대한수학교육학회지 <학교수학> 제 10 권 제 3 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.10, No.3, 339-355. Sep. 2008

Zoltan Dienes의 수학학습 6단계 이론의 재음미

김 수 미*

이 논문에서는 Zoltan Dienes의 수학학습을 위한 6단계 이론을 재조명해보고자 하였다. 국내에서는 Dienes가 1971년에 처음 발표한 내용이 대략적으로 알려져 있을 뿐, 구체적인 보기가 소개되지 않았다. 이 연구는 Dienes가 제시한 정수 학습의 보기를 통해 6단계 이론이 함의하는 바를 보다 구체적으로 살펴보고자 하였다. 연구 결과, 6단계 이론의 본질은 수학적 개념 형성을 위한 추상화 과정에 있으며, 그러한 과정에서 놀이나 게임은 수학적 구조의 원시적 형태라 할 수 있는 규칙성을 제공해 주며, 전 단계에 걸쳐 학습자와 수학을 연결해 주는 중요한 매개 역할을 하도록 기대된다는 점을 밝혔다. 그러나 정수의 보기를 들어 살펴본 게임에는 몇 가지 문제점이 제기되었으며, 이러한 문제점들이 극복되지 않는 한 6단계 이론이 현장에 보급될 가능성은 매우 낮은 것으로 결론 내렸다. 그럼에도 불구하고 6단계 이론이 오늘날의 교육에 시사하는 바를 마지막으로 덧붙였다.

I. 들어가기

Zoltan Dienes는 새수학 운동 시기에 활발히 활동했던 세계적으로 유명한 수학교육자다. 특히 인지심리 분야에서 Piaget, Bruner와 함께 거론될 정도로 수학교육사에서 Dienes가 차지하는 위상은 대단하다(English, 1995). 그는 당시의 다른 연구자들과 마찬가지로 수학의 구조에 관심을 가졌으며, 학생들이 수학의 구조를 발견하도록 도움을 주는 여러 가지 수학 학습 이론을 개발하였다. 또한 수학과 학생사이의 간격을 좁히기 위해 수학교구와 게임을 개발하기도 하였다.

'수학학습을 위한 6단계 이론(six stages theory of learning mathematics)'은 Dienes의 주요 연구 업적 중의 하나로서, 수학 및 수학교육에 대한 그의 아이디어가 잘 통합되어 있다. Dienes는 90이 넘은 고령임에도 불구하고, 최근까지도 저술 활동 및 홈페이지 운영을 하고 있는데, 그가 수학학습을 위한 6단계 이론에 얼마나 많은 애착을 가지고 있는지는 이들을 살펴보면 쉽게 알 수 있다. 웹상에 나타난 최근 논문으로는 2000년, 2001년, 그리고 2004년에 발표한 것이 모두 6단계 이론에 대한 것이며, 그의 홈페이지에 올린 내용 가운데 상당 부분이 6단계 이론에 대한 것이다. 이러한 정황 상, Dienes는 자신의 오랜 연구의 결실이 6단계 이론으로 정리 될 수 있다고 생각한 듯하다.

국내에서는 Dienes의 연구와 관련하여 가장 널리 알려진 것이 다진수 블록(Multibase Arithmetic Block)으로, 현재 초등학교 수학 교과서에 수 개념 및 연산 지도를 위한 모델로 사용되고 있다. 또한 그가 제시한 네 가지 수학학

* 경인교육대학교(smkim@ginue.ac.kr)

습원리(활동적 원리, 구성의 원리, 수학적 다양성의 원리, 지각적 다양성의 원리) 역시 수학교재 집필 및 수학지도를 뒷받침하는 원리로 널리 이용되고 있다. 그러나 6단계 이론은 그것에 대한 개괄적 내용이 널리 알려진 반면, 각 단계가 구체적으로 어떻게 진행되며, 그것의 수학교육적 의미나 가치는 무엇인지에 대해서는 알려진 바가 거의 없다. 특히 어떤 특정 수학 개념을 6단계에 입각하여 지도하려고 할 때, 참고할 만한 수학적 보기가 전혀 소개되어 있지 않다. 국내에서 6단계 이론에 대한 내용이 최초로 등장한 것이 「수학교육학개론」(김응태, 박한식, 우정호, 1984)이지만, 단계별로 전부 다른 수학 소재를 간략하게 제시하고 있을 뿐이다. 또한 관련 후속 연구(김정하, 2000; 이은영, 2004)에서도 그 이상의 내용을 기대할 수는 없다.

이 연구의 목적은 Diense가 제시한 '수학학습을 위한 6단계 이론'이 함의하는 바를 정수(integer)의 학습이라는 구체적인 보기와 더불어 살펴봄으로써, 이론에 대한 이해의 폭과 깊이를 확장하고자 한다. 이를 위해 이 연구에서는 Dienes의 논문 및 홈페이지에 게재된 글을 수집하였으며, 2007년 MCTM(The Montana Council of Teachers of Mathematics)에서 발행된 Dienes 특집호(The Montana Mathematics Enthusiast, Monograph 2)의 연구 내용들을 살펴보았다. 이어서 Dienes의 6단계 이론이 등장하게 된 배경, 6단계 이론의 단계별 내용, 6단계 이론의 특징 및 문제점, 교육적 함의 등이 논의된다.

II. 수학학습을 위한 6단계 이론

1. 이론의 배경 및 성격

Hirstein(2007)에 의하면, Dienes의 6단계 이론은 우리에게 익히 알려진 「Building up Mathematics(Dienes, 1971)」의 제 4판에 처음으로 제시되었다. 이 책은 1960년도에 처음 발행되었는데, 여기서 이미 다진수 블록이나 저울 등과 같은 교구에 대한 아이디어와 네 가지 수학학습 원리를 제시하고 있다. 그 이후로 1971년까지 웹에서 검색된 그의 출판물은 무려 15건에 해당될 만큼 왕성한 활동을 하였다. 따라서 1971년 출판물에 제시된 그의 6단계 이론은 하루아침에 탄생한 것이 아니라 10여년의 오랜 연구 기간을 통해 도출된 수학 학습에 대한 하나의 결론이라 볼 수 있다.

Dienes의 6단계 이론의 본질은 수학적 추상화의 과정이라 하겠다. 그는 60년대부터 개발해 온 자신의 수학학습 이론의 완결판이라 할 수 있는 원고 'Some thoughts on the Dynamics of Learning Mathematics' 를 1995년에 완성하였는데, 그 원고의 주요 내용이 추상과 관련되어 있다. 그는 추상화 과정의 보기로 수개념을 제시하면서, 어린이들이 획득하고 있는 수에 대한 초보적인 개념과 고차적인 수학을 공부한 수학자들이 가지고 있는 수에 대한 논리-철학적 구성물을 구분하였다. 그는 어린 아이들의 이해와 성숙한 수학자들의 이해 사이에는 현격한 차이가 존재하며, 이 양 극단적 이해 사이에는 많은 층(layer)이 존재하고 있다고 주장하였다. 또한 그러한 층을 여섯 단계로 구분할 것이며, 건물이 세워질 때 아래에서 위로 차례로 올라가듯이 추상화의 과정 역시 전 단계를 토대로 다음 단계가 구성되는 방식으로 진행될 것이라고 하였다. 그리하여 여섯 단계 각각에 대한 보기를 제시하였는데, 그 내용은 수학학습을 위한 6단계 이론에서 제시된 것과 완전히 일치한다. 따라서 Dienes의 6단계 이론은 결국 추상화를 위한 과정이라 볼 수 있다.

한편 Dienes는 6단계 이론에 앞서 수학적 개

념형성의 3단계 이론을 제시한 바 있다. 그는 1960년에 발행된 「Building up Mathematics」에서 자신의 학습이론의 중심이라고도 할 수 있는 개념형성의 3단계론이 Piaget의 수학적 개념발달 이론에 따른 것이라 명시하였다. 3단계 이론을 살펴보면, 먼저 1단계는 아무런 의식적인 목적도 없는 놀이와 같은 활동에 따른 자의적 반응을 하는 단계이다. 그러한 놀이는 기본적인 경험이 되며 그로부터 궁극적으로 개념이 형성된다. 제 2단계는 중간단계로서 놀이 경험의 그 어떤 구조화가 필요한 것을 이해하기 시작하여, 개념의 부분적 구성이 이루어지며, 아직 지각되지 않은 최종단계를 향한 일층 목적 지향적인 단계이다. 제 3단계는 최종적으로 개념이 형성되는 단계이다. 모든 구성부분에 대한 바른 게스탈트(Gestalt)가 파악된다(김응태 외, 1984). Dienes(1960)는 각 단계에서 활용할 수 있는 게임을 제시하였는데, 먼저 제 1단계에서는 사전준비(preliminary) 게임을, 제 2단계에서는 구조화된(structured) 게임을, 제 3단계에서는 연습(practice) 게임을 각각 제시하였다. 이상에서 고찰한 바와 같이 Dienes가 제시한 개념 형성의 3단계 이론이 개념 학습에 초점을 두었다는 점과 시기적으로 6단계보다 앞섰다는 점, 그리고 게임이라는 요소를 도입하였다는 점 등으로 볼 때, 6단계 이론을 구성하는데 이론적 배경이 되었을 것으로 추측된다.

