대한수학교육학회지 <학교수학> 제 10 권 제 3 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.10, No.3, 319-337. Sep. 2008

Fischbein의 직관에 기초한 독립성에 관한 확률지도

조 차 미*

일상어로서의 언어적 개념에 의해 형성된 독립에 대한 직관은 수학에서의 독립성에 대한 새로운 개념체계를 확립하는 데 있어 도움을 주거나 방해를 한다. 다시 말해 이러한 갈등을 동반하는 직관은 독립성을 설명하는 데 원동력이 되기도 하나 때로는 오개념을 유발하는 장애요인이기도 하다. 본 논문의 목적은 이러한 원동력이 되는 직관과 장애가 되는 직관을 구분하여 학생들이 직관을 바르게 사용하도록 하는 데 있다. 이로써 독립의 언어적 해석의 개입으로 인해 발생하는 잘못된 직관에 의한 오개념을 오히려 드러내어 가르칠 필요가 있음을 제안하였다. 또한 시행의 독립성과 사건의 독립성의 명확한 구분이 필요하다는 것을 제안하였으며, 복원추출과 비복원추출이 사건의 독립과 종속의 대표적인 예로 특정화되어서는 안 되는 것을 반례를 통해 보였다. 본 논문에서의 직관의 분석은 Fischbein이 분류한 직관을 바탕으로 하였으며 독립성의 개념에 적용되는 직관을 구체적으로 Fischbein의 직관과 대응시켜 분석하였다.

I. 서 론

확률은 특히 수학의 다른 분야에 비해 그의 생성과 발전이 역사적으로 오랜 기간 동안 언어적인 것에 의해 통제되어왔다. 이러한 난무한 언어적인 표현이 집합론의 발전과 함께 간결함을 갖추게 되고 공리적인 수준으로 끌어올려진 것은 그다지 먼 과거의 역사가 아니다. 독립에 관한 의미는 수학적인 의미이전에 확립된 언어적 의미의 영향에 많이 노출되어 있으면서 동시에 집합기호로 인한 형식적 정의가 강조되고 있다.

독립성을 처음 접하는 대부분의 학생들은 '독립'이라는 언어적 의미에 많이 의존하여 직관적 개념을 형성하도록 요구된다. 교육과정의 [8-나]에서는 독립의 의미를 따로 명시하거나 드러내지 않았으나 독립성의 판단을 직관적으로 할 것을 가정하고 확률의 곱셈정리를 암시하고 있다. 이는 수형도를 통해 그 직관을 뒷받침할 수 있으며 이러한 직관은 [수I] 에서의 독립성의 의미에 바로 연결되어 적용된다.

그러나 직관적으로 너무나 자연스럽고 쉬운 독립성이 직관이 통하지 않는 예에 부딪히게 될 때 독립성의 개념에 혼돈을 불러오는 경우가 많이 발생한다. 많은 교사들과 학생들의 독립성에 대한 오해는 복잡하고 일치하지 않는 직관과 형식의 갈등과 대립에서 불러온다. 그럼에도 불구하고 국내외에는 아직 독립성에 관한 연구가 그리 많지 않다. 이에 논문을 구성하는 데 일부 조건부 확률에 관한 연구를 참고하여 구성하였으나 많은 어려움이 있었다. 교과서의 많은 문제들은 독립성의 개념이해에서 발생하는 어려움을 의도적으로 드러내지

* 전남대학교 대학원(chami622@hanmail.net)

않거나 '일상어와 다르다'는 무책임한 설명으로 독립성에 대한 의문만 증폭시키고 있었다. 이러한 어려움을 극복할 방안을 찾기 위해 Fischbein의 직관의 분류를 이용하여 독립성에서 발생하는 1차 직관과 2차 직관을 구분하였다. 1차 직관의 적용이 가능한 '시행의 독립성'과 그렇지 않은 또는 새로운 2차 직관을 형성하여야 하는 '사건의 독립성'을 구분하여 가르칠 것을 주장하였다. 시행의 독립성은 독립시행과 같은 사건의 반복으로만 제한하지 않고 서로 다른 사건의 경우까지 포함하여 전개하는 것이 더욱 바람직하며 이것이 직관에 의해 출발한 독립성의 영역이 확장된 전 구조까지 모두 포괄할 수 있는 교수법의 첫 번째 단계로 판단하였다. 특히, 사건의 독립성의 직관 모델로 가장 많이 사용되는 복원추출과 비복원추출은 시행의 독립을 결정할 뿐, 사건의 독립성을 특정화하는 주제로 타당하지 않음을 제안하였다. 또한 일상어에 의한 단정적 직관에 의해 잘못 형성되는 1차직관의 위험에 대해 이를 감추지 말고 오히려 드러내어 지도할 것을 주장하였으며, 잘못 적용될 수 있는 직관의 예를 소개하고 이를 배제하기 위한 몇 가지 방안을 제시하였다.

II. Fischbein의 직관

이 장에서는 Fischbein(1987)의 직관에 관한 연구결과에 비추어 독립성에서의 직관을 분석하고자 하므로 Fischbein의 직관의 분류와 간략한 내용을 소개하겠다.

Fischbein(1987)은 직관을 두 가지 방법으로 분류하였다.

첫째 분류는 역할에 근거하여 분류하였으며 직관과 풀이 사이의 관계를 고려하여 단정적 직관, 추측적 직관, 예상적 직관, 결론적 직관으로 구별하였다. 단정적 직관은 확실하고, 자명하며, 자기모순이 없는 것으로 받아들여진 다양한 사실의 표상 또는 해석이다. 추측적 직관은 전문적 지식이 아닌 일상적 경험에 근거하는 초보자의 직관과 어떤 영역에 풍부한 경험을 지닌 전문가들이 하는 전문가적 직관으로 구분될 수 있다. 예상적 직관은 문제에 대한 분석적, 완전히 개발된 풀이에 선행하는 예비적, 전체적 견해를 나타낸다. 그러나 그의 구분은 절대적인 것이 아니라 단정적 직관, 추측적 직관, 예상적 직관의 연속체에 관해 생각하도록 하고 있다. 결론적 직관은 이전에 정교화된 문제에 대한 풀이의 기본적 아이디어를 전체적, 구조화된 시각으로 요약한다.

두 번째 분류는 1차 직관(Primary intuitions)과 2차 직관(Secondary intuitions)으로 구분되며 직관의 기원에 관련된 것으로 주로 단정적 직관과 관계가 있다. 1차 직관은 개인들에게서 어떠한 체계적 지도와 무관하게 그들의 개인적 경험의 효과로서 발달하는 인지적 신념에 관련되는 것으로 기초적(일반적, 공통) 직관과 (특정하지만 자연스러운 상황에서 만들어지는) 개별적 직관을 모두 포함한다. 2차 직관의 범주는 어떠한 자연스러운 근원도 갖지 않는 새로운 직관이 개발될 수 있다는 가정을 함의한다. 이는 학습된 개념작용으로부터 신념으로 변환될 수 있는 것이다. 예를 들어 무한집합과 그것의 진부분집합 사이의 상등이 신념, 즉 자기설명력 있는 개념작용이 된다면 새로운 2차 직관이 나타난 것이다. 이 두 번째 분류는 직관의 원천과 관계가 있다. 1차 직관은 정상적인 일상의 경험에 기초하여 발달된다. 대조적으로 2차 직관은 자연스러운 경험을 통해서가 아니라 어떤 교육적 개입을 통하여 획득되는 것이다.

Fischbein의 두 번째 분류인 1차 직관과 2차 직관을 Kapadia 와 Borovcnik(1991, p.9)은 다음과 같이 해석했다.

▸ 1차 직관은 이론의 역사적 발달 또는 개인적인 개념의 재구조화, 즉 학습자의 이해발달에서 원동력이 되거나 장애가 될 수 있다.

▸ 2차 직관은 어떤 개념체계의 이론적 침투 또는 체계적인 지도에 의해 나타나는 것이다.

경험에 의한 1차 직관은 독립성의 발생적 과정에, 교육적 개입을 통한 2차 직관은 과 형식으로 인한 확장된 독립성에 대한 해석에 각각 작용하는 직관으로 매우 적합한 분류이다. 이에 본 논문에서는 Fischbein이 분류한 직관의 두 번째 분류에 의해 독립성의 개념에 적용되는 직관을 구체적으로 분석하고자 한다. 그러나 1차 직관은 두 얼굴을 가지고 있어서 이해발달의 원동력의 역할을 하는 긍정적 작용(올바른 1차 직관)과 이해에 장애를 유발하는 부정적 작용(그릇된 1차 직관)으로 나뉜다. 이것은 독립성의 지도에서 시행의 독립성을 판단할 때는 원동력으로 사용할 수 있으나, 시행의 독립에 의존하지 않는 사건의 독립성을 판단할 때는 장애로 작용할 위험이 있으므로 조심스럽게 다루어야 한다.

