대한수학교육학회지 <학교수학> 제 10 권 제 3 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.10, No.3, 357-374. Sep. 2008

고등학교 10-가 교과서 복소수 단원에 관한 논리성 분석연구

양 은 영* · 이 영 하**

본 연구는 현재 고등학교 1학년에서 처음 소개되는 복소수 단원의 복소수의 정의와 연산, 그 연산에 대한 성질 등 교과서의 서술 방식이 학생들의 '수준'과 교육과정의 흐름에 맞게 논리적으로 서술되어 있는지 알아보고자 하였다. 여기서 학생들의 '수준'이란 실수에서 복소수로의 새로운 수 체계의 확장에 따른 대수적 구조를 파악하고 이해할 수 있는 수준으로 가정한다. 즉, 고등학교 1학년 교과서 전반의 전체적인 흐름을 볼 때 복소수 단원의 목표는 새로운 수의 확장에 따른 대수적 구조의 보존을 이해하고 파악하는 것이므로 이러한 목표에 맞게 복소수의 정의와 연산, 그 연산에 대한 성질이 교과서에서 서술되는 방식이 수학적인 입장에서 보았을 때 논리적인 비약(gap)이나 순환논증의 오류를 가지지 않고 적절하게 서술하고 있는지를 살펴보고자 한 것이다. 본 연구는 이런 관점에서 16종 교과서를 분석하여 크게 다섯 가지의 분석 대상을 찾아내었다. 첫째는 허수 단위 i의 도입과 음수의 제곱근, 둘째는 복소수의 정의 방식에서 실수와 순허수의 정의 방식, 셋째는 복소수의 사칙 연산, 넷째는 복소수의 연산에 관한 성질에서의 대소 관계와 역원의 표현 방법, 마지막으로 대수적 구조의 보존에 관한 것이다.

본 연구에서 주요 관점으로 살펴본 위의 5가지 대상에 관한 교과서의 서술방식은 논리적 정확성의 문제와 순환논리의 오류가 생길 수 있는 가능성이 있다고 판단되었고, 연구자가 일부 논리적 비약(gap)으로 판단한 것이 있는데, 이는 오류가 아닐 수는 있으나 학생들이 이해하는 데에 있어 논리적으로 전후가 맞지 않는 전개 과정이라고 판단되었기 때문이다.

I. 서 론

1. 연구의 필요성 및 목적

최근 수학교육에서는 고등학교 교육 과정의 복소수 단원의 지도에 대한 많은 연구가 이루어지고 있다. 특히 제7차 교육과정에서 복소수 단원에 대한 내용이 대폭 축소되면서 교과서에서는 대수적인 계산을 주로 다루고 복소수라는 새로운 수의 확장이 의미하는 바와 수 체계에 대한 엄밀함은 소홀히 다루어지고 있다. 제7차 교육과정과 16종 교과서의 전개 과정으로 보았을 때, 고등학교 1학년 복소수 단원의 학습은 새로운 수의 계산 방법을 익히는 데서 끝나지 않고 대수적 구조의 보존이라는 수체계의 확장에 따른 새로운 목표를 달성하고자 하는 것으로 생각할 수 있는바, 연구자는 그 근거를 고교 해당 단원의 좀 더 구조적 서술의 특징에서 찾을 수 있다고 생각한다. 즉 중학교 수준에서 다루어졌던 실수 범위까지의 수 체계의 확장이 직관적인 이해에 바탕을 둔 확장 과정으로 이

* 이화여대 대학원(1775yey@ewhain.net)
** 이화여대(youngha@ewha.ac.kr)

루어진데 비하여, 고등학교에서의 집합 단원과 실수 단원은 수학적 구조의 이해를 돕기 위한 활동이 오히려 주를 이루고 있다고 생각할 수 있기 때문이다.