2. 단계별 명칭 및 내용

가. 단계별 명칭

일반적인 단계 이론의 경우, 각 단계의 특성을 명확히 드러내는 명칭을 붙이기 마련이다. Dienes의 6단계 이론 역시 각 단계에 대해 명칭이 있으나, Dienes 자신조차 일관된 용어를 사용하지 않았다. Building up Mathematics (Dienes, 1971)에 처음 제시된 6단계의 명칭은 (1)자유놀이(free play), (2)게임(games), (3)공통성의 탐구(search for commonalities), (4)표현(representation), (5)상징화(symbolization), (6)형식화(formalization)이다(p.36). 그러나 Dienes의 최근 연구물을 보면 그가 여러 가지 명칭을 혼용하고 있음을 알 수 있다. 우선 1단계의 경우에는 'free play' 혹은 'free interaction'이라는 용어를 혼용하고 있으며, 2단계의 경우는 'learning to play by the rules', 'playing by the rules', 'looking for the rules'와 같이 다소 긴 용어를 상황에 따라 혼용하고 있다. 그러나 3단계부터 6단계까지는 'comparison', 'representation', 'symbolization', 'formalization'을 일관되게 사용하고 있다.

국내의 경우는 김응태 외(1984)에서 제시된 '자유놀이', '게임', '공통성의 탐구', '표현', '기호화', '형식화'의 명칭이 비교적 널리 사용되고 있다. 이것은 Dienes(1971)가 6단계 이론을 처음 제시하였을 때 붙인 명칭이다. 그러나 Dienes의 경우 수십 년간 자신의 이론을 다듬고 세련시키는 과정을 거치기 때문에, 그의 최근 연구물을 중심으로 명칭을 확립하는 것이 바람직할 것이다. 따라서 이 연구에서는 용어의 간단성을 아울러 고려하여, 1단계는 '자유놀이', 2단계는 이와 대응되는 것으로 '규칙놀이', 3단계는 '비교', 4단계는 '표현', 5단계는 '기호화', 6단계는 '형식화'의 명칭을 사용하기로 하겠다(<표 II-1>).

나. 단계별 내용 및 보기

1) 제 1단계 : 자유놀이

이 시기는 Dienes가 주장하는 학습 싸이클(learning cycle)이 새로이 시작되는 단계로, 아동들은 퍼즐, 쌓기나무, 패턴블록 등과 같은 구

조적인 자료를 자유롭게 다루면서, 이들 자료의 주요 특징을 발견하게 된다. 그러나 구조적인 자료를 다루는 아동의 행위마저 구조적인 것은 아니다. 그들은 대상을 이리 저리 자유롭게 다루면서 소위 '시행착오적' 접근을 하게 된다. Dienes(2008)는 제 1단계에 대해 다음과 같이 기술하고 있다.

> 대부분의 사람들은 자신이 다룰 수 없는 상황에 직면하게 되면 흔히 "시행착오"라 불리는 활동에 참여하게 된다. 그들이 하는 것은 그들 앞에 놓인 상황과 자유롭게 상호작용하는 것이다. 퍼즐을 풀 때, 대부분의 사람들은 그 상황에서의 어떤 규칙성이 나타날 때까지 그저 이것저것 해보며, 그 이후 더 체계적인 문제해결 행위가 가능하게 된다. 이 단계가 자유놀이(free play)이며, 학습의 출발점이 되어야 한다. 이는 학습자로 하여금 자신에게 놓여있는 상황에 친밀해 지도록 하는 방법이 될 것이다.

인용문에서도 알 수 있듯이, 이 단계의 핵심어는 '자유' '시행착오' '상호작용' '상황에 친밀' 등이 될 것이다. 즉 자유로운 분위기에서 학습자가 주어진 상황에 친밀함을 느끼는 것으로 충분할 것으로 생각된다. 어떤 의미에서는 동기유발 단계라고 볼 수도 있으며, 때로는 생략도 가능하다. Dienes(2000)가 제시한 정수(integer) 학습의 보기를 참고하면, 정수 학습에 필요한 많은 것들이 학습자들에 의해 이미 경험되어졌다고 기술하고 있다. 어린이들은 아주 일찍 두 개의 대상을 비교하면서, 더 많다거나 더 적다거나 혹은 같다는 판단을 한 경험을 가지고 있는데, 실제로 이것들은 정수와 관련된 경험이라는 것이다. 따라서 제 1단계는 학습 소재에 따라 생략될 수도 있음을 알 수 있으며, 반드시 교구가 활용되어야 하는 것도 아님도 알 수 있다.

2) 제 2단계 : 규칙놀이

이 시기는 전 단계와 마찬가지로 놀이의 성격이 강하다. 그러나 전 단계와 달리 아동들에게 제시되는 놀이는 규칙을 가지며, 아동들은 이를 이용해 놀이하는 방법을 학습해야 한다. 때로는 전 단계의 자유로운 놀이에서 규칙성을 발견하여, 학습자 스스로 놀이를 만들 수도 있다. 또한 놀이를 어느 정도 경험 한 후에는, 규칙을 일부 변형하거나 확장하여 새로운 놀이를 만들 수도 있다. 그러나 교육자가 지도하고자 하는 수학적 내용이 있다면, 그것에 근거한 놀이를 개발하는 것은 전적으로 교육자의 몫이라 하겠다. Dienes(2008)는 이 단계에 대해 다음과 같이 기술하고 있다.

<표 II-1> 6단계의 단계별 명칭

단계	Dienes(2008)	Dienes(2000)	Dienes(2001)	Dienes(1971)	본 연구
1	Free Play	Free interaction	Free interaction	Free Play	자유놀이
2	Learning to play by the rules	Playing by the rules	looking for the rules	Games	규칙놀이
3	comparison	comparison	comparison	search for commonalities	비교
4	representation	representation	representation	representation	표현
5	symbolization	symbolization	symbolization	symbolization	기호화
6	formalization	formalization	formalization	formalization	형식화

자유로운 탐구활동 이후, 어떤 상황에서 규칙성이 나타나게 되는데, 이것은 "게임의 규칙"으로 이용될 수 있다. 규칙이라는 수단에 의해 게임에 재미있는 활동을 부여할 수 있다는 것을 깨닫게 되면, "게임"을 만드는데 요구되는 규칙을 발명함에 있어 작은 진전을 이룩한 셈이 된다. 모든 게임은 어떤 규칙을 가지고 있으며, 게임의 출발 상태로부터 종료상태까지 진행하기 위해서는 그 규칙들은 계속 관찰되어야 하며, 게임과정에서 만족되는 조건에 의해 규칙이 확정된다. 교육자들이 학습자가 학습하기를 바라는 수학의 내용에 기반을 둔 규칙을 가진 게임을 발명하는 것은 매우 유용한 교육적 "전략(trick)"이 될 것이다. 이것은 이 단계의 학습에서 핵심적인 측면이 될 수 있으며, 또한 그렇게 되어야 한다. 우리는 이 단계의 학습을 전단계의 자유학습과 반대 의미로, 규칙에 의한 놀이라고 부를 수 있다.

인용문을 보면, 이 단계의 핵심어는 '규칙성'임을 알 수 있다. 이 규칙성은 교육자들이 학습자가 경험하거나 발견하기를 바라는 '구조(structure)'의 원시적 형태라 할 수 있다. 따라서 구조의 학습을 강조하는 Dienes의 교육관에 입각해 보면, 단계 이론에서 '규칙성'은 매우 중요한 개념이라 할 수 있다. 뿐만 아니라 이 규칙성은 학습자에 의해 추상되어야 하므로, 가급적 여러 가지 다양한 모습으로 제시될 필요가 있다. 왜냐하면 학습자는 자신이 경험한 여러 가지 게임에서 비본질 요소를 걷어 내고, 그들 간의 공통성을 추상해 내야 하기 때문이다. 이것은 Dienes의 '지각적 다양성의 원리'와 '수학적 다양성의 원리'를 떠올리게 하는 대목이다. English(1995) 역시 '규칙놀이' 단계를 설명하면서, 이 단계가 지각적 · 수학적 다양성의 원리에 입각해서 설계되어야 함을 강조하고 있다.