장애를 일으키는 1차직관의 위험이 유발될수 있는 상황에서는 조건부확률 개념을 이용한 교육적 개입을 통해 2차 직관의 해석을 수반할 수 있다.

'배반이면 독립이다'로 잘못 인식하게 하는 직관은 1차 직관의 부정적 작용이라 할 수 있다. 형식적 정의에 의한 독립성의 해석은 2차 직관이다. 형식적 정의가 어떻게 직관이 되는지 의심을 가질 수 있으나 조건부 확률의 개념을 사용한 상대적 비의 정확한 일치를 통한 독립성의 해석을 통해 형성된 직관을 본 논문에서는 2차 직관으로 본다. 2차 직관의 범주는 어떠한 자연스러운 근원도 갖지 않는 새로운 직관이 개발될 수 있다는 가정을 함의한다고 하였다. 실제 사건의 독립성에서 조건부확률을 이용해 획득하는 2차 직관은 시행의 독립성에서 발생하는 1차 직관과 같은 자연스러운 근원을 갖지는 못한다.

이러한 구체적인 직관의 작용에 대한 분석은 독립성의 직관적인 개념이 일상적인 의미와의 충돌을 일으킬 때 일으킬 수 있는 인식론적 장애[1]를 예방하는 데 필요하다. 일상어는 인식론

<표 II-1>직관 분석

문제의 예	독립성의 분류	사용되는 직관
두 주사위의 독립성	시행의 독립성	올바른 1차 직관
두 사건이 배반이면 독립이다.(×)	사건의 독립성	그릇된 1차 직관 (독립의 언어적 습관에 기인한 1차 직관)
고혈압과 과체중은 종속이다.(확률에 따라 결정)	사건의 독립성	그릇된 1차 직관 (인과적 영향이 있는 주변의 경험에 기인한 1차 직관)
시행의 독립에 의존하지 않는 사건의 독립성에 관한 여러 가지 문제	사건의 독립성	교육적 개입을 통해 획득하는 2차 직관 (상대적 비가 동일하다는 해석으로 형성하는 2차 직관)

1) Brousseau는 '어떤 특정한 맥락에서는 성공적이고 유용하였던 지식으로, 따라서 학생의 인지구조의 일부가 되었지만 새로운 문제 상황이나 더 넓어진 문맥에서는 부적합해진 지식'을 '인식론적 장애(epistemological obstacle)'라고 부르고 있다. (우정호, 2000, pp. 460-461)

적 장애형성에 큰 영향을 주는 요인이다. 인식론적 장애는 학습하고자 하는 지식의 본성에 기인하는 것이라고 하나 그러한 장애의 원인을 밝히는 것은 지식의 구성에 있어서 적절성에 관한 의심과 확률의 개념이 어떠한 방식으로 학생들에게 확립되는가의 확인이 필요하다고 할 수 있다.

이러한 Fischbein의 직관의 분류를 기초로 하여 III장에서 독립성의 올바른 증명을 통해 올바른 1차 직관과 2차직관의 연결을 독립성이라는 한 가지 주제에 맞게 통합할 수 있는 모델을 제시하였다.

IV장에서는 올바른 1차 직관과 구분되는 그릇된 1차 직관의 경우를 드러내어 수정할 것을 강조하였으며 이를 통해 올바른 직관을 형성할 수 있는 기회를 제공하도록 여러 가지 예를 들었다.

III. 시행의 독립성과 사건의 독립성

교육과정에서 시행의 독립성은 사건의 독립성과 따로 구성되어 있지 않다. 단 독립시행의 부분에서 같은 사건의 반복된 형태 만으로만 제한한 시행의 독립성을 가르치고 있다. 본 장에서는 시행의 독립성이 따로 구체화하지 않은 교육과정에서 나타난 문제점들을 통하여 시행의 독립성과 사건의 독립성을 따로 구분할 것을 제안하였다.

1. 나선형 교육과정

독립성에 관한 내용은 [8-나]에서부터 직관을 통한 판단이 가능한 경우의 예를 통해 자연스럽게 스며들어 있다. 이것은 나선형 교육과정의 한 형태를 빌어 점차적으로 사건과 표본공간이라는 용어와 집합기호의 사용과 더불어 [수I]에서 전개된다.

실제 확률에서 발생하는 자연스러운 사고과정에 의한 계산은 [8-나]에서부터 출발하나 집합기호의 도입으로 인한 형식에 치우친 계산은 [수I]에서 전개된다. 그러나 교육과정에서 아쉬운 점은 본연의 자연스러운 사고와 이를 경직시키는 형식을 연결할 수 있는 독립성의 올바른 교수학적 연구가 아직 이루어지지 않고 있다는 점이다.

나선형 교육과정에서 합의 법칙과 곱의 법칙의 반복은 용어의 도입과 집합 기호의 도입이 단계적으로 실행되면서 모두를 통합하는 교육과정의 형태로 구성되어 있다. 이러한 구성은 [수I]에서의 확률의 곱셈정리가 [8-나]에서의 사건 A와 사건 B가 동시에 일어날 경우의 수나 확률의 계산에 기초하여 성립되는 것으로 암시되고 있으며 자연스러운 사고과정으로서의 확률의 계산에 더욱 치중하여 전개된다.

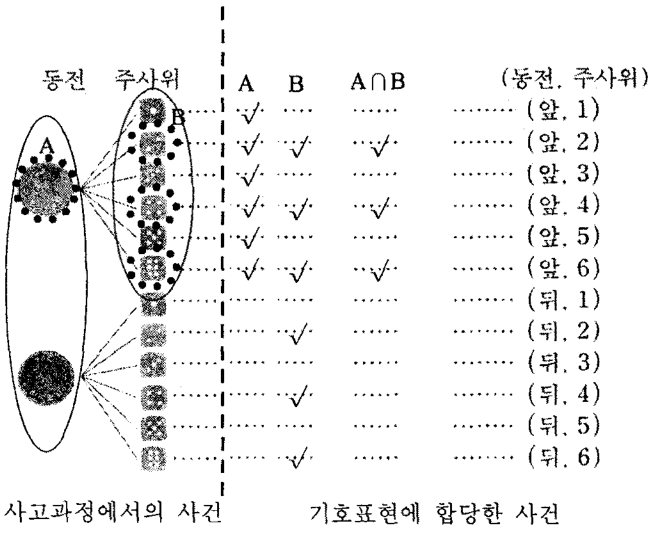
그러나 도구적인 사용으로서의 집합기호의 도입은 [8-나]의 교육과정과 [수I]의 교육과정에서 드러나 독립성을 같은 시각으로 바라보는 것이 과연 타당한가에 의문을 던져주고 있음에도 불구하고 이것은 쉽게 드러나지 않는다.

2. 집합기호의 변화

현 교육과정에서는 반복되는 같은 사건에 대해서만 독립시행이라고 따로 구분하고 있으나 실제로는 같은 시행이 아니더라도 시행이 독립적인 것은 [8-나]에서처럼 독립성의 판단을 직관에 의존할 수 있다.

<표 III-1>나선형 교육과정

	대단원	중단원	소단원	지도내용	용어와 기호
8-나	확률	경우의 수와 확률	경우의 수	사건의 뜻 **사건 A또는 B**가 일어날 경우의 수 **사건 A와 B가 동시에** 일어날 경우의 수	사건
		확률의 계산	확률의 계산	**사건 A또는 B**가 일어날 확률 **사건 A와 B가 동시에** 일어날 확률	
수I	순열과 조합	순열	경우의 수	경우의 수 **합의 법칙** **곱의 법칙**	
	확률	확률의 뜻	시행과 사건	시행과 사건의 뜻 배반사건과 여사건의 뜻	시행, 사건, 배반사건, 여사건
		확률의 계산	확률의 덧셈정리와 곱셈정리	확률의 **덧셈정리** 조건부확률 확률의 **곱셈정리** 독립사건과 종속사건	조건부확률, 독립, 종속, $P(A\mid B)$
			독립시행의 확률	독립시행의 정리	독립시행
확률과 통계	확률	확률의 뜻과 성질	확률의 뜻	시행과 사건 수학적확률 통계적확률	시행, 사건, 근원사건, 합사건, 곱사건, 여사건, 배반사건, 수학적확률, 통계적확률
			확률의 성질	확률의 기본성질 확률의 **덧셈정리** 여사건의 확률	
		확률의 계산	순열	**곱의 법칙**	
			조건부확률	조건부확률 사건의 **독립과 종속**	독립, 종속, 조건부확률



[그림 III-1] 동전과 주사위의 확장된 수형도

위의 수형도에서의 동전과 주사위 사건을 곱의 법칙으로 표현하는 것이 적확한가? 서로 영향을 끼치지 않는 판단이 가능한 두 사건의 교집합의 표현이 두 사건의 동시성을 나타낼 수 있는가? [8-나]에서 다루던 직관에 의한 판단이 가능한 경우의 모든 독립사건은 사건을 결정하는 시행자체가 먼저 독립이기 때문에 직관의 적용이 가능한 경우이다. [8-나]에서 확률의 곱을 유도하던 수형도는 사건의 독립성을 설명하는 것이 아니라 시행의 독립성을 설명한다. 이것은 사고과정에서 바라본 사건의 관계이다. 이것을 바로 교집합기호로 표현되는 사고로의 전환은 그리 바람직하다 할 수 없다. 확장된 수형도를 통해 두 시행의 적공간에서의 사건에 대한 재구성을 통해 곱의 법칙이 유도됨을 암시하여야 한다.