고등학교 복소수 단원을 포함하는 대단원은 집합, 명제, 실수 등을 함께 포함하는 교과서가 많은데, 집합 단원에서는 중학교에서 이미 다루었던 집합 사이의 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙을 합집합과 교집합 등을 이용하여 다시 다루고 있는 바, 이는 단계형 수준별 교육과정을 표방하는 7차 교육과정에서 집합연산에 대한 반복 학습을 목표로 하는 것은 아니라고 추정됨으로, 집합의 연산적 성질과 구조를 파악하는 목적을 갖고 있다고 생각된다. 또 실수 단원에서도, 중학교 과정까지의 과정을 통해 무리수까지의 수의 영역을 확장하여, 비형식적으로 실수 연산에 대한 기본 성질과, 대소 관계를 잘 알고 이해하고 있으리라 추정됨에도 불구하고, 이를 다시 형식적으로 이해하고 증명하는 과정을 거치는 것은 실수 연산의 성질과 구조를 이해하고 느낄 수 있게 하려는 것으로 추측된다.

고등학교 1학년 학생들의 수준은 Piaget의 인지발달 수준에서 일반적으로 형식적 조작기에 해당된다고 간주된다. 이 수준은 수 체계의 대수적인 구조를 파악하고 그것을 논리적으로 확장할 수 있으며 대수적 법칙에 대해 좀 더 엄밀한 증명을 해 나갈 수 있는 수준일 것이라고 볼 수 있는데 특히, 우리나라 교과서의 경우 복소수 이전 단원인 실수 단원에서 실수의 연산에 대한 법칙과 그 성질 외에도 여러 가지 엄밀한 증명을 다루고 있다. 이미 알고 있는 대수적인 기본성질인 $a \cdot 0 = 0$이라든지 $(-1) \cdot a = -a$와 같은 성질을 형식적으로 다시 증명해 보임으로서 논리적으로 엄밀화하려는 의도가 엿보인다고 해석되는 것이다.

따라서 본 연구에서 현재 고등학교 1학년 학생들의 "수준"이라 함은 직관적인 유추에 의한 계산 과정보다는 수체계의 확장에 따른 대수적인 구조를 이해할 수 있는 수준을 의미한다.

우리나라뿐만 아니라 여러 나라의 고등학교 1학년 교육과정과 교과서를 살펴보면 복소수를 배우거나 그렇지 않은 경우에 관계없이 학생들은 수 체계의 대수적인 구조를 파악하고 수 체계 사이의 관계를 이해하여 대수적 구조가 보존됨이 이해 가능한 것으로 서술되고 있다. (NCTM (1989, 2000), 캐나다 교과서(2002),독일 교과서(2001)) 본 연구는 현재 우리나라 교과서에서 복소수의 정의와 연산이 이러한 목표를 달성하기에 충분하도록 서술되어 있는지 생각해 보았다. 특히 수학적인 입장에서 교과서에 서술된 방식이 학생들이 이해하기에 논리적이며 정의와 연산을 설명하는 방법이 수학적으로 서술되어 학생들의 직관적인 이해뿐만 아니라 그 구조의 파악까지 가능하도록 서술하고 있는지 알아보고자 한다.

$\sqrt{-2}$ 는 $\sqrt{2 \times -1}$로 표현 가능하며 이것은 $\sqrt{2} \times \sqrt{-1}$ 가 되어 $\sqrt{2}i$로 생각할 수 있다. 즉, 양수 a에 대하여 $\sqrt{-a} = \sqrt{a}i$ 와 같은 성질이 성립하는 것은 이미 우리가 알고 있는 $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$라는 성질이 확장되어 성립하는 것처럼 느끼게 된다. 여기서 $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$라는 성질은 어떠한 조건에서 만족하는 성질인가? a, b의 부호에 관계없이 이용 가능한 성질인가?

이러한 논리적 비판능력을 가질 수 있도록 논리적인 비약(gap)이 생길 여지는 없는지 교과서의 서술방식을 살펴보고자 한다.