Dienes(2000)는 정수 지도를 위해 세 가지 게임(댄스클럽 게임, 걷기 게임, 원과 정사각형 게임)을 제시하였는데, 모두 두 양의 비교를 통해 '보다 많은', '보다 적은' '~와 같은'의 개념을 다루도록 설계되어 있다. 그러나 여기에서는 지면 관계 상, 두 가지 게임(댄스클럽 게임, 걷기 게임)만 간단히 소개하기로 한다.

<댄스클럽(dance club) 게임>

댄스클럽에서 지켜야할 규칙은 다음과 같다.

(a) 클럽에 들어가고 나갈 때는 반드시 휴게실을 거쳐야 한다.
(b) 외부에서 휴게실로 들어갈 때, 휴게실에 사람이 있으면 반드시 이성의 파트너를 선택해야 한다. 휴게실에 사람이 없으면, 다른 사람이 나타날 때까지 휴게실에서 대기해야 한다.
(c) 춤은 반드시 이성과 추어야 한다.
(d) 춤을 출 이성이 있다면, 그리고 음악이 흐르는 동안은 모든 사람들은 반드시 춤을 추어야 한다.

이제 다음과 같은 몇 가지 문제를 제시한다.

(문제1) 휴게실에 소년 1명과 소녀 3명이 있다. (물론 소년 1명과 소녀 1명은 금방 댄스 홀로 들어갈 것이다.) 이어 소년 2명과 소녀 1명이 외부에서 휴게실로 들어왔다. 소년과 소녀들이 짝을 맞추어 댄스홀에 들어가고 나면 휴게실에 남게 되는 사람은 누구인가?

(문제2) 휴게실에 소년 5명과 소녀 2명이 있다. (물론 소년 2명과 소녀 2명은 금방 댄스홀로 들어갈 것이다.) 그런데 갑자기 소녀 3명이 집으로 불려갔다. 휴게실에 남게 되는 사람은 누구인가?

댄스 클럽 매니저에게 아들과 딸이 많다. 그는 휴게실에 있는 사람들이 인기가 없으면, 자신의 자녀들을 시켜 휴게실에 있는 사람들을 교체하게 한다. 만약 자녀 중의 한 명이 휴게실의 창문을 두드리면 그 안에 있는 모든 사람들은 떠나야 한다. 뿐만 아니라 다음과 같은 규칙을 지켜야 한다.

(e) 두드리는 아이가 남자이면, 휴게실에 있는 사람은 떠나면서 자신과 같은 성의 사람을 대신 보내야 한다.
(f) 두드리는 아이가 여자이면, 휴게실에 있는 사람은 떠나면서 자신과 다른 성의 사람을 대신 보내야 한다.
(g) 만약 동시에 여러 명이 두드리면, 휴게실에 있는 각 사람은 떠나면서 두드리는 사람의 수만큼 사람을 대신 보내야 한다.

(문제 3) 휴게실에 소녀 3명이 있다. 매니저가 딸 2명을 보내 휴게실의 창문을 두드리게 하면, 교체되어 휴게실에 대기하게 되는 사람은 누구인가?

<동쪽으로 걷기와 서쪽으로 걷기(walking east and walking west) 게임>

조니는 도로를 왕복으로 오가며 운동을 한다. 도로는 동서로 뻗어있고, 동쪽으로 얼마만큼 간 다음 다시 서쪽으로 가는 식으로 지칠 때까지 운동을 한다. 그리고 더 이상 갈 수 없을 때 아버지를 불러 차를 타고 집으로 돌아간다. 그는 출발점을 기준으로 동쪽에서 혹은 서쪽에서 운동을 마칠 때도 있고, 때로는 출발점에서 마치는 때도 있다.

(문제 1) 조니는 동쪽으로 1㎞, 서쪽으로 3㎞ 간 후 휴식을 취했다. 그는 조금 더 걸을 수 있다고 생각했고, 그래서 동쪽으로 2㎞, 서쪽으로 1㎞ 다시 갔다. 그는 출발점으로부터 어느 방향으로 얼마만큼 떨어져 있나?
(문제 2) 조니가 동쪽으로 10㎞ 가는 대신 동쪽으로 3㎞ 덜 갔다면, 그리고 서쪽으로 7㎞ 가는 대신 서쪽으로 2㎞ 덜 갔다면, 출발점으로부터 어느 방향으로 얼마만큼 떨어져 있나?

이번에는 조니가 동생 메리와 함께 정원을 산책하기로 했다. 나가기 전 주사위를 던졌는데, 주사위는 3면이 붉은 색으로 숫자 1, 2, 3이 적혀있고, 나머지 3면은 푸른색으로 숫자 1, 2, 3이 적혀있다. 메리는 조니가 한 걸음 걸을 때마다 주사위에 나온 눈의 수만큼 걷기로 했다. 만약 푸른색이 나오면 메리는 조니와 같은 방향으로, 붉은 색이 나오면 조니와 반대방향으로 걷기로 했다. 그들은 동쪽에서 서쪽 방향으로 뻗은 작은 오솔길을 걸었다.

(문제 3) 조니는 동쪽으로 3, 서쪽으로 5, 동쪽으로 6걸었다. 주사위는 붉은 색 2였다. 메리는 어떤 방향으로 얼마를 걸었는가, 그리고 출발점에서 어떤 위치에 있는가?

3) 제 3단계 : 비교

이 시기는 전 단계에서 경험했던 몇 가지 게임들을 비교하고, 거기서 드러나는 공통성을 추상하게 된다. 이에 대해 Dienes(2000)는 '추상으로 향하는 불완전한 첫 진전'이라고 기술하고 있다. 그가(2008) 이 단계에 대해 구체적으로 언급한 내용을 살펴보면 다음과 같다.

우리가 아이들에게 여러 가지 수학 게임을 하도록 하면, 게임자체에 대해 토론하거나 게임과 게임을 비교하는 순간이 오게 된다. 유사한 규칙 구조를 가지고 있는, 그러나 다른 소재로 만들어진 몇 개의 게임을 지도하는 것은 유익하다. 왜냐하면 외양이 다른 게임들 사이의 공통적인 속성이 명백해지고, 비록 게임을 하는데 필요한 요소들이 전적으로 다르다 해도, 후에 구조적으로 유사한 게임들이 공통적으로 가지는 수학적 내용이 인식될 수 있기 때문이다. 어떤 면에서는 같은 구조를 가진 게임들 사이에, 한 게임의 각 요소와 각 연산에 대해 다른 게임에서의 특정한 요소와 연산이 대응하는 식으로 "목록(dictionaries)"을 만드는 것이 바람직할 수 있다. 이것은 학습자로 하여금 게임을 하는데 사용된 외적인 자료가 각 자료에 내재된 규칙 구조 보다는 덜 중요하다는 사실을 깨닫도록 할 것이다. 물리적 "놀이감(playthings)"이 점차 "소음"이 되겠지만, 같은 규칙 구조로 된 게임들의 공통적인 어떤 것을 깨닫게 될 것이며, 학습자들은 추상으로 향하는 불완전한 첫 진전을 이룩하게 될 것이다. 이 단계는 비교 단계로 부를 수 있다.

인용문에서도 알 수 있듯이, 이 단계는 전 단계에서 경험한 게임들에 대한 공통 구조를 파악하는 시기이다. 따라서 가급적 구조가 명확하게 보이는 여러 개의 게임을 한 자리에서 해 보는 것이 도움이 될 것이다. 그러나 '추상'은 높은 수준의 사고 활동이므로, 학습자가 자신들이 경험한 게임들의 공통 구조를 완벽하게 찾아내기를 기대하는 것은 무리일 것이다. 사실, Dienes가 생각했던 것도 그와 같은 고차적인 형태의 완벽한 추상은 아님은 명백하다. Dienes(2000)가 비교 단계에서 제시한 목록은, 그가 원했던 이 단계에서의 추상의 수준을 가늠하는 데 도움이 될 것이다(<표 II-2>).