흔히 이 때 사용하는 교집합의 기호는 실제 집합의 엄밀한 표현을 강조하기 보다는 두 사건을 연결하는 '접속사'와 같은 엉뚱한 결합을 습관적으로 만들어 낸다. 교과서에서조차 두 사건의 경우의 수에서 잘못 적용되는 사례가 간혹 있다.

<표 III-2>의 내용을 종합하면 사건 A, B가 동시에 일어나는 경우의 수는

$n(A\cap B)=n(A)\times n(B)=2\times6=12$이다.

그러나 사건 A와 B의 집합은 교과서에서 제시하기로는 A={앞, 뒤}, B={1, 2, 3, 4, 5, 6}이다. 그러므로 실제 교집합의 의미를 적용한다면 $A\cap B=\phi$이 되므로 $n(A\cap B)=0$이다. 무조건 '동시에'의 개념을 교집합으로 바꾸도록 하는 것은 집합기호에 관한 무관심을 유도하며 이에 의해 경우의 수에서 위와 같은 실수가 유도되고 있음을 눈치 채지 못하게 하는 요인이 된다. 확률이 아닌 사건의 경우의 수에서는 위의 경우에 교집합의 기호가 아니라 곱집합의 기호가 바른 표현이다. 사건이 동시에(잇달아) 일어나는 경

<표 III-2> '동시에'와 교집합의 습관적 결합

교과서 201-202p	교사용지도서 285p
곱의 법칙 두 사건 A, B에 대하여 사건 A, B가 일어나는 경우의 수를 각각 m, n가지라 하면, 두 사건 A, B가 이어서 일어나는 경우의 수는 $m\times n$가지	▸지도개관 곱의 법칙에서는 두 사건에 대한 아무런 제약이 없음에 유의하고, 곱의 법칙은 후에 다루게 될 사건의 독립성에 대한 이해의 바탕이 됨을 염두에 두고 지도한다.
동전 한 개와 주사위 한 개를 던질 때, 나올 수 있는 경우의 집합을 각각 A, B라 하면 A={앞, 뒤}, B={1, 2, 3, 4, 5, 6} 이다. 이 때, 사건 A와 B가 동시에 일어나는 경우의 집합은 {(앞, 1), (앞, 2), (앞, 3), (앞, 4), (앞, 5), (앞, 6), (뒤, 1), (뒤, 2), (뒤, 3), (뒤, 4), (뒤, 5), (뒤, 6)} 과 같다. 따라서 사건 A, B가 동시에 일어나는 경우의 수는 $n(A)\times n(B)=2\times6=12$ 이다.	경우의 수의 합의 법칙과 곱의 법칙은 대부분 중학교에서 직관적으로 지도하고 있으나 고등학교에서는 집합의 개념을 도입하여 논리적으로 재정리한다. 집합의 기호를 사용하여 합의 법칙, 곱의 법칙을 나타내면 합의 법칙: $A\cap B=\phi$일 때, $n(A\cup B)=n(A)+n(B)$ 곱의 법칙: $n(A\cap B)=n(A)\times n(B)$ 셋 이상의 사건에서도 곱의 법칙이 성립한다. 즉, $n(A\cap B\cap C)=n(A)\times n(B)\times n(C)$ (최상기 외, 2002)

우의 수인 곱의 법칙을 $\underline{n(A \times B) = n(A) \times n(B)}$로 표기한다. 이것이 집합기호의 논리적으로 타당한 적용이다. 경우의 수에서 이러한 곱의 법칙은 후에 다루게 될 사건의 독립성과 곱셈정리의 이해에 바탕이 된다고 하였다. 그러나 경우의 수든 확률이든 문제를 구성하고 설명하는 데 있어 언어적인 변화는 찾을 수 없으나 기호에서의 변화는 뚜렷하다.

똑같은 상황을 표현하는 문제를 [8-나]의 경우의 수를 묻는 문제와 [수I]의 확률을 묻는 문제로 구성하여 비교해 보자.

[8-나]의 경우의 수
동전 한 개와 주사위 한 개를 던질 때, 동전의 앞면이 나오는 사건을 A, 주사위의 2이하의 눈이 나오는 사건을 B라 하자. 이 때, 사건 A와 B가 동시에 일어나는 경우의 수는 얼마인가?
A={앞}, B={1, 2}이고, A, B가 동시에 일어나는 경우의 집합은 {(앞, 1), (앞, 2)}이므로
그 경우의 수는
$n(A \times B) = n(A) \times n(B) = 1 \times 2 = 2$ 이다.

[수I]의 확률
동전 한 개와 주사위 한 개를 던질 때, 동전의 앞면이 나오는 사건을 A, 주사위의 2이하의 눈이 나오는 사건을 B라 하자. 이 때, 사건 A와 B가 동시에 일어날 확률은 얼마인가?
$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$

문제의 말미에서 묻는 것이 경우의 수인지 확률인지의 차이만 있을 뿐이나 [8-나]의 곱의 법칙에서 사용되는 $A \times B$와 [수I]의 독립성에서 사용되는 $A \cap B$는 두 사건을 연결하는 기호의 차이는 두 사건이 예속되는 표본공간과 두 사건 자체에 커다란 차이가 있음을 암시한다. 특히 독립성의 이해에서의 직관적 이해와 형식적 논리의 충돌은 많은 학생들로 하여금 혼돈을 불러일으키는 요인이 바로 이 두 사건에 대한 차이 때문이다. 학생들은 직접적으로 이 관계에 관해 관심을 갖지 않으나 실제 $A \cap B$으로 사건의 독립성을 증명하여야 할 내용을 $A \times B$으로 증명하고 있는 많은 사례가 사건의 독립성의 개념에 혼란을 주는 가장 큰 요인이다. 확률을 표현하기 위한 집합기호로 된 언어는 그 안에 확률의 개념과 사건의 집합의 개념을 동시에 포함하고 있다. 오히려 집합의 개념이 확률의 개념을 인식시키는 데 도구적인 역할을 하고 있다. 그런데 이 도구적인 역할의 집합기호의 사용이 복잡한 일상생활과 관련이 있는 확률을 자연스럽게 수학적인 표현으로 단순화 시키기에 일관성이 없는 경우가 더러 있다. 이는 기호의 형식을 빌어서 드러내고자하는 수학적인 의미가 확률의 일상적인 의미를 다 표현하는 데 있어서 무리가 있음을 시사한다.

[수I]에서 제시된 문제의 집합기호 표현은 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$이나 의식 구조 안에서 사건을 바라보는 시각은 $P(A \times B) = P(A)P(B)$에 더 가깝다. 더욱 정확한 표현은 $P(A \times B) = P_a(A)P_b(B)$으로 확률공간이 다르므로 두 확률측도도 다르게 표현하여야 한다.

그런데 만약 위에서 제시한 문제를 사건의 독립성의 증명에서 사용한다면 어떤 과정이 더욱 적합한가? 독립성의 증명은 $P(A \times B) = P_a(A)P_b(B)$이 아닌 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$이다. 그렇다면 아래 제시된 독립성에 관한 두 가지 증명 중 우리는 어떤 증명을 선택해야 하는가?

'동전 한 개와 주사위 한 개를 동시에 던질 때, 동전의 앞면이 나오는 사건과 주사위의 2이하의 눈이 나오는 사건이 독립임을 증명하여라.'

(증명1) 동전의 앞면이 나오는 사건을 A, 주사위의 2이하의 눈이 나오는 사건을 B라고 하

면 $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

한편, 사건 $A\cap B$인 경우의 집합은 {(앞, 1), (앞, 2)}이므로 $P(A\cap B)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$

$\therefore P(A\cap B)=P(A)P(B)$ 따라서 두 사건 A, B는 서로 독립이다.

(증명2)

(앞, 1), (앞, 2), (앞, 3), (앞, 4), (앞, 5), (앞, 6), A
(뒤, 1), (뒤, 2), (뒤, 3), (뒤, 4), (뒤, 5), (뒤, 6)
B

[그림 III-2] 올바른 사건에 대한 인식

$P(A)=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$

한편, 사건 $A\cap B$인 경우는 (앞, 1), (앞, 2)이므로 $P(A\cap B)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$

$\therefore P(A\cap B)=P(A)P(B)$ 따라서 두 사건 A, B는 서로 독립이다.