이와 같은 이해를 바탕으로 다음과 같은 연구문제를 생각하고자 한다.

연구문제 1. 현재의 교육과정에 기초한 학생

들의 '수준'을 고려할 때, 고등학교 1학년 복소수의 정의와 연산에 관한 서술은 어떠한가?

연구문제 2. 복소수의 정의와 연산에 대한 서술을 어떠한 방향으로 수정, 보완하면 학생들이 이해하는데 도움이 될 것인가?

II. 이론적 배경

1. 복소수의 도입과 수의 확장

복소수 단원에서 새로운 수, 복소수에 대해 이해하기 위해서 복소수의 기본 단위인 허수단위 i가 어떻게 출현하게 되었는지 살펴보고자 한다.

음수의 제곱근을 이해하기 위한 첫 단계는 1500년대가 되어서야 서서히 시작된다. Paul Nahin(1998)에 의하면 볼로냐 대학의 수학자 페로(Scipione del Ferro)가 이른바 '약화된'(depressed) 삼차방정식, 즉 이차항이 빠진 일반적인 삼차방정식의 특별한 경우를 푸는 방법을 실제로 발견하면서 음수의 제곱근을 이해하기 위한 첫 단계가 시작되었다.

페로가 푼 삼차방정식은 음이 아닌 수 p, q에 대해 $x^3+px=q$ 의 특별한 형태의 삼차방정식이었는데 방정식의 해들을 두 항의 합으로 즉, 미지수 x를 $x=u+v$로 나타낼 수 있다는 사실을 우연히 알게 됐다. 이것을 약화된 삼차방정식에 대입하여 정리하면 다음과 같은 미지수 x를 얻을 수 있다.

$$x=\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\pm\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

이 값은 항상 실수이며 임의의 삼차 방정식에는 세 개의 해 또는 근이 있지만 페로의 삼차방정식에는 언제나 정확하게 단 하나의 양의 실수근(실근)과 두 개의 복소수 근(허근)이 있음을 쉽게 밝힐 수 있다. 예를 들어 $x^3+6x=20$의 경우 하나의 실근은 $x_1=2$가 되고[1], 나머지 두 근을 찾기 위해 인수 분해하여 근의 공식을 적용하면 두 개의 허근

$x_2=-1+3\sqrt{-1}$, $x_3=-1-3\sqrt{-1}$을

얻는다.

이후 카르다노라는 수학자가 자신만의 방정식의 해법을 다시 발견하게 되면서 1545년 그의 책 《위대한 계산법》 (Ars Magna)을 통해 발표했다. 카르다노는 앞에서 언급한 페로의 식에서 허수 자체를 두려워하지 않고 "10을 두 부분으로 나누어 그 곱이 40이 되게 하라." 라는 유명한 문제를 제시하였다.

이 문제는 허수의 출현과 함께 많은 참고 도서에 실린 문제로서 음수의 제곱근의 존재에 대해 확실하게 알게 해 준다. 즉, 위의 문제는 허근 $5+\sqrt{-15}$, $5-\sqrt{-15}$의 두 해가 존재하는데 카르다노는 허수의 물리적 의미를 찾을 수 없었기 때문에 이를 '궤변의' 수라고 불렀다.

고등학교 학생들의 수준에서는 복소수 체계가 각각 다른 연산 구조를 가지고 있을지라도 동일한 형태의 체임을 알도록 하는 것을 목표로 하고 있다. 대수적 구조를 파악하고 그것을 이해하는 것은 수학적 사고의 하나로서 엄밀한 비판정신을 기르고 수학의 기본적인 방법론(추상화)에 익숙해지게 하기 위한 과정이 될 수 있다.