<표 II-2>를 보면, 댄스게임에서 소년과 소녀, 그리고 걷기 게임에서 동쪽으로 간 걸음과 서쪽으로 간 걸음은 각각 비교해야할 양이 된다. 예를 들어 소년을 기준으로 보았을 때, 소년이 소녀 '보다 많으면' 양의 정수에, 소년이 소녀 '보다 적으면' 음의 정수에 대응된다. 또한 동쪽으로 간 걸음 수를 기준으로 보았을 때, 동쪽으로 간 걸음 수가 서쪽으로 간 걸음 수 '보다 많으면' 양의 정수에, 동쪽으로 간 걸음 수가 서쪽으로 간 걸음 수 '보다 적으면' 음의 정수에 각각 대응한다. 즉 댄스 게임에서 소년과 소녀의 수를 비교하기 위해 일대일 대응을 시켰을 때, 일대일 대응이 되고(클럽에 있는 사람들) 남은 사람이 없으면 영(zero)이며, 남은 사람이 소년이면 양의 정수가, 소녀이면 음의 정수가 되는 셈이다. 결국 두 게임에서 중요한 공통 성질은 '보다 많음(moreness)'과 '보다 적음(lessness)'이며, 이는 궁극적으로 양의 정수와 음의 정수에 해당되는 개념이다.

목록에서 제시된 항목들이 학습자들이 게임을 하며 경험한 상황과 관련된 것이라 해도, 그 모든 항목들을 아동 스스로 발견하기는 어렵다. 게임이 복잡하거나, 게임에 내재한 수학의 내용이 난해한 경우, 교육자들이 찾기를 바라는 모든 항목을 아동 스스로 발견할 가능성은 낮아지게 된다. 따라서 그러한 경우는 교사의 적절한 안내가 요구된다.

4) 제 4단계 : 표현

이 단계는 전 단계에서 추출한 공통성을 표나 다이어그램, 도해 등의 시각적인 형태로 표현하는 시기이다. 이것의 목적은 전 단계에서 수집된 공통적인 본질을 학습자의 마음속에 정착시키기 위한 것으로, Dienes(2008)는 이 단계에 대해 다음과 같이 기술하고 있다.

> 여러 가지 게임의 추상적 내용을 발견하고, 여러 활동의 공통적인 본질로서 수집된 것을 표

<표 II-2> 댄스 게임과 걷기 게임의 비교

댄스 게임	걷기 게임
소년, 소녀	동쪽으로 간 걸음, 서쪽으로 간 걸음
클럽에 있는 사람들	동쪽 혹은/그리고 서쪽으로 간 걸음
휴게실에 소년들만 있음	서쪽 보다 동쪽으로 더 많이 간 걸음
휴게실에 소년들만 있음	서쪽 보다 동쪽으로 더 적게 간 걸음
휴게실에 도착한 사람들	한 걸음 가고 또 한 걸음 감
클럽을 떠나는 사람들	일부를 빼고 현재까지 간 걸음
n명의 소년들이 창문을 두들김	빨간 주사위 눈의 수보다 초록 주사위의 눈의 수가 n개 더 많음
n명의 소녀들이 창문을 두들김	빨간 주사위 눈의 수보다 초록 주사위의 눈의 수가 n개 더 적음

현하기 위한 수단으로서 일종의 영상(picture)을 실제로 필요로 하는 때가 온다. 이 단계는 학습자의 마음속에 공통적인 본질이 무엇인지를 안착 시키는데 도움이 되는 화살표 다이어그램, 표, 좌표 시스템 등과 같은 회화적 표현을 제시하는 때이다. 추상은 사건이나 사물로 이루어진 실세계에서는 존재하지 않기 때문에 시각적으로 보기를 희망할 수는 없다. 그러나 여러 가지 게임 활동을 통해 추출한 혹은 추상한 엣센스의 스냅 사진을 아주 간결한 방식으로 학습자에게 제공할 수 있는 표현을 발명할 수 있다. 학습된 각 게임이 하나의 표현에 "대응 될(mapped)" 수 있으며, 게임의 공통성을 드러낼 것이다. 이 단계는 표현단계로 부를 수 있다.

인용문에 의하면, 표현은 학습자의 마음속에 자신이 느낀 어떤 공통성을 나타내고자 하는 욕구가 발생 할 때 제시되어야 한다. 그러나 본질적으로 수학적 개념은 고도의 추상적 활동의 결과로서 눈에 보이는 것이 아니기 때문에 완전하게 시각화할 수는 없다. 이에 대해 Dienes는 '추상한 엣센스의 스냅 사진' 정도로 간결한 형태의 것을 학습자를 위해 발명할 것을 제안하고 있다. 그가 댄스 게임과 걷기 게임 등 정수 학습을 위해 제안한 표현을 참고하면 [그림 II-1]과 같다.

그림에서 콤마(,)를 사이에 둔 두 수는 우리가 센 원소와 관련이 된다. 예를 들어 (3, 4)는 첫 번째 것 보다 두 번째 것이 1 많다는 것을 의미한다. 두 수의 차이가 같은 짝(pair)은 같은 열(column)에 놓는다. 첫째 줄은 각 열의 머리로서, 그 열이 '보다 적은' 상황이면, 마이너스(-)를, '보다 많은' 상황이면, 플러스(+) 기호를 붙인다. '와 같은' 상황은 0으로 나타낸다. 이런 식으로 수직선을 만들면 '보다 많은' 상황과 '보다 적은' 상황이 순서대로 나열된다. 이 때 수직선 위의 각 점은 단지 하나의 상황만을 대표하는 것이 아니라 무수히 많은 상황을 대표함을 알 수 있다. 댄스 게임을 예로 들면, 소년이 3명, 소녀가 5명인 것이나 소년이 4명 소녀가 6명인 것은 모두 소년이 소녀 보다 2 적은 상황이므로, -2로 표현될 수 있음을 알 수 있다. 이처럼 외양이 다른 행위나 상황을 동일한 표현으로 똑같이 나타낼 수 있다는 점은 개념학습에서 매우 중요한 의미를 가진다. 왜냐하면 여기서의 동일한 표현이란 게임이 가지는 공통성, 즉 추상된 본질을 의미하기 때문이다. 따라서 Dienes가 비교 단계를 '추상으로 향하는 불완전한 첫 진전'이라 지칭하였다면, 이 단계는 추상의 싹을 정착시키는 단계라 할 수 있을 것이다. 이와 관련하여 김응태 외(1984)의 글을 참고하면 다음과 같다.

-9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 +1 +2 +3 +4 +5 +6 +7 +8 +9

9,0 8,1 7,2 6,3 5,4 4,5 3,6 2,7 1,8 0,9

8,0 7,1 6,2 5,3 4,4 3,5 2,6 1,7 0,8

7,0 6,1 5,2 4,3 3,4 2,5 1,6 0,7

6,0 5,1 4,2 3,3 2,4 1,5 0,6

5,0 4,1 3,2 2,3 1,4 0,5

4,0 3,1 2,2 1,3 0,4

3,0 2,1 1,2 0,3

2,0 1,1 0,2

1,0 0,1

0,0

[그림 II-1] 정수도입을 위한 표현

이러한 추상의 싹을 아동들에게 정착시키는 데 어떤 도움을 주어야 할 것인가? 아동들은 추상한 것을 걸어 둘 못을 필요로 한다. 이러한 못에 해당하는 것은 무엇인가? 그것은 표현이다.

마지막으로, 앞서 제시된 수직선 위에서 출발점으로부터 왼쪽으로 혹은 오른쪽으로 이동하는 행위가 정수의 덧셈과 뺄셈에 대응되며, 0과 출발점 사이의 거리를 같은 쪽으로 혹은 반대쪽으로 이동하는 행위가 정수의 곱셈에 대응됨을 알 수 있다. 다음 단계에서는 이러한 다양한 활동을 통해 학습자들은 '보다 적다'와 '보다 많다'는 반대편에 있으며, '빼는 행위'는 '반대편의 수를 더하는 행위'와 결과적으로 같게 된다는 것 등 정수의 연산 관련된 많은 성질들을 발견하거나 안내를 받게 될 것이다.

5) 제 5단계 : 기호화

이 시기는 전 단계에서 개발한 표현에 근거해, 게임들 간의 공통적인 성질을 탐구하게 된다. 표현이 구조를 잘 드러낼수록 성질의 탐구는 용이해 지므로, 전 단계에서 제시된 표현의 형태는 이 단계에 영향을 미칠 수 있다. 성질이 탐구되는 과정에서 혹은 성질이 탐구된 이후, 그것을 표현할 언어의 필요가 생기고, 학습자들은 나름대로의 언어 시스템을 개발하게 된다. Dienes(2008)는 이 단계에 대해 다음과 같이 기술하고 있다.