혹자는 같은 증명이라 주장할지도 모른다. 물론 계산의 결과는 같다. 그러나 증명은 엄밀해야 한다. 위의 예처럼 각 시행에만 각각 관련된 사건의 독립성의 증명을 원한다면 수형도를 통해 보여준 형식(증명1)이 아닌 다른 각도의 증명 즉, 집합기호의 의미에 어긋나지 않는 증명(증명2)이 필요하다. 이는 집합에서의 '교집합' 기호가 확률에서의 '곱사건'을 나타내면서 기호적 의미와 언어적 의미의 상충이 빚어내는 갈등이 교사와 학생들의 의식구조에서 자연스러운 사고과정에 묻혀 집합 기호의 엄밀성이 괴멸되는 상황을 막기 위함이다. 또한 자연스러운 사고과정에 의존하던 독립성의 개념이 집합기호를 도입한 곱셈정리의 형식적 계산으로 표현되면서 드러나는 독립성의 확장된 영역을 포괄할 수 있는 구조를 파악하기 위함이다. 많은 교과서가 동전과 주사위를 동시에 던지는 시행에서 각각의 시행에 관계하는 사건의 독립성을 증명하는 과정에 약간의 실패가 있다. 그 실패는 사건의 독립성을 증명할 때 사건을 전체 표본공간의 명확한 인식을 통한 그의 부분집합으로서 구성하지 않아서 생기는 오류이다.

사건의 독립성에 대한 정확한 표현은 (증명2)이며 이러한 구조가 서로 직관에 의해 판단되지 않는 두 사건의 독립성에 대해서도 일관적인 해석을 제공할 수 있는 구조이다. 실제 위의 문제는 사건의 독립성의 형식적 증명을 요구하므로 형식적 엄밀함에 의해 표현한 것이나 위의 문제는 시행의 독립이 직관에 의해 당연히 받아들여지는 독립시행인 경우이므로 증명에 의한 판단이 필요하지 않다. 시행의 독립인 경우는 $P(A\times B)=P_a(A)P_b(B)$에 의해 시행의 독립이 판단되는 것이 아니라 시행의 독립의 직관적 판단에 의해 $P(A\times B)=P_a(A)P_b(B)$의 계산이 가능한 것이다. 이와는 반대로 사건의 독립인 경우는 직관적 판단에 의해 $P(A\cap B)=P(A)P(B)$의 계산이 가능한 것이 아니라 $P(A\cap B)=P(A)P(B)$에 의해 그 독립성을 파악할 수 있는 것이다. 이것은 시행의 독립의 자명한 직관으로부터 출발한 독립에서의 $P(A\times B)=P_a(A)P_b(B)$라는 성질이 새로운 구조인 $P(A\cap B)=P(A)P(B)$를 만들어내는 순환적인 과정의 인식이 필요함을 의미한다.

3. 복원추출과 비복원추출의 오해

시행의 독립성과 사건의 독립성을 구분하지 않고 사용하여 생길 수 있는 모순은 이밖에도 여러 가지가 있다. 그 중 대표적인 것이 복원추출과 비복원추출에 대한 오해이다. 대부분의 교사들은 사건의 독립성의 직관모델로 복원추출과 비복원추출의 예를 가장 많이 사용한다.

▸사건의 독립과 종속

어떤 사건이 일어날 확률이 다른 사건이 일어날 확률에 영향을 주는 경우가 있고, 그렇지 않은 경우가 있다.

예를 들어 흰 공이 5개, 검은 공이 3개가 들어 있는 주머니에서 임의로 한 개의 공을 두 번 꺼낼 때, 첫 번째 꺼낸 공이 흰 공일 사건을 W_1, 두 번째 꺼낸 공이 흰 공일 사건을 W_2라고 하고 확률 $P(W_2|W_1)$를 구하여 보자. 주머니에서 공을 꺼낼 때에는 꺼낸 공을 다시 넣고 꺼내는 복원추출 방법과 다시 넣지 않고 꺼내는 비복원추출 방법이 있으므로 각 추출 방법에 대한 확률을 구하여 보자.

(1) 복원추출의 경우

첫 번째 꺼낸 공이 흰 공일 때, 두 번째 꺼낸 공이 흰 공일 확률은 $P(W_2|W_1)=\frac{5}{8}$이다. 이것은 첫 번째 꺼낸 공이 흰 공이라는 조건과 관계없이 두 번째 공이 흰 공일 확률 $P(W_2)=\frac{5}{8}$와 같다.

즉 $P(W_2|W_1)=P(W_2)$이다. 이와 같이 사건 W_1이 일어났을 때의 사건 W_2의 조건부확률이 사건 W_2가 일어날 확률과 같을 때, 사건 W_1과 사건 W_2는 서로 독립이라고 한다.

(2) 비복원추출의 경우

첫 번째 꺼낸 공이 흰 공일 때, 두 번째 꺼낸 공이 흰 공일 확률은 주머니 속에 흰 공 4개, 검은 공 3개가 남아 있으므로 $P(W_2|W_1)=\frac{4}{7}$이다. 그런데 두 번째 꺼낸 공이 흰 공일 확률 $P(W_2)$는 첫 번째 꺼낸 공이 흰 공 또는 검은 공일 수 있으므로

$$\begin{aligned} P(W_2) &= P(W_2\cap W_1)+P(W_2\cap W_1^c) \\ &= P(W_1)P(W_2|W_1)+P(W_1^c)P(W_2|W_1^c) \\ &= \frac{5}{8}\times\frac{4}{7}+\frac{3}{8}\times\frac{5}{7}=\frac{5}{8} \end{aligned}$$

즉, $P(W_2|W_1)\neq P(W_2)$이다. 이와 같이 사건 W_1이 일어났을 때의 사건 W_2의 조건부확률이 사건 W_2가 일어날 확률과 다를 때, 사건 W_1과 사건 W_2는 서로 종속이라고 한다(확률과 통계, pp.71-72).

위에서 복원추출의 경우는 독립으로 비복원추출의 경우는 종속으로 결론내고 있는 방법은 추출의 각 단계에만 관계되는 사건들끼리의 독립과 종속의 결과이므로 실제로 이 사건의 독립과 종속은 시행의 독립과 종속에 의존하고 있다.

그러나 위와 같은 단정적인 결론은 구성되는 사건의 형태가 어떠하든지 복원과 비복원이 모든 사건의 독립과 종속을 결정한다는 암시가 제공될 수 있는 위험을 품고 있다.

아래의 예는 복원추출에서 종속인 두 사건이, 비복원추출에서 독립인 두 사건이 구성되는 예로 사건의 독립과 종속을 추출의 형태로 구분지어서는 안 된다는 것을 보여준다. 즉, 추출의 형태는 사건의 독립, 종속을 결정하는 것이 아니라 단지 시행의 독립, 종속을 결정하며 각 시행에만 의존하는 사건들이 특별히 직관에 의한 사건의 독립성의 판단이 가능했을 뿐이다.

(복원추출의 경우) 1, 2, 3, 4의 번호가 적어진 4개의 공이 들어있는 주머니에서 임의로 한 개의 공을 두 번 꺼낼 때, 공에 적힌 수의 합이 3인 사건을 A, 첫 번째 공에 적힌 수가 1인 사건을 B라고 하자.

$P(A)=\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$, $P(B)=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$,

$P(A\cap B)=\frac{1}{16}$

$\therefore P(A\cap B)\neq P(A)P(B)$ 즉, **종속**이다.

(비복원추출의 경우) 1, 2, 3, 4의 번호가 적어진 4개의 공이 들어있는 주머니에서 임의로 한 개의 공을 두 번 꺼낼 때, 공에 적힌 수의 합이 5인 사건을 A, 첫 번째 공에 적힌 수가 1인 사건을 B라고 하자.

$P(A)=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$, $P(B)=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$,

$P(A\cap B)=\frac{1}{12}$

$\therefore P(A \cap B) = P(A)P(B)$ 즉, **독립**이다.

‘복원추출이 독립이고 비복원추출이 종속이다’라는 단순한 결론은 단지 그 시행의 독립과 종속을 판단하는 시행자체의 성격일 뿐이며 무조건적으로 추출의 형태에 따라 사건의 독립과 종속을 판단하여서는 안 된다.

위의 두 예에서 복원과 비복원 추출은 단지 사건이 속해지는 전체 표본공간을 구성하는 방법을 보여줄 뿐이다. 그 전체 표본공간에서 구성되는 두 사건은 그 사건이 포함되는 시행이 복원이냐 비복원이냐에 상관없이 얼마든지 독립이든 종속이든 가능한 형태로 구성될 수 있다. 이에 복원추출과 비복원추출은 시행이 독립인지 종속인지를 구분하는 것이지 사건의 독립과 종속을 극단적으로 결정할 수 있는 대표적인 모델로 취급되어서는 안 된다는 것을 알 수 있다. 바로 두 주사위를 던지는 시행 안에서도 얼마든지 종속인 사건의 구성이 가능한 것도 이와 같다. 두 주사위모델은 독립성의 대표적 직관모델이다. 그러나 그것은 시행끼리의 독립성에 대한 판단이었을 뿐 두 시행의 적공간 안에서 발생하는 임의의 사건의 독립성을 보장하는 못한다.