---

1) 페로의 공식에 대입하면
$x=\sqrt[3]{10+\sqrt{108}}-\sqrt[3]{-10+\sqrt{108}}=2$

2. 복소수 관련 선행 연구

복소수에 관한 선행 연구로는 허수 단위 i의 도입에 대한 연구와 순서쌍을 도입하여 복소평면으로 복소수를 도입하자는 연구로서 김홍기, 이종철(2007)은 이에 관하여 고등학교 과정에서 복소수는 제곱해서 -1이 되는 수 곧, $\sqrt{-1}$을 i로 나타내면서 그에 대한 어떠한 가시적 표현도 없이 사용하고 있다고 비판하였다. 박재근(2007)은 허수를 '가상의 수 또는 상상의 수'로 형식 불역의 차원에서 필요성만을 제시한다면 그 필요성을 잘 알지 못할 것이라 하면서 복소수의 개념도 역사적인 시간 속에 자연스럽게 정착되었다는 것을 보여주며 학생들이 그러한 과정을 교사들이 재조직하여 경험하는 것이 중요하다고 하였다. 안범현(2006)은 6차 교육과정상의 수학Ⅱ에서 다루었던 복소평면을 10-가 부분에 도입하여 복소수의 개념을 시각적으로 정립하고 여러 가지 성질을 복소평면과 실평면을 일대일대응으로 다루면서 대수적 개념과 시각적 부분을 조합하여 학습동기를 유발하자고 주장하였다. 정은주(2005)는 순서쌍 도입은 복소평면을 이해함과 동시에 실수 전체를 포함하는 수 체계라는 것을 이해할 수 있으며 행렬식 도입은 다양한 수학적 사고와 시각이란 방법적 측면에서 의의가 있다고 주장하였다.

3. 교과서의 서술에 관한 연구

가. 약정의 기능으로서의 정의의 역할

복소수라는 새로운 개념을 가르칠 때 '정의'를 정확하게 가르칠 필요가 있다는 연구가 있다. 조영미(2001)는 '정의의 역할'의 용어 대신 '정의 기능'이라는 용어를 사용하여 정의의 역할을 세분하였는데 복소수는 새로운 수에 의미를 부여하는 정의로서 '약정적 기능' 에 해당한다고 볼 수 있다. 즉, 실수 범위에서 성립하지 않은 대상에 새로운 용어와 기호를 부여한다는 것이다.

나. 논리적 타당성과 순환논증의 오류

본 연구에서 중요한 한 가지 관점은 복소수의 정의와 연산, 그 연산에 대한 성질의 서술방식이 수학적으로 논리적이며, 내용이 순환논증의 오류와 같은 오류가 없는지에 대해 살펴보고자 하는 것이다.

정당화 조건을 충족시키지 못하는 논증을 오류(fallacy)라 하며, 오류는 올바르지 않은 논증이긴 하지만 어떤 맥락에서는 그 누군가에게 올바른 논증으로 보일 수 있는 논증을 말한다.

오류의 유형은 학자들마다 다르고 분류하는 방법도 다양한데 본 연구에서 다루고자 하는 순환논증(circular argument)의 오류는 '선결문제 요구의 오류(fallacy of begging the question, fallacy of petitio principle)' (강영계 2007, 서정선 2002)에 해당한다고 할 수 있다.

Ⅲ. 연구방법 및 절차

1. 연구 대상

본 연구는 복소수의 정의와 연산의 서술에 대한 교과서 비교 연구를 하기 위하여 제7차 교육과정의 16종 교과서를 분석하였다. 또 대학 수학의 복소함수론을 참고로 하여 16종의 교과서 분석결과와 비교하여 보았다.