이제 표현(representation)이나 도해(map)를 연구하거나 모든 게임이 응당 가져야할 성질들을 수집하는 것이 가능해 진다. 예를 들어 어떤 연산 시리즈가 다른 연산 시리즈와 같은 결과를 도출해 내는지가 검토될 수 있다. 그리고 나면 "발견"으로 이끈 동일한 표현을 가진 게임을 하나 혹은 그 이상 다시 해보면서 "발견"을 검토할 수 있다. 도해의 성질을 묘사하기 위해 초보적인 언어가 개발될 수 있다. 그러한 언어는 수학자들이 관습적으로 사용해 온 관습적인 상징 언어와 흡사할 수도 있다. 혹은 아주 새롭거나 전혀 다른 상징 시스템을 자유롭게 발명할 수 있다. 기호를 학습하면서 자료가 수집되고, 이제 어떤 식으로든 하나의 기호 시스템이 개발되어, 이미 학습된 시스템의 성질을 묘사하는 데 이용될 수 있다. 이 단계는 기호화 단계로 부를 수 있다.

Dienes가 '표현' 단계에서는 표현을 '제시해 주다'로 기술한 반면, '기호화' 단계에서는 언어나 기호가 '개발될 수 있다'. 혹은 '발명할 수 있다'로 기술한 것을 주목해 볼 필요가 있다. Dienes가 기본적으로 아동의 구성적 활동을 강조하고는 있으나, 6단계 이론에서 각 단계는 순수하게 학생들의 발견이나 발명에만 의존할 수는 없음을 알 수 있다. 학습자의 수준이나 성향 혹은 다루는 개념의 난이도 등에 따라 부분적으로 혹은 전반적으로 교사가 개입할 수밖에 없는 상황이 있을 것이다. 그럼에도 불구하고, '기호화' 단계에서 기호의 발명에 대해 수동형을 쓰지 않고 능동형을 쓴 것은 이 부분만큼은 학습자들의 구성을 강조한 것으로 생각된다. English(1995) 역시 이 단계를 어린이들이 자신의 기호를 비형식적으로 개발하는 시기라고 규정하고 있다. 그러나 김응태 외(1984)의 지적과 같이 어린이들이 자기 나름대로의 기호 체계를 발명하는 것은 좋으나, 어느 시점에 이르면 관습적으로 사용되고 있는 수학의 언어로 이끄는 것이 필요할 것이다. 물론 이것은 교사의 몫임은 자명하다.

Dienes가 정수 학습과 관련하여 기호화 단계에서 다룰 수 있는 성질 및 기호화의 보기는 다음과 같다.

x+y=y+x 또는 Sxy=Syx (Sxy는 x와 y의 합(sum)을 의미한다)

0+x=x 또는 S0x=x
(x+y)+z=x+(y+z) 또는 SSxyz=SxSyz
x*y=y*x 또는 Pxy=Pyx
(Pxy는 x와 y의 곱(product)을 의미한다)
1*x=x 또는 P1x=x
(x*y)*z=x*(y*z) 또는 PPxyz=PxPyz
(x+y)*z=(x*z)+(y*z) 또는 PSxyz=SPxzPyz
x*(y+z)=(x*y)+(x*z) 또는 PxSyz=SPxyPxz
NNx=x for any integer x (Nx는 x의 덧셈에 대한 역수)
SxNx=0 for any integer x
NSxy=SNxNy for any two integers x and y
NPxy=PNxy for any two integers x and y
P2x=Sxx, P3x=SSxxx, PNxNy=Pxy

위 보기는 교환법칙, 결합법칙, 배분법칙, 항등원, 역원에 대한 성질 등 새수학 운동 시기에 수학자들이 강조한 연산 법칙으로 구성되어 있다. Dienes는 수직선에서 찾아 낼 수 있는 이와 같은 성질은 무한하다고 강조하면서, 이러한 성질들에 대해 질서를 부여하는 과정이 다음 단계인 상징화 단계라고 기술하고 있다.

6) 제 6단계 : 형식화

이 시기는 전 단계에서 발견한 성질들을 정리하게 되는데, 이 성질들 가운데는 다른 성질들에 의해 유도되는 것이 있다. 따라서 다른 성질들에 의해 유도되지 않는 최소한의 성질들을 규명하고, 이들을 공리(Axiom)로 규정하게 된다. 또한 이로부터 다른 성질에 도달하는 방법을 '증명(proof)'이라 하고, 증명에 의해 도달된 성질을 '정리(theorem)'라고 한다. Dienes (2008)는 이 단계에 대해 다음과 같이 기술하고 있다.

> 상징화 단계의 묘사(descriptions)가 매우 길어지고 때로는 장황할 수 있다. 그러한 혼란스런 묘사에 어떤 질서를 부여하는 것이 필요해지는 때가 오게 된다. 이 시기는 "연역"에 이용될 수 있는 명확한 규칙을 결정하고, 도해의 다른 성질을 연역하는 방법을 부가하면서, 이것으로 초기의 몇 개의 묘사면 충분하다는 것을 제안하는 때이다. 그러한 경우, 초기 몇 개의 묘사가 공리에 해당하며, 그 이후 연역한 성질이 정리가 되며, 초기 공리에서 정리로 나아가는 방법이 증명이라는 것을 깨닫기 위한 최초의 진전을 이룩하게 된다. 이 단계는 형식화 단계로 부를 수 있다.

인용문에서 지적하듯이, 상징화 단계의 묘사, 즉 탐구된 성질이 너무 길거나 장황할 수 있다. 이러한 때에 그러한 성질들이 어느 성질로부터 도출되는지를 검토해 보고, 다른 성질들을 도출해 내는 최소한의 기본 성질들을 추려내게 된다. 이것이 소위 공리라고 부르는 것이지만, 김응태 외(1984)의 지적에서와 같이 기술된 성질 가운데에서 어떤 것이 기본적인 것인가를 선택하는 것은 어느 정도는 임의적이다.

Dienes는 마지막 단계인 상징화 단계의 보기를 제시할 때에도 게임이라는 용어를 사용하였다. 그가 연역적 과정을 일종의 게임으로 본 것은 아마도 그것이 일정한 규칙에 의해 출발상태에서 최종상태로 도달하기 때문일 것이다. 여기서는 그가 제시한 첫 번째 게임과 두 번째 게임의 보기만 제시하기로 한다. 전자는 다항식을 의미하는 WFF(well formed formulas)의 정의에 관한 것이며, 후자는 x^2+2x+1에서 $(x+1)^2$으로 나아가는 연역 과정에 관한 것이다.

게임 1

WFF는 다음과 같이 정의한다.
① 어떤 소문자 혹은 숫자 그 자체가 하나의 WFF이다.
② N 뒤에 WFF가 오면 그 자체로 하나의 WFF이다.
③ P 뒤에 두 개의 WFF가 오면 그 전체는 WFF이다.

④ S 뒤에 두 개의 WFF가 오면 그 전체는 WFF이다.

양수는 간단히 1, 2, 3, …이라 나타내며, 음수는 N1, N2, N3, …이라 나타내기로 한다. 이것에 의하면 다음과 같은 것들이 WFF의 보기이다.

3, Nx, P34, S4N3, PxSyNz, PP234, P2P34

게임 2

다음은 기호화 단계에서 수직선상의 점들로부터 도출된 성질들을 게임의 규칙들로 삼는다.

(1) P1x=x, (2) Pxy=Pyx, (3) PPxyz=PxPyz
(4) S0x=x, (5) Sxy=Syx, (6) SSxyz=SxSyz
(7) PSxyz=SPxzPyz, (8) PxSyz=SPxyPxz

이 8개의 규칙을 이용해 SSPxxP2x1(x^2+2x+1)에서 PSx1Sx1($(x+1)^2$)로 나아가는 과정은 다음과 같다.