IV. 사건의 독립성에서 발생하는 그릇된 1차 직관

이 장에서는 앞에서 구분한 Fischbein의 직관의 분류에 따라 독립성에서 발생할 수 있는 1차 직관의 잘못된 예를 통해 학생들과 교사들이 일반적으로 일으키기 쉬운 혼동을 조금이나마 해소하는 데 도움을 주는 데 목적이 있다. 우정호(2000)는 직관적인 편견은 우리의 정신적인 양식에 강하게 닻을 내리고 있어 계속 활동하며 사고에 영향을 미치며 직관적 장애는 회피할 수 없기 때문에 분명한 교수학적 전략을 바탕으로 그 것을 극복해야 한다고 하였다. 적절한 교수학적 기법을 사용하여 잠재적인 갈등이 의식적이며 실제적인 것이 되도록 해야 한다는 그의 철학을 바탕으로 독립성에서의 갈등을 실제적으로 노출할 필요가 있다.

사람들은 독립성을 논하는 데 있어 흔히 자신의 경험이나 주변의 환경을 바탕으로 하는 경험적 직관에 의존하거나 일상어로서의 개념의 직관적 의미에 관련된 단정적 직관[2]에 의존하는 경향이 있다. 앞에서 논의된 긍정적 1차 직관과 2차 직관에서 벗어나 사람들이 흔히 생각할 수 있는 기초적인 직관에 의한 오해를 다루고자 한다. 간단하게 두 가지 경우에 관한 예시를 구분하였으나 실제로 둘을 구분하는 것은 매우 명확하지 않다. 경험적 직관을 언어습관이 주는 경험에서 발생하는 직관으로 한정지어 보면 일상생활 속에 언어사용에 의한 단정적 직관과 연결되기 때문이다.

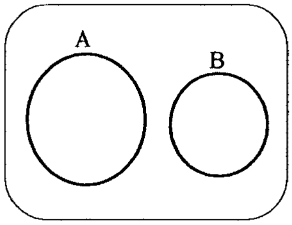
1. 분리됨, 떨어짐과 같은 일상어로의 독립의 오해(단정적 직관)

수학에서 사용되는 많은 용어들은 모두 수학적 개념을 표현하기 이전에도 일상용어로 사용

2) 단정적 직관은 확실하고 자명하고 자기모순이 없는 것으로 받아들여진 다양한 사실의 표상 또는 해석이다. 단정적 직관은 개념의 의미(예를 들어 힘, 에너지, 점, 선 등과 같은 개념의 직관적 의미), 관계성 또는 명제의 의미(예를 들어 물체의 운동을 유지시키기 위해서 힘이 필요하다), 연역적 일 수도 있고 귀납적일 수도 있는 추리의 수용(예를 들어, $A=B$, $B=C$에서 직관적으로 분명하게 $A=C$를 연역한다.)에 관련된다. 단정적 직관은 기초적(공통, 기본적)직관과 개별적 직관으로 분류될 수 있다(Fischbein, 1987). 일상어로의 오해는 단정적 직관에서도 기초적 직관으로 볼 수 있다.

되고 있는 용어이다. 그러나 유독 독립의 용어는 다른 용어에 비해 일상어로서의 개념을 떨쳐버리기가 어려운 점이 있다. 그 이유를 두 가지로 보자면 하나는 수학에서의 독립이 일상어로 해석해도 무방한 경우의 예(시행의 독립)가 존재하기 때문이며 이로 인해 많은 교수학적 변환 또한 독립을 설명할 때 그러한 예를 통해 접근하고 있기 때문이다. 초두 효과에 의해 이러한 접근은 모든 독립사건에 대한 직관을 잘못 연결시킬 수 있는 오해의 요지가 된다. 또 하나는 독립이라는 일상용어가 다른 수학적 용어가 일상용어로서 사용되는 예보다 더 많이 더 이전부터 사용되어 왔으며 그 의미 또한 포괄적이기 때문이다. 일상어로서 사용되고 있는 수학적 용어의 예로 집합, 극한(수렴, 확산), 무한(무한대, 무한소)과 같이 다양하게 존재하나 독립과 같이 일상어로서의 개념이 더욱 뚜렷하며 사용의 빈도 또한 다른 용어에 비해 더욱 높다. 이렇게 일상어로서 개념을 먼저 자리 잡은 독립의 의미가 수학적 용어로 정립되기 까지 수학의 역사에서도 많은 논란이 있어왔다. 실제 일상어로서의 개념인 독립이 가장 자연스러운 표현인 두 주사위를 굴리는 것과 같은 문제에 적용시켜 발달된 것이 공리적 확률에 의한 집합기호의 표현을 통해 정립되면서 독립의 직관에 맞지 않는 사건의 독립까지 포함시킨 결과에 대해 von Mises(1928/1952)는 Kolmogorov에 의한 공리론적 확률의 기초에 의해 통계적 독립성이 곱셈법칙으로 정의되면서 정의와 개념의 도치가 일어났으며, 이러한 새로운 정의는 직관적인 판단을 배제시키는 개념의 확장을 불러왔다는 비판[3]을 하였다.

분리됨, 떨어짐으로도 사용되는 일상어로서의 독립에 대한 오해는 "상관이 없으면 독립, 상관이 있으면 종속"의 의미를 종속사건은 상당한 공통부분을 가지고 있을 것으로 기대하는 것이다. 이런 맥락에서 '배반이면 독립'일 것이라는 잘못된 개념에 대해서도 확신을 가지고 있는 경우가 많다. 독립성의 개념에 관한 적절한 조절과 해석은 '배반이면 독립이 아니다'는 결론도 영향의 유무로 해석[4]하는 등의 억지스런 노력에도 불구하고 그러한 조정에 실패하는 여러 경우에 대한 인지적 갈등을 유발시킨다.



[그림IV-1]배반사건

$P(A\cap B)=0$이지만 $P(A)P(B)>0$이므로 두 사건은 독립이 아니다. 일부 교사용지도서에서는 '배반사건과 독립사건은 서로 다른 개념임을 주의해야 한다'로 배반과 독립을 따로 구분하도록 하며 두 사건의 독립성을 따지는 일을 의도적으로 회피하고 있다. 배반이면 독립이 아닌, 즉 배반이 형식적으로는 종속인 상황은 독립, 종속에 대한 직관을 혼란스럽게 할 수 있기 때문이다. 이는 '독립'이라는 언어가 수학적 개념이전에 일상어로서 형성된 개념의 의미가 더 많은 영향을 주고 있기 때문에 생기는 직관임을 알 수 있다. 즉, 확률에서의 독립성을 추론하는 과정은 언어적 개념에 바탕을 두 구조로 형성되고 있다. 통계적 독립의 의미를 가르칠 때 우리는 일상어로 사용하던 독립의 의미를 통해 직관을 세우도록 유도하면서도 일상어로서의 독립과 구분하도록 하는 이중적인

3) Carmen Batanero, Michel Henry, Bernard Parzysz(2005, 28p)
4) A사건은 B사건이 아니어야 하므로 B에 영향을 받으므로 종속이라고 해석하는 견해도 있음

관점을 강요하고 있다. 이는 갈등을 적극적으로 구체화시키면서도 소극적인 방어로 혼란을 불러오는 것이다.

2. 인과적 성향이 있는 두 사건에 대한 독립성의 오해(경험적 직관)

경험적 직관 또한 언어사용의 경험에 의해 한정되는 경우가 크므로 단정적 직관과 뚜렷한 구분을 하기는 어렵다. 확률의 독립성의 문제의 인식이 언어로 이루어지며 독립이라는 언어의 개념이 수학적 개념보다 먼저 닻을 내린 까닭에 사건의 인과성을 독립과 연결시키는 예또한 독립성을 오해하게 하는 큰 요인으로 자리잡는 것은 사실이다. 이와 같이 독립성을 인과적 성향이 있는 두 사건의 독립, 종속을 두 사건의 관련성을 토대로 받아들이는 것은 사건의 관련성에 대한 상식적인 통념이 엄밀한 정의에 의한 결과와 대립될 때 직관과 형식사이의 갈등을 드러낸다.

한 병원에서 흡연습관이 기관지 질환과 어떤 관계성을 가지는지를 판단하기 위해 250명의 사람들을 관찰하였다. 얻어진 결과는 다음과 같다.