2. 연구 분석틀

<표 Ⅲ-1> 연구 분석 대상과 준거

제목	분석 대상(교과서상의 진술)	분석 준거
허수 단위 i의 도입	제곱하여 -1이 되는 새로운 수를 생각하여 이것을 i로 나타낸다.	새로운 수를 어떻게 생각하였는가? (새로운 기호 도입의 과정)
	$i^2=-1$일 때, i를 허수 단위라고 하며 i를 $\sqrt{-1}$로 나타내기로 한다.	$\sqrt{-1}=i$라는 값을 방정식의 두 해 중 어떻게 결정하였는가?
음수의 제곱근	일반적으로 임의의 양수 a에 대하여 $-a$의 제곱근은 $\pm\sqrt{a}\,i$이며 $\sqrt{-a}=\sqrt{a}\,i$이다.	$\sqrt{-a}$의 표현은 수학적으로 정확하며 $\sqrt{-a}$와 $\sqrt{a}\,i$의 표현 중 어떤 표현이 더욱 논리적인 비약을 줄일 수 있을 것인가?
실수의 정의	복소수 $a+bi$에서 $b=0$일 때, $0i=0$이므로 $a+bi=a+0i=a+0=a$가 되어 이 복소수는 실수가 된다.	덧셈기호와 구분기호를 구별하여 설명하고 있는가? 정의에 있어 등호사용은 적절한가? 수체계의 포함관계 표현은 적절한가?
순허수의 정의	복소수에서 $a=0$, $b\neq0$일 때, $a+bi=0+bi=bi$를 순허수라고 한다.	덧셈기호와 구분기호를 구별하여 설명하고 있는가? 정의에 있어 등호사용은 적절한가?
덧셈 뺄셈 곱셈	i를 하나의 문자로 생각하여 실수에서의 연산과 같은 방법으로 계산한다. 여기서 $i^2=-1$이므로 이 값을 대입하여 정리한다.	'문자' 라는 표현은 논리적으로 타당한가? '계산하라' 는 주입식 방법은 학생들의 수준에 일치하는가? 구분기호, 덧셈기호를 구별했는가?
나눗셈	분모의 켤레복소수를 분자, 분모에 곱하여 분모를 실수로 만들어 계산한다.	나눗셈의 분수 형태를 정의했는가? 수체계 확장에 따라 분자, 분모에 켤레복소수를 곱하는 것에 대한 논리적 비약은 없는가?
대소 관계	복소수의 대소 관계는 생각하지 않는다.	대소 관계에 대한 언급과 언급의 유무는 논리적으로 타당하게 이루어졌는가?
곱셈에 대한 역원	복소수 $a+bi$의 곱셈에 대한 역원은 $\frac{1}{a+bi}$이다.	역원의 표현방법이 논리적으로 타당한가?
대수적 구조의 보존	실수에서는 덧셈, 곱셈에 대하여 교환, 결합, 분배법칙이 성립하는데 복소수에서도 실수에서와 같이 이러한 성질들이 모두 성립한다.	수체계의 확장에 따른 대수적 구조의 보존이 구체화하여 제시되었을까?

Ⅳ. 연구 결과

1. 복소수의 정의와 연산에 관한 서술

가. 허수 단위 i의 도입과 음수의 제곱근

16종의 교과서 분석결과 모든 교과서가 허수 단위 i를 도입할 때 '실수를 제곱하면 항상 0 또는 양수이므로 방정식 $x^2=-1$의 해를 실수 범위에서 구할 수 없다. 따라서 해를 가지도록 하기 위해 수의 범위를 확장해야 한다'고 설명하고 있다. 또 '제곱하여 -1이 되는 새로운 수를 하나 생각하고 이것을 i로 나타낸다.' 고 하면서 허수 단위 i를 정의하고 있다. 허수 단위 i의 도입과 음수의 제곱근에 대한 서술이 논리적 비약이라고 생각되는 부분은 다음과 같은 네 가지이다.

우선 $\sqrt{-1}$라는 기호 사용에 대한 것이다. 교과서상의 허수단위의 도입과정은 어떠하며 $\sqrt{-1}$이란 기호의 사용은 어떻게 도입하고 있는지 그것이 학생들의 '수준'을 고려할 때 수학적으로 논리적인지 생각해 보고자 한다.