SSPxxP2x1에서 출발해서, 2=S11을 적용하면
SSPxxPS11x1이 된다. 여기에 규칙 (7)을 적용하면
SSPxxSP1xP1x1이 된다. 여기에 규칙 (1)을 적용하면
SSPxxSxx1이 된다. 여기에 규칙 (6)을 적용하면
SSSPxxxx1이 된다. 여기에 규칙 (1)을 다시 적용하면
SSSPxxPx1x1이 된다. 이제 규칙 (8)을 적용하면
SSPxSx1x1이 된다. 여기에 규칙 (5)를 적용하면
SSxPxSx11이 된다. 여기에 규칙 (6)을 다시 적용하면
SxSPxSx11이 된다. 다시 규칙 (5)를 적용하면
SxS1PxSx1이 된다. 여기에 다시 규칙 (6)을 적용하면
SSx1PxSx1이 된다. 그리고 규칙 (1)을 적용하면
SP1Sx1PxSx1이 된다. 그리고 규칙 (7)에 의해
PS1xSx1이 된다. 그리고 마지막으로 규칙 (5)에 의해
PSx1Sx1이 나옴으로써, 우리가 바라던 결과를 얻게 된다.

이제 규칙 중 다른 것으로부터 도출될 수 있는 것이 무엇인지 보자. 예를 들어, 규칙 (1)과 (7)을 이용하면 규칙 (8)을 얻을 수 있다. 따라서 규칙 (8)은 다른 규칙과 독립이 아니다. 이와 같은 식으로 다른 것들로부터 도출되거나 혹은 종속적인 규칙들이 더 있는지 찾아 볼 수 있으며, 최종적으로 다른 규칙들로부터 독립적인 규칙들을 모아서 공리로 규정할 수 있게 된다.

보기에 제시된 게임은 우리가 전적으로 형식적 방법에 의존할 때, 상황이 얼마나 복잡해지는지를 보여준다. 특히 게임 2에서, SSPxxP2x1은 PSx1Sx1로 나아가는데 무려 13개의 단계를 거쳐야 한다. 물론 Dienes가 원했던 것은 이처럼 엄밀한 형태의 대수 교육은 아니었다. 그러나 그는 이러한 형식적 과정을 통해 학습자들이 수학의 과정에서 얼마나 많은 것들이 당연시 되는지에 대해 자각할 수 있을 것이라 생각하였다. 따라서 그는 우리가 형식적이기를 원한다면 진정으로 형식적이어야 한다고 주장하면서, 하나의 표현에서 동치인 다른 표현으로 이동하는 모든 형식적인 단계에 대해 자각하도록 할 것을 제안하였다.

III. 수학학습 6단계 이론의 특징 및 문제점

이 장에서는 전 장에서 고찰한 내용을 바탕으로, Dienes가 제시한 수학학습 6단계 이론의 몇 가지 특징 및 문제점을 기술하여 보기로 한다. 먼저 6단계 이론의 특징은 다음과 같다.

첫째, 수학적 개념의 추상화 과정을 이끄는 지도-학습 이론이다. 추상화는 Dienes가 가장 관심을 가졌던 수학적 활동의 하나로, 6단계 전 과정은 아주 초보적인 추상화로부터 고차적인 추상화로의 점진적인 이행을 돕도록 설계

되어 있다. 구체적으로는 6단계의 전반부(1-3단계)는 일상적인 경험이나 상황, 지각적으로 다양한 교구, 다양한 게임 등이 순차적으로 제시되고, 이로부터 비본질적인 요소를 제거하고 본질이 되는 공통 요소를 찾아내도록 구성되어 있다. 6단계의 후반부(4-6단계)는 전반부에서 도출한 초보적인 추상을 정착시키기 위해 시각적인 표현이나 상징 언어가 이용되며, 최종 단계에서 공리, 정리, 증명 등을 이용한 엄밀한 형식화로 나아가도록 구성되어 있다. 따라서 6단계 이론을 한마디로 규정하자면 추상화 과정을 위해 설계된 이론이라 할 수 있다. 그런데 추상화라는 사고 행위는 어린 학습자뿐만 아니라 성인에게도 어려운 것이므로, 그 과정에서 교사의 적절한 안내는 필수이다. Dienes가 제시한 보기에서도 6단계의 전 과정에서 교사의 역할이 매우 중요함을 알 수 있다. 따라서 Dienes가 비록 자신의 이론을 학습이론이라 명명하였지만, 실제적으로는 지도-학습 이론이라 보는 것이 합당할 것이다.

둘째, 다음 단계로의 이행은 현 단계에 대한 충분한 경험과 이해를 바탕으로 한다. Dienes에 의하면 6단계 이론은 다른 많은 단계이론과 마찬가지로 직렬식으로 구성되어 있다. 그는 수학적 개념 형성을 건물의 구성에 비유하기를 즐겼는데, 건물이 지어질 때 아래층이 세워진 후 이것에 기초하여 위층이 점진적으로 세워지듯, 수학적 개념 역시 각 단계가 이전 단계의 풍부한 경험을 통해 형성된다고 보았다. 규칙놀이가 가능한 것은 자유놀이라는 경험을 통해 가능하며, 비교 행위는 규칙놀이가 성공적으로 수행되었을 때나 가능하다. 6단계 중 어느 단계의 성공도 전단계의 성공이 전제 되지 않는 한 기대하기 어렵다. 이 과정이 추상화와 관련된 고차적인 사고 활동을 요하는 만큼 다음 단계로의 이행을 너무 서두르지 말고, 현 단계의 경험을 충실히 제공하는 것이 보다 중요할 것이다.

셋째, 모든 사람들이 마지막 단계인 형식화 단계까지 도달할 수 있는 것은 아니다. Dienes에 의하면 개념형성의 최종 단계인 형식화 과정은 매우 길고 더디게 진행될 수 있다. 뿐만 아니라 모든 사람들이 형식화 단계에 도달할 수 있는지, 혹은 사람들이 언제 그러한 형식화 단계에 도달하게 되는지는 알 수 없다고 기술하고 있다. 우리가 정수 학습의 예를 통해 살펴본 마지막 형식화 단계는 x^2+2x+1에서 $(x+1)^2$으로 나아가는 연역 과정을 보여주고 있다. 이 과정은 실제로 중학교에서 다루는 내용으로 다항식의 전개 혹은 인수분해를 통해 자연스럽게 접근하고 있다. 그러나 여기에 연역이라는 방법을 채택할 경우 무려 13단계의 엄밀한 형식적 절차를 거치게 된다. 이 과정은 어린 학습자뿐만 아니라 성인에게 조차 쉽지 않은 것으로, 어린 학생들을 대상으로 실험한 경험이 많은 Dienes가 이 점을 모를 리가 없었을 것이다. 실제로 Dienes의 이론은 Piaget의 아이디어를 바탕에 두고 있기 때문에, 증명과 같은 분석적 사고가 12세 이전의 어린 아동들에게서 나타나기를 기대한 것은 아닐 것이다. 따라서 모든 학습자에게 공리, 정리, 증명 등과 같이 엄밀한 연역적 절차에 의해 진행되는 형식화 단계로의 이행을 요구하는 것은 아닐 것이다.

넷째, 학습 싸이클(learning cycle)을 지지하는 이론이다. Dienes(1960)는 개념형성 싸이클을 '개폐연속체(open-closed continuum)라 부르고 있다. 어떤 단계를 거쳐 일단 형성된 개념은 '폐(closed)'의 상태로 되지만, 내성적 분석과 적용의 과정에서 이미 '개(open)'의 상태로 변해 보다 객관적이고 보다 높은 수준의 재구성이 이루어진다는 것이다. Dienes는 이와 같이 구조화

되어 가는 한없이 열려진 사고가 수학적 사고의 본질이라고 보았다(김응태 외, 1984). 따라서 이것을 6단계 이론에 적용해 보았을 때, 자유놀이에서 상징화로의 점진적인 이행을 통해 일단 형성된 수학적 개념은 한 차원 높은 수학적 개념을 형성하기 위한 놀이의 소재로 다시 사용되어 진다. 예를 들어 이 연구에서 제시한 정수 학습을 위한 6단계 혹은 그 이전 단계를 성공적으로 이행한 학습자는 정수 개념을 소재로 하는 새로운 놀이에 참여할 수 있게 되며, 정수 보다 한 차원 높은 수학적 개념으로의 여행에 참여할 자격을 얻게 되는 것이다.

다섯째, 놀이나 게임이 주요 수단이 되는 지도-학습 이론이다. Dienes(2002, 2004)는 일반인들에게 수학적 용어는 매우 복잡한 것으로 간주되기 때문에 수학자들이 자신의 아이디어를 표현한다 해도 그것은 단지 다른 수학자들을 위한 것이지 일반 사람들을 위한 것은 아니라는 점을 강조하였다. 따라서 수학자들이 '노는 것(play)'과 같이, 일반인들이 '놀(play)' 수 있는 어떤 매개체를 찾아야 하는데, 이 때 아주 적절한 것이 수학적 게임이며, 이것은 곧 표현의 예술(art of interpretation)을 의미한다고 주장하였다. 그리하여 그는 6단계의 각 국면을 설명하는 경우에도 가급적 '게임'이라는 용어를 사용하고자 노력하였다. 예를 들어 정수학습을 소재로 한 그의 연구를 보면, 6단계의 초기 국면인 자유놀이나 규칙놀이 단계는 물론이고, 마무리 과정인 형식화 단계에서도 가급적 활동을 게임으로 규정하려고 노력하였다.