<표 IV-1> 흡연과 기관지 질환

	기관지 질환 있음	기관지 질환 없음	합
흡연함	90	60	150
흡연안함	60	40	100
합	150	100	250

이 표에서 제시된 정보를 이용하여, 관찰된 사람들에게 있어서 기관지 질환은 흡연에 달린 문제라고 생각하는가?(Batanero, Estepa, Godino, Green. 1996)

흡연을 하는 사건을 A, 기관지 질환이 발생하는 사건을 B라고 하면,

$$P(A\cap B)=\frac{90}{250}=P(A)P(B)=\frac{150}{250}\times\frac{150}{250}$$ 와 같이 $P(A\cap B)=P(A)P(B)$가 성립한다.

두 사건 A와 B에 대한 수학적 관계 $P(A\cap B)=P(A)P(B)$는 사건 A와 B의 독립성을 뜻한다. 따라서 위의 예에서는 "A이거나 A가 아니거나(A^c)에 관계없이 B와 B^c의 상대적 빈도, 즉 비는 3;2(90:60 또는 60:40)으로 일정하다. 즉, A의 발생여부와 무관하게 B는 항상 3/5의 출현 확률이 있다"라고 할 수 있다. 결국 이것은 수학적 "독립성"의 의미는 언어적으로 "상관이 없음"을 보여주는 예이다. (남주현, 이영하, 324p) 그러나 '독립성'을 과연 언어적인 '상관이 없음'과 연결한 의미로 해석하는 것이 과연 옳을까?

위의 자료를 아래의 표와 같이 바꾸어 보자. 위의 자료와는 다르게 수학적 관계 $P(A\cap B)=P(A)P(B)$를 만족하지 못한다.

<표 IV-2> 흡연과 기관지 질환(변형)

	기관지 질환 있음	기관지 질환 없음	합
흡연함	90	60	150
흡연안함	59	41	100
합	149	101	250

상관이 있음 또는 없음의 표현은 두 사건의 인과적 성향에 대한 직관을 우선시하기가 쉽다. 흡연자 중 질환을 앓고 있을 확률(0.6)과 비흡연자 중 질환을 앓고 있을 확률(0.59)의 미비한 차이가 흡연이 기관지 질환에 언어적으로 '상관이 있다'는 결론을 낼 수 있을까? 위의 자료가 만약 병원에서 조사된 임상적 자료라면 이는 누가 보아도 흡연과 기관지 질환이 별로

상관이 없다고 결론내릴 것이다. 이러한 자료에서의 사건이 서로 '상관(영향)이 있다 없다'의 언어개념의 단정적 직관은 통계적 독립 종속의 개념에 어떠한 의미도 전달해서는 안 된다. 통계적 독립과 종속의 개념은 상대적 빈도의 엄밀한 비교(0.6≠059이므로 종속)일 뿐이며 상관관계나 상관도의 분석이 이루어져야 할 인과적 성향의 사건에 적용하는 것은 혼란만 야기할 뿐이다.

3. 잘못된 직관을 해결할 수 있는 방안

갈등은 또한 직관적 해석과 형식적 해석(지도에 의해 획득된) 사이에서도 나타난다. 아동에게서, 그러한 모순된 직관은 공존할 수 있다. 그러나 직관적 표상이 더 강하고 형식적 개념작용을 괴멸시키는 경향이 매우 흔하다(Fischbein, 1987).

학생들이 겪는 독립성에 관한 갈등은 교사로부터 전이되기 쉽다. 교사의 불확실한 신념은 학생들을 직관적인 해석과 형식적인 해석(지도에 의해 획득된)사이에서 많은 갈등을 유발한다.

교수학적 문제는 단정적 직관이나 경험적 직관을 완벽히 제거하는 것이 아니다. 이는 어쩌면 불가능할지도 모른다. 이러한 문제의 해결은 논리적 추론의 형식적 구조를 개발하는 것과 더불어, 가능한 한, 새롭고 적절한 직관적 해석을 개발하는 것이다. 새로운 해석을 통해 기초직관과 관련된 직관의 잘못된 형성을 막을 수 있는 여러 가지 기회를 제공하는 것이 중요하다. 다음은 그러한 관점에서 구체적인 몇 가지 방법을 제안하고자 한다.

첫째. 주어진 문제에서 확률의 값을 학생들이 자유롭게 바꾸어 독립과 종속의 변화를 스스로 만들어내면서 그 변화를 인식하게 하는 것이다.

아래의 문제 또한 종속사건을 공통부분이 많은 인과적 관계의 성향이 강한 두 사건이 이유일 것으로 잘못된 예측을 하도록 구성된 예이다(확률과 통계, 73p).

40대 이상의 우리나라 사람 중에서 55%는 과체중, 13%는 고혈압, 60%는 과체중 또는 고혈압이라고 한다. 과체중과 고혈압은 독립인가?
풀이) 과체중인 사건을 A, 고혈압인 사건을 B라고 하면

$$\begin{aligned} P(A\cap B) &= P(A)+P(B)-P(A\cup B) \\ &= 0.55+0.13-0.6=0.08 \end{aligned}$$

이 때,

$$P(A)P(B)=0.55\times 0.13=0.0715\neq P(A\cap B)$$

이므로 사건 A와 B는 독립이 아니다.

확률 값의 정확한 상대적 비에 의한 결과로 바라보지 않고 사건끼리의 관련성에 의존한 판단은 다음과 같은 잘못된 인식을 불러온다. '독립이 아니다'의 결론을 자칫 한 사건이 다른 사건에 '영향이 있다' 또는 두 사건이 '상관이 있다'는 뜻과 결부시키면서 뚱뚱한 사람이 고혈압이 많을 것이라는 상식적인 이해를 통해 확신을 갖게 된다. 그러나 과체중이면서 고혈압인 사람의 확률은 겨우 $P(A\cap B)=0.08$이며 오히려 과체중이면서 고혈압이 아닌 사람의 확률은 $P(A\cap B^c)=0.47$ 이다. 이는 통계적 독립 종속이 사건 자체의 성격에 좌우되는 것이 아니라 사건의 확률에 오로지 의존하는 것임을 알 수 있다.

학생들로 하여금 위의 문제가 독립이 되도록 확률의 값을 변화시키도록 요구한다면 다양한 방법이 나올 수 있다. 아래는 그 중에서 직접적으로 학생들에게 과체중 또는 고혈압일 확률을 변화시키도록 문제를 변형해보는 것도 좋은 방법이다.

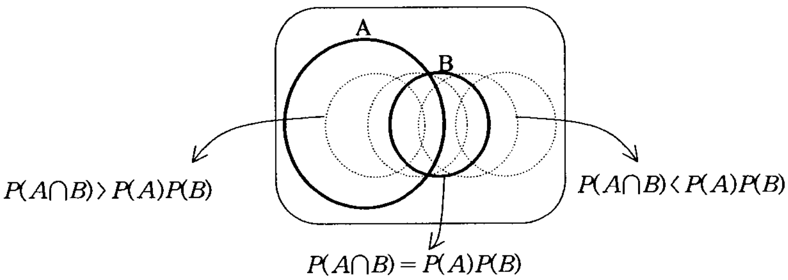
위의 문제에서 과체중 또는 고혈압일 확률이 얼마일 때 독립이 되겠는가?

학생들은 매우 간단한 계산 과정을 통해 과체중 또는 고혈압일 확률을 60%에서 60.95%로 바꾸어 독립이 될 수 있는 상황을 만들어 낼 수 있다. 이러한 과정에서 학생들은 60.95%의 값만이 독립의 상황을 만들어 내는 것임을 쉽게 파악할 수 있다. 여기에서 학생들은 독립성이 과체중과 고혈압이라는 사건의 인과성과 관련되어서는 안 된다는 것을 파악할 수 있으며, 사건의 성격이 독립과 종속을 결정하는 것이 아니라, 확률 값에 의해 민감하게 결정되는 것임을 알 수 있다.

둘째, 위의 문제와 같은 상황에서 두 사건을 벤다이어그램을 통해 시각적 표상[5]을 구상하는 것도 한 가지 좋은 방법이다. 위에서 독립이 되는 60.95%의 순간을 시각적으로 표현할 수 있다. 아래의 그림에서 실선으로 그려진 사건 B의 상태가 독립이라면 그 외의 점선으로 그려진 사건 B는 모두 종속이다. 이렇게 민감하게 정의되는 개념인 독립은 '사건A가 사건 B에 영향이 없다'의 느슨하게 잘못 적용될 수 도 있는 직관적 개념에서 오는 혼란을 막을 수 있다.

이러한 과정은 GSP의 동적 환경에서 정삼각형을 그리는 것과도 같다. 임의의 삼각형을 그린다음 세 꼭짓점 중 하나를 마우스로 움직일 때 정삼각형이 되는 점은 단 하나이며 움직이는 연속동작 중 단 한 순간에 포착되는 시점이다. 이와 비슷하게 사건에서의 독립과 종속은 두 사건의 확률 $P(A)$, $P(B)$가 결정되었을 때 $P(A \cap B)$가 한 치의 오차도 없이 $P(A)P(B)$가 되는 경우만 독립이며 그렇지 않으면 종속이다. 동적환경(GSP)에서 정삼각형을 구성하는 것이 순간적인 찰나의 개념이듯이 독립 또한 아주 작은 오차도 허용하지 않는 철저한 정의인 것임을 알 수 있다. 바로 이렇게 작은 오차도 허용하지 않는 확률 값은 사건의 인과성이나 성격이 아닌 표본공간의 크기에 민감하게 좌우된다는 것을 보여줄 수 있다.