두 번째는 $\sqrt{-1}=i$값의 결정에 관한 것이다. 중학교에서 다루었던 제곱근의 정의를 그대로 유사하게 적용하면 $x^2=-1$ 에서 $x=\sqrt{-1}$ 또는 $-\sqrt{-1}$의 두 해를 얻게 되지만 교과서에서는 $\sqrt{-1}$, $-\sqrt{-1}$라는 이차방정식의 두 개의 해에 대해 설명하는 것이 아니라 하나의 해를 생각하였다고 서술하고 있다. 이것은

이후 설명하는 모든 복소수를 그것의 켤레 복소수로 변화시키게 된다.

세 번째는 음수의 제곱근의 정의에 관한 것이다. $\sqrt{-a}\,(a>0)$의 표현은 $\sqrt{-a}\sqrt{-b}=-\sqrt{ab}$에서 $a>0$, $b>0$와 같이 실수에서 제곱근의 곱이 복소수에서의 그것으로 대응하며, 완전히 동일한 대수적 구조(양수 음수 구분 없는 제곱근의 연산)의 보존이 이루어지지 않게 된다. 결국 $\sqrt{-a}$와 같은 표현을 사용하는 한 이 문제는 회피할 수 없으며 교과서에서 이 기호를 사용하려면 이와 같은 차이에 관한 주의를 환기시킬 보충설명이 필요하다.

넷째, 음수의 제곱근의 교과서 표현의 일관성에 대한 것이다. 음수의 제곱근에 대한 교과서의 설명이 16종 교과서 분석 결과 약간씩 차이를 보이고 있었다. 크게 분류해 보면 두 종류라고 할 수 있는데 한 종류의 책들은 복소수의 소개와 관련하여 허수 단위와 함께 곧 음수의 제곱근에 대한 일반화를 시도한 책들이 있고, 다른 종류의 책들은 복소수 단원의 끝 부분에서 음수의 제곱근에 대한 제곱근의 일반화를 시도한 경우가 있다. 그리고 각 경우별로 다시 $\sqrt{-a}$와 $\sqrt{a}\,i$를 병용하면서 연산과 관련된 차이를 소개하거나 그렇지 않은 교과서들이 있다. 연구자는 $\sqrt{-a}$ 기호의 사용이 학생들에게 그로인한 혼란을 보상해 줄만한 어떤 실질적 도움이 있는지 이해하지 못한다.

다섯째, 음수의 제곱근의 교과서 순서에 관한 것이다. 16개의 교과서 중 6종(약 38%)의 교과서는 복소수 단원의 도입 부분에 허수단위를 소개하고 $i^2=-1$이 됨을 이용하여 곧바로 음수의 제곱근을 언급하면서 $\sqrt{-a}=\sqrt{a}\,i$를 설명하고 $-a$의 제곱근은 $\pm\sqrt{a}\,i$가 됨을 정의하고 있다. 이러한 도입은 복소수 연산을 정의하는 것과의 전후 관계 즉, 순서상의 시기와 관련하여 순환논증의 오류에 빠질 가능성이 있으므로 자세히 살펴볼 필요가 있다.

나. 복소수의 정의 방식

16종 교과서의 분석 결과 복소수에서 실수의 정의는 다음과 같이 서술되고 있다.

<표Ⅳ-1> 실수의 정의의 예

복소수 체계에서의 실수의 정의	교과서
임의의 <u>실수 a는 $a+0i$꼴로 나타낼 수 있으므로</u>	8종/16종
$0i=0$으로 보면 임의의 <u>실수 a는 $a+0i$꼴로 나타낼 수 있으므로</u>	2종/16종
복소수 $0i$를 0이라 정한다. 실수 a는 <u>$a+0i=a+0=a$ (또는 $a=a+0=a+0i$) 이므로</u> 모든 실수는 복소수가 되므로~	3종/16종
복소수 $a+bi$에서 $b=0$일 때, <u>$0i=0$으로 정의되므로 $a+bi=a+0i=a+0=a$가 되어</u> 이 복소수는 실수가 되고	2종/16종
$b=0$일 때, $a+bi$는 $a+0i$가 되고 이것은 <u>실수 a와 같은 것으로 간주한다</u>	1종/16종

위와 같은 정의의 서술방식에 논리적인 비약(gap)이 보이는 부분은 다음과 같다.