이제 6단계 이론에서 제기되는 문제점을 살펴보면 다음과 같다.

첫째, 게임은 수학학습의 성패를 좌우하는 중요한 변수임에는 틀림없다. 그러나 Dienes가 생각했던 대로, 수학적으로 의미가 풍부하며, 동시에 학습자에게 흥미와 즐거움을 줄 수 있는 게임을 만들 수 있는가하는 문제가 제기될 수 있다. 실제로 Dienes(2002, 2004)는 수학을 게임을 무한히 공급해 줄 수 있는 금광으로 비유하면서, 수학의 구조가 주어지면, 규약이 해당 수학적 구조에 정확하게 대응하는 식으로 게임을 발명할 수 있다고 주장하였다. 그러나 그가 만들어 제시한 게임(댄스 게임, 동쪽/서쪽으로 걷기 게임)을 보면, 그와 같은 것을 누구나 만들 수 있는 것은 아님을 알 수 있다. 뿐만 아니라 게임의 규칙이 지나치게 인위적이다. 예를 들어 댄스 게임에서 '어린 소녀가 창문을 두드리면 휴게실에 있는 사람이 나가고 반대 성을 가진 사람이 소녀의 수만큼 들어와야 한다'는 식의 조건은 지나치게 인위적이어서, 댄스홀이라는 맥락을 활용한 의미를 퇴색시킨다. 또한 문제를 푸는 식으로 진행되는 이 활동을 과연 게임이라 부를 수 있는지도 생각해 볼 문제다. 우리가 생각하는 게임은 일정한 규칙이 있고, 어느 한 쪽이 이기면 게임이 종료된다. 그러나 Dienes가 제시한 게임에서는 게임을 어떻게 시작할지, 누가 이기는 것인지, 게임이 어떻게 종료되는지에 대한 아무런 규약이 없다. 특히 마지막 형식화 단계에서 그가 '게임'으로 명명하고자 했던 활동은 엄밀한 연역적 절차의 수행 그 이상도 그 이하도 아님을 알 수 있다. 게임은 6단계 이론에서 매우 중요한 도구이므로, 6단계 이론을 받아들이기 위해서는 Dienes가 제시한 게임을 세련시키는 과정을 거치거나, 우리 현실에 맞는 게임을 새롭게 개발하는 일이 요구된다. 그러한 노력이 성공하지 못한다면 6단계 이론은 현실성 없는 이론으로 폐기될 수밖에 없을 것이다.

둘째, 모든 단계에서 학생과 교사의 역할이 명확하지 않다. Dienes는 기본적으로 구성주의적 관점을 취하고 있으나, 6단계를 단계별로 살펴보면 아동이 교사의 도움 없이 스스로 무

엇을 구성하기에는 활동의 내용이 너무 어렵다. 자유놀이나 규칙놀이를 제외하고 공통성을 추상하거나, 추상된 공통성을 표현하고, 그로부터 비롯된 성질을 기호화하여 형식화로 나아가는 과정에서 아동이 독자적으로 할 수 있는 활동은 그리 많지 않다. 설령 아동이 독창적으로 무엇을 구성한다해도 그것이 질적으로 충분하지 않으면 오히려 다음 단계로 이행하는 데 곤란을 겪게 될 것이다. 예를 들어 4단계(표현 단계)에서 이루어지는 표현활동이 수학적으로 충분히 의미가 없는 경우, 그로부터 성질을 도출해 내야하는 5단계(기호화 단계) 활동이 위축될 가능성이 높다. 따라서 우리는 다음과 같은 질문을 던질 수 있다. 각 단계에서 교사가 어느 정도로 활동에 개입하는 것이 바람직한가? 전 과정에서 혹은 각 단계별로 볼 때, 아동의 구성활동과 교사의 안내활동 중 비중이 더 높아야 하는 것은 무엇인가? 교사의 비중이 지나치게 높은 과정이 학생에게 어떤 의미가 있겠는가?

IV. 교육적 시사점

Dienes의 6단계 이론은 1971년에 처음 제시되었으나, Dienes는 최근까지도 자신의 이론을 가다듬고 정리하여 관련 논문을 발표하고 있다. 어쩌면 Dienes는 오늘날의 교육현실이 그가 한창 활동했던 60년대, 70년대의 교육현실에 비추어 크게 달라진 바가 없다고 판단했는지도 모른다. 따라서 6단계 이론이 비록 오래 전에 만들어진 것이기는 하나, 그것이 우리에게 주는 시사점은 작금의 교육상황에서도 여전히 유효하다. 이 장에서는 이상의 고찰 내용을 바탕으로 6단계 이론으로부터 얻을 수 있는 시사점을 다음 다섯 가지로 정리하였다.

첫째, 놀이와 게임은 수학의 개념이나 구조를 익히는 데 결정적인 역할을 하므로, 수학 지도-학습 국면에서 보다 적극적으로 활용되어야 한다. Dienes는 잘 개발된 놀이와 게임이 적절한 단계에서 제공되면, 어린 아동들이라 할지라도 어려운 수학의 개념이나 절차를 받아들일 수 있다는 것을 주장하였다(Hirstein, 2007). 또한 그는 예술작품이 환경으로부터 어떤 요소를 소화하고, 그 결과를 다른 사람들과 나누기를 원하는 예술가들에 의해 만들어지는 구성(construction)이라 정의하고, 수학도 이와 마찬가지 방법으로 수학자들에 의해 만들어지는 구성이라 보았다. 그리하여 교육자들이 직면한 문제는 아동들이 스스로 추상적 구조를 구성하도록 하고, 마치 장난감을 가지고 놀 듯 그러한 추상적 구조와 더불어 놀도록 자극하는 방법을 찾는 것이라고 하였다(Dienes, 2002, 2004). 그러나 과연 수학적으로 의미 있는 게임이란 무엇이며, 우리가 어떻게 그러한 게임을 만들 수 있는가, 우리가 만든 게임을 아동이 좋아 하겠는가 등의 문제는 여전히 과제로 남게 된다.

둘째, 추상화와 일반화는 수학 학습-지도 국면에서 가장 중요한 요소로서, 많은 연습이 요구된다. 본문에서 이미 기술된 바와 같이, 6단계 이론은 수학 개념의 바람직한 추상화 과정을 설명하고 있는 이론이다. Dienes는 추상화를 가장 중요한 수학적 활동 가운데 하나로 간주하였으며, 이를 위해 지각적으로 다양한 형태의 구체물을 다루는 경험이나 수학적으로 다양한 변인이 내재된 놀이나 게임을 경험을 할 것을 제안하고 있다. 이것이 소위 지각적 다양성의 원리와 수학적 다양성의 원리이다. 즉 Dienes가 제안하는 학습과정에서의 다양성은 다양성 그 자체가 목적이 아니라, 다양성 속에 존재하는 본질적으로 공통인 요소를 추상하는 것이 목적이라 하겠다. 이렇게 추출된 개념은

다시 표현 단계, 기호화 단계, 그리고 최종적으로 상징화 단계를 거치면서, 특별한 몇몇 상황에 국한되지 않고 더욱 많은 상황에도 적응력이 있는 일반적인 개념으로 성장하게 된다. 이것이 일반화 활동이다. 그러나 추상화나 일반화는 매우 고차적인 사고 활동이기 때문에, 학습-지도 과정은 매우 조심스럽게 설계되어야 하며, 학습자들에게 충분한 연습 기회를 제공해야 할 것이다.