셋째, 확률의 값이 아닌 빈도적 표현은 학생들의 확률에 대한 인식을 더욱 명확히 할 수 있다[6]. 확률은 표본공간의 크기에 대해 어떠한 정보도 주지 않지만 빈도적 표현은 그렇지 않다. 확률의 독립성이 확률의 수치에 절대적인 영향을 받는다는 것은 표본공간 크기의 중요성을 나타낸다. 이를 강조하기 위해 고혈압과 과체중 문제를 다음과 같이 단순화 시킬 수 있다.

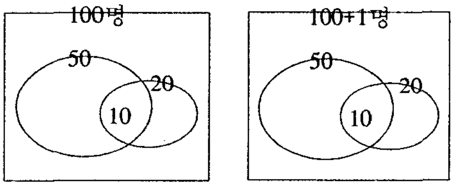


[그림IV-2] 독립의 순간

5) '두 직선은 평행하다'에서 '직선'은 대상을 나타내는 개념이고 '평행'은 상태를 나타내는 개념이다. '두 사건이 독립이다'에서 독립은 대상인 아닌 상태를 나타내는 개념이다. 상태의 개념은 평행과 같이 시각적 표상이 뚜렷한 경우 그 직관을 세우기가 쉽다.

6) Gigerenzer & Hoffrage(1995)의 관점에서 보면 사람들은 정보가 확률적 표현보다 빈도적 표현으로 나타났을 때 조건부 상황에 대한 해석을 더 잘 수행한다(Watson, 2005, p.156).

100명의 사람 중에 고혈압이 20명, 과체중이 50명, 고혈압이고 과체중인 사람이 10명이다. 이 표본공간에서의 고혈압과 과체중은 독립이다. 여기에 고혈압도 아니고 과체중도 아닌 어느 한사람을 표본공간에 포함 시켜보자. 고혈압과 과체중, 두 사건에 전혀 상관이 없는 '고혈압도 과체중도 아닌' 단 한 사람의 추가(+1)로 인한 표본공간의 증가가 '고혈압과 과체중이 영향이 있다 없다'의 결과에 엄청난 반전을 가져온다. 즉 '영향의 유무'는 고혈압과 과체중이라는 사건의 성격의 '영향' 즉, 인과적 관계를 따지는 것으로 오해하는 1차 직관이 개입되어서는 안 된다.



[그림IV-3] 독립, 종속의 차이

직관과 연결시키기 위한 형식적 해석을 통한 2차직관은 조건부 확률 개념을 사용하여 해석하는 것이다. 이때의 독립성은 전체표본에 대한 목적사건의 비(20/100)가 조건사건에 대한 목적사건(10/50)의 비와 같다는 엄밀한 정의 ($n(A \cap B)/n(B)$)에 의한 것이다. 고혈압일 확률(20/100)이 과체중인 사람 중에 고혈압일 확률(10/50)과 같다. 이는 과체중인 사람 중에 고혈압일 사람의 확률이 과체중이 아닌 사람 중에 고혈압일 사람의 확률과 같다는 뜻으로 '두 사건이 영향이 없다'는 해석으로 연결된다.

넷째, 문제 구성에서 상대적인 빈도가 동일한 것으로 두 사건이 영향이 없다는 해석이 자연스럽게 형성될 수 있는 문제의 구성을 계발하는 것이다. 이는 독립성에 대한 2차 직관을 형성하는 데 1차 직관을 배제하고자 함이다. 이러한 독립 종속의 엄밀한 성질은 이원표를 직접 만들어 보거나 종속인 상황의 문제를 독립으로 바꾸기 위한 확률의 수정을 통해서 독립성에 대한 2차 직관을 형성할 수 있다. 이러한 형식 연역적 접근을 통해 교육적 개입을 통한 2차 직관을 새롭게 세우도록 해야 한다. 교과서에서 제시되는 문제는 특히 이러한 오해가 발생하지 않도록 사건의 구성에 신중을 기해야 한다. 되도록 아래와 같이 인과적 성향이 없는 두 사건의 구성이 독립 종속의 형식적 이해에 방해가 되지 않을 것이다.

<표 IV-3> 인과적 성향이 없는 예

	A제품	B제품	합
양품	90	108	198
불량품	10	12	22
합	100	120	220

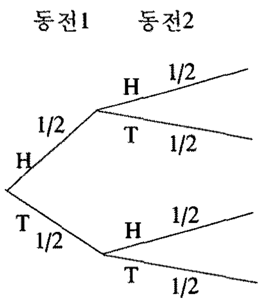
형식적 정의를 통한 형식적 직관을 세우자면 불량품일 사건의 확률은 A제품에서 나올 확률(10/100)이나 B제품에서 나올 확률(12/120)이 일치하므로 제품의 상표와 제품의 질은 독립이다. 이는 불량품이 어느 제품의 상품이냐는 것과 상관이 없다는 형식적 직관을 세울 수 있다. A제품의 불량률과 B제품의 불량률이 정확히 일치하는 경우만 독립이며 이를 벗어나는 이원표의 다른 조작은 모두 종속인 결과를 갖는다. 불량률이 서로 다른 제품은 제품의 질과 당연히 상관이 있는 종속관계를 갖는다.

다섯째, [그림III-1]의 그림과 같이 확장된 수형도를 이용하는 방법이다. 이러한 방법은 사건 A와 사건 B가 동전과 주사위에서만 구성되는 것(사고과정에서의 사건)이 아닌 동전과 주사위를 동시에 던져 만들어진 전체 표본공간의 부분집합으로서 사건(기호표현에 합당한 사건)

이 구성됨을 보여줄 수 있다. 즉, 사건에 대한 인식을 수정하기 위해 확장된 수형도를 이용하는 것은 독립성의 발생적 근원(사고)에서 형식적 구조(기호)까지의 유기적인 결합을 만들어내는 시각적 효과를 가져 올 수 있다.

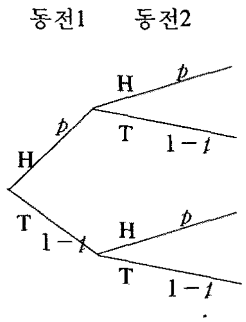
여섯째, 언어적 해석에 의한 잘못된 직관이 개입할 수 있는 문제의 구성과 그 문제의 변형을 시도하는 방법이다. 이것은 첫 번째 고혈압과 과체중 문제에서 제시한 방법과 유사할 수 있다. 그러나 두 사건을 종속관계로 판단하게 이끄는 직관에서 차이가 있다. 두 동전을 던질 때 첫 번째 동전이 앞면이 나오는 사건을 A, 두 동전이 같은 면이 나오는 사건을 B라고 하자. 두 사건은 독립인가? 직관적으로는 독립이 아니라고 판단하기가 쉽다. 왜냐하면 두 동전이 같은 면이 나오는 것은 첫 번째 동전이 어떤 면이 나오느냐에 달려있기 때문이라는 언어적 해석 적용한다면 그것이 틀리다고 할 수 없다. 그러나 수학이 직관적 개념과 수학적 모델이 항상 일치하는 것은 아니라는 것을 대표적으로 보여주고 있다. 형식적 정의에 의해 이 두 사건은 독립이다.

두 동전을 던지는 실험을 다음과 같이 변형하자. 만약 동전의 앞면이 나올 확률이 p, 뒷면이 나올 확률이 $1-p$(단, $p \neq \frac{1}{2}$)라 하자. 위의 경우와 마찬가지로 첫 번째 동전이 앞면이 나오는 사건을 A, 두 동전이 같은 면이 나오는 사건을 B라고 한다면 다음과 같은 수형도를 생각할 수 있다.



	확률	A	B	$A \cap B$
HH	1/4	√	√	√
HT	1/4	√		
TH	1/4			
TT	1/4		√	

[그림 IV-4] 두 동전의 확장된 수형도



	확률	A	B	$A \cap B$
HH	p^2	√	√	√
HT	$p(1-p)$	√		
TH	$p(1-p)$			
TT	$(1-p)^2$		√	

[그림 IV-5] 두 동전의 확장된 수형도(확률 변형)

$$P(A)=P(HH)+(HT)=p^2+p(1-p)=p$$
$$P(B)=P(HH)+(TT)$$
$$=p^2+(1-p)^2=2p^2-2p+1$$
$$P(A\cap B)=P(HH)=p^2$$

두 사건이 독립이기 위해서는

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)$$
$$p^2=p(2p^2-2p+1)$$
$$2p^3-3p^2+p=0$$
$$p(p-1)(2p-1)=0$$

이므로 $p=0, 1, 1/2$일 때 두 사건이 독립이다. 즉, 동전이 매우 공정하거나($p=1/2$) 한쪽면만 나오도록 완전히 치우친($p=0, 1$) 동전의 경우에 두 사건은 독립이다. 이는 독립성이 사건의 성격은 배제되고 확률에만 오로지 의존하고 있는 것을 보여줄 수 있는 좋은 예이다.