우선 덧셈 기호와 구분 기호의 구별이다. 복소수의 정의에서 $a+bi$꼴은 복소수를 나타내는 기본 형태인데 여기서의 덧셈기호 '+' 는 더한다는 의미가 아닌 실수부와 허수부의 복소수의 형태를 나타내는 구분 기호일 뿐이다. bi 역시 $b\times i$의 의미가 아님은 복소수 연산이 모두 정의되기까지는 당연할 것이다.

이 문제는 실수집합과의 포함관계, 복소수가 순허수, 실수인 경우에 대한 표현 문제 등으로 계속 이어지게 된다. 특히 복소수 $a+0i$를 a로 적기로 할 때 a는 기존의 실수 표기 방법과 겹치게 되는데, 복소수 $a+0i$와 a를 동일

시할 때, 실수의 구조와 충돌을 일으키지는 않을 지(후에 그 염려는 사라지게 되지만) 등의 문제가 염려될 수밖에 없고, 그래서 이 문제와 관련하여 Russell(2002)은 좋지 않은 표현 습관이라고 하였다. 이 문제는 1×1 행렬과 상수를 동일시 하는 것과 유사한 상황이라고 생각된다.

두 번째 정의 과정에서의 등호 사용에 대한 것이다. '실수 a는 $a+0i=a+0=a$이므로~' 와 같이 실수를 정의하는 과정에서 등호를 사용하고 있는데 용어를 정의할 때 등호의 의미는 여러 가지 해석이 가능하고, "이므로~"의 필연성 표현은 논리적 비약에 해당된다고 생각할 수 있다.

이런 맥락에서 순허수의 정의 역시 유사한 문제를 내포하고 있다.

<표Ⅳ-2> 순허수의 정의의 예

	순허수의 정의방식
적절한 정의	① 실수부분이 0인 복소수 $0+bi\ (b\neq0)$를 bi와 같이 쓰고 순허수라고 부르기로 한다. ② $a=0$일 때 $0+bi$는 간단히 bi로 나타낸다. ③ $a=0,\ b\neq0$인 복소수를 순허수라고 한다.
부적절한 정의	④ 복소수 $0+bi\ (b\neq0)=\ bi$꼴의 복소수를 순허수라고 한다. ⑤ 복소수 $a+bi$에 대해 $a=0,\ b\neq0$일 때 복소수 bi를 순허수라고 한다.

위에서 부적절하다고 생각되는 정의는 정의하는 과정에서 논리적인 비약(gap)이 보이는 정의로서, ④⑤번은 '$0+bi\ (b\neq0)=\ bi$를 직간접으로 암시하고 있다. 등호의 의미가 약속인지, 필연적 결과인지 모호한 가운데 다소 필연적 결과인 듯한 의미를 갖는 등호 표현은 적절치 않다고 보인다.

다. 복소수의 사칙 연산

1) 복소수의 덧셈·뺄셈·곱셈

복소수의 사칙연산을 설명하는 과정에서 대부분의 교과서에서는 '허수단위 i를 문자와 같이 생각하여~' 계산하라는 표현을 하고 있다.