셋째, 수학 지도에서 상징적 언어 혹은 기호 도입의 시기는 가능한 늦추어야 한다. 6단계 이론은 기호화 단계와 형식화 단계 이전에 자유놀이, 규칙놀이, 비교, 표현이라는 다소 구체적이고 비형식적인 여러 단계들을 설정하고 있다. 이것은 성급한 상징 언어의 도입에 반대했던 Dienes의 입장을 잘 반영하고 있다. 그는 대부분의 수학수업이 너무 이른 시기에 상징 언어를 도입함으로써, 수학에 재능 있는 소수의 학생을 제외한 대부분의 사람들을 좌절시키고 있다고 비판하였다. 재능 있는 학생들은 교사가 자각하지도 못한 사이 여러 단계들을 통과할지도 모른다. 그러나 그렇지 못한 학생들은 교사나 교과서에서 요구하는 답을 기계적으로 반복하는 것 이외에 선택의 여지가 없다. 이렇게 획득된 지식은 적응력이 없기 때문에 비표준적 상황을 만났을 때 소용이 없다(Dienes, 1995, p.30). 물론 오늘날에는 많은 교사들이 유의미 학습을 위해 여러 가지 노력을 기울이고 있지만, 성급한 상징 언어의 도입과 같은 문제는 여전히 남아있다. 따라서 그 이전에 놀이나 게임을 충분하게 경험하게 하고, 그로부터 도출된 공통성을 다양한 시각적 방법으로 표현하게 하는 활동은 상징 언어의 도입을 지연시킬 수 있는 효과적인 대안이 될 수 있을 것으로 생각된다.

넷째, 정형화된 수학 지도의 방법을 탈피하여, 효과적인 학습, 재미있는 학습을 지향해야 한다. Dienes(1995)는 '문제'의 사전적 의미를 상기시키면서, 실제 우리 교실에서 발생하는 학습은 그러한 의미를 충분히 살리지 못하고 있다고 주장한다. 그에 의하면 '문제'란 '우리가 어떻게 해야 하는지를 알지 못하는 어떤 것'이다. 그러나 교과서를 보면 표준적인 해법이 먼저 제시된 후, 그와 동형인 문제들을 학습자들에게 풀어 보도록 함으로써, 진정한 의미의 문제해결이 이루어지고 있지 못함을 지적하였다. Dienes는 이에 대해 교사들이 6단계와 같은 역동적인 학습 단계를 개발하는데 더 많은 시간과 노력을 쏟는다면 아동들이 수학을 보다 효과적으로 학습할 수 있을 뿐만 아니라 수학을 학습하는 즐거움도 아울러 얻을 수 있을 것이라고 주장하고 있다.

다섯째, 수학학습과정에서 교사의 역할이 새롭게 인식되어야 한다. Dienes는 음악의 비유를 통해, 작곡가와 피아니스트가 다른 역할을 하듯이 수학에서도 발견 및 구성의 행위와 그 구성을 대중들에게 해석해 주는 행위는 구별되어야 한다고 주장했다. 그에 의하면 피아니스트는 난해한 베토벤 소나타를 아주 복잡한 기호 시스템을 해독하고 그것을 즐거운 예술적 경험으로 변환하여 일반인들에게 해석해 주기 위해 엄청난 노력을 기울인다. 그러나 수학은 어떠한가? 과연 우리는 어린 학습자를 포함하여 일반 대중들이 수학의 아름다움을 해석하는데 도움을 주는 어떠한 방법을 모색하고 있는가? 실제로 이 물음에 자신 있게 대답할 교사는 많지 않을 것이다. 피아니스트가 작곡가와는 다른 역할을 하듯이, 우리 역시 수학에서의 발견 및 구성의 행위와 그 구성을 대중들에게 해석해 주는 행위를 구별해야 한다. 즉 수학자의 역할과 교육자의 역할이 구분되어야 하며, 교육자로서의 우리의 책무는 학습자로 하여금 수학을

아름답게 해석할 수 있도록 도울 수 있는 방법을 모색하는 것이라 하겠다.

V. 마치며

우연한 기회에 Dienes의 생애와 연구 업적을 정리하는 일을 맡게 되었다. 그의 평생에 걸친 연구물을 수집하고 정리하는 과정에서, 수학과 수학교육에 대한 그의 깊은 애정과 끝없는 열정을 엿볼 수 있어 매우 행복했다. 그러나 한편으로는 주옥같은 그의 작품들이 국내에 알려지지 않은 점이 매우 안타깝게 느껴졌다. 이것이 이 연구를 착수하게 된 계기이다. 오늘날의 사람들은 옛 것 보다는 새 것에 보다 큰 관심과 가치를 두지만, 때로는 시대를 초월하여 변치 않는 가치를 지니는 것을 발견하게 된다. Dienes의 수학학습을 위한 6단계 이론도 그러한 것들 중의 하나이다. 6단계 이론은 국내에서도 이미 소개된 이론이지만, 그 내용이 너무 개략적이어서 이론이 의미하는 바를 구체적으로 파악하기가 쉽지 않았다. 그러나 다행스럽게도 6단계와 관련된 Dienes의 최근 연구물들을 접할 수 있어서, 그가 이 이론을 통해 우리에게 하고자 했던 이야기를 어렵지 않게 추려낼 수 있었다.

Dienes는 수학자들이 자신들이 하고 있는 일에 대해 매우 아름답고 우아한 것으로 묘사하지만 실제로 일반인들이 느끼는 수학은 그저 건조하고 이상한 사실들의 집합 정도 밖에는 되지 않는다고 생각하였다. 그는 이에 대해 사물이 아름답다는 것은 그것과 감상자간의 상호작용이 존재하여, 감상자가 그에 대해 아름답다고 느낄 때 가능한 것이라 하였다. 즉 그것이 아름답다고 느끼는 사람이 없다면 그것은 더 이상 아름다운 것이라 할 수 없다는 것이다. 이러한 논리를 수학에 적용한다면, 우리 교육자들의 임무는 학생들로 하여금 수학을 아름다운 것으로 느낄 수 있도록 어떤 식으로든 도움을 주는 것이어야 할 것이다. 6단계 이론은 이러한 맥락에서 수학과 아동의 사이를 자연스럽게 연결해 주려는 Dienes의 오랜 연구와 노고의 결과라 하겠다.

참고문헌

김응태 · 박한식 · 우정호 (1984). **수학교육학개론**. 서울 : 서울대학교출판부.

김정하(2000). **Dienes의 수학 학습 원리의 구체화 방안 연구**. 인천교육대학교 대학원 석사학위논문.

이은영(2004). **딘즈(Dienes)의 수학교육관에 관한 연구**. 성균관대학교 대학원 석사학위논문.

Dienes, Z. P. (1960). *Building up mathematics.* London : Hutchinson Educational, pp.31-48.

Dienes, Z. P. (1971). *Building up mathematics (4th ed).* London : Hutchinson Educational.

Dienes, Z. P. (1995). Some thoughts on the dynamics of learning mathematics (unpublished). In Montana Council of Teachers of Mathematics(2007), *The Montana Mathematics Enthusiast,* Monograph 2(2007 Sep).

Dienes, Z. P. (2000). The theory of the six stages of learning with integers. *Mathematics in Schools,* Vol 29, No 2, March 2000. pp.27-32.

Dienes, Z. P. (2001). Six stages with rational numbers. *Mathematics in Schools,* Vol 30, No 1(Jan 2001), pp.41-45.

Dienes, Z. P. (2002, 2004). Mathematics as an art form: An essay about the stages of mathematics learning in an artistic evaluation of mathematical activity, http://zoltandienes.com/sixstages.html.

Dienes, Z. P. (2008). Brief notes on Zoltan Dienes' six-stage theory of learning mathematics, http://zoltandienes.com/sixstages.html.

Dienes, Z. P., & Golding, E. W. (1971). *Approach to modern mathematics.* New York: Herder and Herder.

English, L. D. (1995). Cognitive psychology and mathematics education. In L. D. English & G. S. Halford, *Mathematics Education: Models and Processes* (pp.1-20), Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates,

Hirstein, J. (2007). The impact of Zoltan Dienes on mathematics teaching in the United States. In Montana Council of Teachers of Mathematics, *The Montana Mathematics Enthusiast,* Monograph 2, pp.169-172.

Review of Six Stages Theory of Learning Mathematics Suggested by Zoltan Dienes

Kim, Soo Mi (Gyeongin National University of Education)

This article tried to review the meaning and implication of six stages theory of learning mathematics suggested by Zoltan Dienes in 「Building up Mathematics」 in 1971. It was not much concretely known to Korean mathematics education society. In particular, there is no mathematical example which could cover all the stages to know what the theory tells. So this article focused on the example which Dienes developed for learning integers in 2000 to dig the theory. As a result, some critical aspects and problems of six stages theory were found. And finally educational implication was described.

* key words : Dienes, Six stages theory of learning mathematics(수학 학습을 위한 6단계 이론), Concept learning(개념 학습), Abstraction(추상화)

논문접수 : 2008. 7. 31

논문수정 : 2008. 8. 26

심사완료 : 2008. 9. 2