지금까지 그릇된 1차 직관의 많은 예는 대부분 시행의 독립성이 아닌 사건의 독립성에서 발생하는 문제들이었다. 사건의 독립성의 이해에서 발생할 수 있는 오개념을 바로잡기 위해 우리는 오히려 위험한 직관을 드러내어 지도할 필요가 있다. 단지 일상어와 다른 개념임만을 강조하는 것은 혼돈을 주기만 하며 일상어의 개념으로 인해 발생한 시행의 독립성과 그 의미가 완벽히 똑같이 적용되지 않는 사건의 독립성을 구분하여 지도하여야 할 것이다. Fischbein (1987)은 메타인지적 기법을 통하여, 학생들은 사용된 수학적 개념의 형식적 속성을 명확하게 아는 것을, 그리고 자신의 오개념 작용의 직관적 원천을 이해하는 것을 학습해야 한다고 하였다. 이러한 메타인지적 기법을 통한 학습을 위해서는 형식적인 구조를 명확히 전달할 문제의 구성에 신경 써야 하며 더불어 오개념을 불러오는 직관의 실체를 오히려 드러내어 지도할 필요가 있음을 제안한다.

V. 결 론

위에서 직관(1차 직관)으로 출발한 독립성의 개념이 곱셈정리로 표현되는 새로운 구조를 만들고 그것이 다시 다른 모습의 직관(2차 직관)을 형성하는 과정을 볼 수 있었다. 이것은 직관의 논리가 엄밀성이 강조되는 수학에서 논쟁의 여지를 남길 수 있는 개념임을 암시한다. 그럼에도 불구하고 수학은 많은 아이디어의 발생과 그 개념의 이해를 위한 접근에 있어서 직관의 힘이 없이 이루어지지 못한다. 극한이나 무한에서 발생하는 직관과는 다르게 독립성에 대한 잘못된 직관의 대부분은 언어적인 편견에 달려있다. 이러한 직관은 독립성의 중요한 생산적 아이디어의 원천이기도 하지만, 독립성을 빈번히 왜곡하거나 방해해 왔다. 이를 극복하기 위해 본 논문에서는 다음과 같은 몇 가지 결론을 내리고자 한다.

첫째, 독립성에서 발생하는 직관으로 인한 갈등을 와해하기 위해 시행의 독립과 사건의 독립을 포괄적으로 구분하기를 원한다. 시행의 독립의 포괄적 구분이란 현 교육과정에서 다루는 같은 사건의 반복인 독립시행 뿐 아니라 다른 사건(주사위와 동전)의 경우까지 포함하는 것을 말한다. 각 시행에 의존하는 사건들끼리의 독립성은 이미 1차 직관에 의해 시행의 독립으로 결정된다. 시행의 독립을 판단하는 1차 직관을 단일 시행 안에서의 사건의 독립성의 판단에 억지스럽게 적용하지 않도록 하는 것이 바람직하다. 사건의 독립성에서는 새로운 2차 직관을 형성하도록 한다.

둘째, 시행의 독립에 대한 1차 직관을 사건의 독립에 적용시키고자 할 때 발생하는 그릇된 1차 직관의 많은 예를 오히려 드러내어 가르칠 것을 제안한다. 이는 적절한 교수방법을 통해 독립성의 개념을 이해하는데 학생들이 사

용하는 직관을 매우 절제하도록 도울 것이며 이러한 노력은 직관이 형식적 사고과정을 방해하지 못하도록 직관을 통제하는 것을 포함한다. 학습된 형식적 구조를 강화하기 위해 직관을 통제함과 동시에 암묵적인 정신적 갈등을 드러내어 의식하게 하는 과정 또한 포함되어야 한다.

셋째, 사건의 독립에서 조건부확률을 이용한 2차 직관이 시행의 독립에 적용되는 1차 직관과는 차이가 있으나 집합기호의 형식에 근거하여 두 가지 직관을 한 가지 아이디어로 통합할 수 있는 증명으로 사건을 바라보는 시각이 수정되어야 함을 제시하였다. 비록 독립성의 개념이 1차 직관에 의해 출발하였더라도 독립성의 온전한 개념, 그의 모든 속성을 형식적으로 강요되어진 것에 통제되어야 한다. 이것은 새로운 교수학적 상황을 창출한다. 학생들은 형식과 정의에 절대적으로 부합하는 수학적 개념을 이해하고 사용하는 것을 학습해야 한다. 이것은 중요하지만 매우 어려운 교수학적 과제이다. 학생들은 한편으로는 독립성의 정확하고 형식적인 의미를, 다른 한편으로는 그 밑에 깔린 직관을 이해해야 하기 때문이다. 독립성의 교육과정에서 가장 근본적인 과제 중의 하나는 학생들이 직관적 느낌, 직관적 신념과 형식적으로 뒷받침되는 확신을 구별하는 능력을 개발하는 것이다. 이것이 시행의 독립과 사건의 독립을 연결하는 또는 구분하는 능력이 되며 시행의 독립이 사건의 독립을, 사건의 독립이 시행의 독립의 바탕이 되는 구조를 통합적으로 이해하는 데 필요한 능력이라 할 수 있다. 학생들이 독립성을 배울 때 일어나는 개념의 많은 혼란은 교사들의 연구의식과 도전을 통해 극복되어질 것으로 본다.

참고문헌

강행고 · 이화영 · 박진석 · 이용완 · 한경연 · 이준홍 · 이혜련 · 송미현 · 박정숙(2001). 중학교 수학 8-나. (주)중앙교육진흥연구소.

김원경 · 박석윤 · 이성덕 · 황선영 · 정상일 · 이종학(2003), **고등학교 확률과 통계**. 교육인적자원부.

김원경 · 박석윤 · 이성덕 · 황선영 · 정상일 · 이종학(2003), **고등학교 확률과 통계 교사용 지도서**. 교육인적자원부.

남주현 · 이영하(2005), 상관개념의 발달과 교수학적 중재에 관한 소고. **대한수학교육학회지 수학교육학연구 15**(3), 315-334.

우정호(1998). **학교수학의 교육적 기초**. 서울: 서울대학교 출판부.

우정호(2000). **수학 학습-지도 원리와 방법.** 서울: 서울대학교 출판부.

최상기 · 이용수 · 이만근 · 이재실 · 백한미 · 조택상(2002), **고등학교 수학I**. (주)고려출판

최상기 · 이용수 · 이만근 · 이재실 · 백한미 · 조택상(2002), **고등학교 수학I** 교사용지도서. (주)고려출판

Batanero, C., Estepa, A., Godino, J., & Green D. R. (1996). Intuitive strategies and preconceptions about association in contingency tables. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(2), pp.151-169

Batanero, C., Henry, M., Parzysz, B. (2005) The Nature of Chance and Probability, *Exploring probability in school : Challenges for Teaching and Learning* (edited by Graham A. Jones), pp.15-37.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in Science and Mathemaics. An Educational Approach,* Reidel, Dordrecht.

Kapadia, R. and Borovcnik, M. (1991). The Educational Perspective, *Chance Encounters : Probability in Education.* Kluwer Academic Publishers,

Watson, J. M. (2005). The Probabilistic Reasoning of Middle School Students. In Graham A. Jones (Eds.), *Explring Probability in School : Challenges for Teaching and Learning,* pp.145-169. Springer Science+Business Media, Inc.

Instruction of Statistical Independence Based on Intuitions Classified by Fischbein

Cho, Cha Mi (Graduate School of Chonnam National University)

Intuitions in independence formed by common language help and also hinder the establishment of new conceptual system about independence as a mathematical term. Intuitions which entail such conflicts can be a driving force in explaining independence but at the same time, it is the impedimental factor causing a misconception. The goal of this paper is to help students use the intuitions properly by distinguishing helpful intuitions and impedimental intuitions. This paper suggests that we need to reveal in teaching the misconception resulting not from mathematic but from linguistic interpretation of independence. This paper points out the need for the clear distinction of independence of trials and independence of events and gives an counterexample of the case that sampling with and without replacement shouldn't be specified as a representative example of independence and dependence of events. The analysis of intuition in this paper is based on intuitions classified by Fischbein and this paper analysed institutions applied to the concept of independence corresponding intuitions classified by Fischbein.

* key word : intuition(직관), independence of events(사건의 독립성), independence of trials(시행의 독립성)

논문접수 : 2008. 7. 31
논문수정 : 2008. 8. 28
심사완료 : 2008. 9. 4