 4-나, 5-가, 5-나). 대한교과서  
 김남희(2000). 탱그램 활용을 통한 수학적인 생각

5) 하지만 곡선형의 퍼즐들은 작도를 활용한 탐구활동으로는 가능하지만 다각형을 만들고 탐구하는 초등학교의 활동에는 적합하지 않다.



십사교판의 일종인 Synthemachion Puzzle과 이를 활용하여 만든 3가지의 답은 평행사변형  
<http://www.archimedes-lab.org/pzm21b.html#>



<http://archimedes-lab.org/tangramagicus/pagetang4.html>

- 의 구체화. *학교수학* 2(2), 563-587. 대한수학교육학회.
- 김민경(2004). 넓이 관련 열린 문제에 관한 문제해결 과정 분석. *수학교육* 43(3), 275-289. 한국수학교육학회.
- 남승인(2003). 수학퍼즐을 이용한 영재학습자료개발. *한국수학교육학회 시리즈 E. 수학교육논문집* 17권, 97-114. 한국수학교육학회.
- 박교식(2002). 유사 탱그램과 그 수학교육적 시사점. *학교수학* 4(1), 97-107. 대한수학교육학회.
- 박교식(2004). 다시보기 시리즈 6. 탱그램 다시보기. 수학사랑.
- 박교식(2007a). 정사각형 칠교판의 일곱 조각으로 만들 수 있는 볼록 다각형의 탐색. *수학교육학연구* 17(3), 221-232. 대한수학교육학회.
- 박교식(2007b). 스펅크스 퍼즐의 일곱 조각으로 만들 수 있는 볼록 다각형의 탐색. *과학교육논총*, 20(1), 113-122. 경인교육대학교과학교육연구소.
- 서은영(2007). 초등학교 수학 교수·학습을 위한 평면조각퍼즐 탐구 활동 교재 개발에 관한 연구. 경인교육대학교 대학원 석사학위 논문.
- 송상현(2004). 스펅크스퍼즐:칠교판을 발전시킨 새로운 칠교놀이. (주)에듀앙
- 송상현(2004). 수학 영재 교수-학습 자료 개발을 위한 소재 발굴에 관한 연구. *경인교육대학교 과학교육논총* 제 16집, 67-86.
- 안주형(2002). 탱그램과 모자이크 퍼즐을 활용한 수학과 수업 분석에 관한 연구. 석사학위논문. 인천교육대학교.
- 안주형·송상현(2002). 탱그램과 모자이크퍼즐의 활용에 관한 연구. *학교수학* 4(2), 283-296. 대한수학교육학회.
- 이경화(1999). 칠교판을 활용한 초등학교 영재교육 프로그램 개발. *한국수학교육학회시리즈F. 수학교육학술지* 제4집, 77-87. 한국수학교육학회.
- 이인환·류기천·이석희(1999). 수학교육과 탱그램 활동. *한국수학교육학회시리즈F. 수학교육학술지* 제3집, 139-168. 한국수학교육학회.
- Gardner, M. (1988). *Time Travel and Other Mathematical Bewilderments*. New York: W. H. Freeman and Company.
- van Delft, P. & Botermans, J. (1995). *Creative Puzzles of the World*. Berkeley, CA: Key Curriculum Press.
- Welchman, R (1999). Are You Puzzled?. *Teaching Children Mathematics*. 5(7), 412-415. NCTM.
- <http://www.geocities.com/tangramfan/> 지오시티의 탱그램 게이트웨이트
- <http://www.johnrausch.com/PuzzleWorld/puz/tangram.htm> 존 라우쉬의 퍼즐의 세계
- [http://book.naver.com/bookdb/book\\_detail.php?bid=1475434](http://book.naver.com/bookdb/book_detail.php?bid=1475434) 유사탱그램 모음
- <http://www1.kamakuranet.ne.jp/usasan/files/cuttings.htm> 가마구라넷이 제공하는 유사탱그램
- [http://gifted.eduwang.com/b\\_system/b\\_system04\\_sphinx.htm](http://gifted.eduwang.com/b_system/b_system04_sphinx.htm) 스펅크스퍼즐 구입 문의
- <http://homepage2.nifty.com/CHARLIE-ZHANG/EKI/EKI00.html> 15교판을 이용한 익지도
- <http://www.mathlove.org/event/mathexper/place7.html> 직선이 아닐 때의 조각퍼즐
- <http://user.chollian.net/~badang25/letter/letter.htm> T, +, F 등 글자 모양의 조각들
- <http://archimedes-lab.org/tangramagicus/pagetang4.html> 아르키메데스 연구실에서 제공하는 탱그램의 마술: 정사각형탱그램에서 정육면체 탱그램까지

# Revisiting Tangram and Similar Tangrams based on Mathematics Curriculums

Song, Sang Hun (Gyeongin National University of Education)

There are some studies on tangram a kind of jigsaw(silhouette or dissection) puzzle. And Korean national curriculums mention about tangram. But the past studies and the textbooks are not so related to curriculums. So this study is focused on some problems and limitations of tangram activities related to curriculum. This study gives some educational suggestions using tangram:

(1) alternate drawing of tangram (2) making mathematical figures instead of shapes (3) proper activities related to the national curriculum (especially, polygons and angles) and mathematical thinking (4) examples of exploring mathematical figures and angles coming in and out of national curriculum

In addition to, this study suggests some mathematical activities of using similar tangrams (especially sphinx puzzle).

\* **Key words** : 탱그램(tangram), 유사탱그램(similar tangram), 스펅크스퍼즐(sphinx puzzle), 교육과정(curriculum), 수학교과서(mathematics textbook), 수학적 사고(mathematical thinking), 도형(figure), 다각형(polygon), 각(angle)

논문접수: 2008. 4. 10

논문수정: 2008. 8. 15

심사완료: 2008. 8. 21