(가) 연산 과정에서의 '문자' 라는 표현

'허수단위 i를 문자와 같이 생각하여~' 의 '문자' 의 의미는 무엇이며 이 '문자' 를 어떻게 연산할 것인지에 대해 학생들은 의문을 가질 수 있다. 복소수의 연산은 확장된 복소수의 집합에서 연산이 새롭게 정의되고 있으므로 '문자'의 의미가 복소수 범위의 어떤 값을 의미하는 것으로 가정할 수 있지만 교과서에서 서술한 $(a+bi)+(c+di)$에서 i를 문자로 생각한다는 의미는 i를 실수 집합의 미지수 x와 같은 실수의 한 원소로 생각하라는 뜻으로 해석된다. 그러나 앞의 허수단위의 정의에서 i는 실수가 아닌 새로운 수임을 분명히 하였으므로 이는 $i\notin\mathbb{R}$라 하고, $i\in\mathbb{R}$처럼 생각하라는 다소 난해한 표현을 하고 있는 것이다.

이것은 결과만을 보고 생각하면 마치 실수처럼 보인다는 뜻이므로 원리(정의)와 결과를 비교하여 충분한 설명, 즉 그런 식의 정리된 결과에 대한 이해는 단순한 기억술에 불과함을 이해시키는 설명이 있어야 그 자체가 논리적 추론이 아님을 이해할 수 있을 것이다.

(나) 연산 기호의 엄밀성 문제

이 문제는 앞서 지적한 덧셈기호와 구분기호의 불분명한 구분처럼 유사한 기호를 사용하여 문제를 일으킨 것으로 생각되는데, 가령 복소수의 덧셈 연산을 예로 들어 볼 때, $(2+3i)+(4+5i)$라는 식이 주어진다면, $(2+3i)+(4+5i)$를 실수 범위에서 생각하여 미지수 i에 관한 다항식 연산으로 보고 계산하여 $6+8i$라는 답을

도출해 낼 수 있다.

그러나 두 복소수의 합의 기호 +는 엄밀히 보면 실수에서의 합의 기호 +와는 연산의 정의역이 다르므로, 복소수의 합은 ⊕를 쓴다면 (2+3i) ⊕(4+5i)를 그렇게 계산하지는 못할 것이다. 즉 복소수의 덧셈의 정의가 반드시 필요함을 느낄 수 있을 것이다.

2) 복소수의 나눗셈

복소수의 나눗셈에서는 논리적인 입장으로 볼 때 논리적 비약이 염려된다. 가령 실수의 나눗셈에서는 분자와 분모에 0이 아닌 같은 수를 곱하여도 결과에 변함이 없음을 배운 후에 이것을 활용하지만 복소수의 나눗셈에서는 켤레복소수를 이용하여 연산이 이루어질 때 어느 교과서도 이러한 성질을 확인해 주지 않고 있다. 따라서 교과서의 서술이 비약 없이 순차적이고 논리적으로 서술되고 있는지에 대해 살펴보았다. 복소수의 나눗셈의 정의는 다음과 같다.

나눗셈의 정의

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\,i(\text{단},\ c+di \neq 0)$$

[그림 Ⅳ-1] 복소수의 나눗셈의 정의

16종의 교과서 분석 결과 복소수의 나눗셈을 정의하면서 다음과 같은 설명을 하고 있다.

"복소수의 나눗셈은 복소수와 켤레복소수의 곱이 실수임을 이용하여 분모의 켤레복소수를 분자와 분모에 곱하여 계산한 것과 같다."

이러한 설명과 함께 나눗셈 연산을 정의한 후 켤레복소수를 이용한 계산과정을 보여주고 있다. 즉, 나눗셈의 연산은 분수의 형태로 나타나는데 분수로 표현하고 계산하는 것에 대한 기초 자료를 제공해 주는 것이 좋을 것이다. 또 켤레복소수를 이용하여 분자, 분모에 복소수의 나눗셈 연산을 하는데 여기서 학생들은 수체계가 확장되었다고 생각하기보다 그저 실수에서의 분수 계산을 복소수도 똑같이 대입하여 계산한다 생각을 가지게 된다. 이러한 논리적인 비약(gap)을 생각하기 전에 논리적으로 엄밀한 나눗셈 연산에 대한 서술이 이루어진다면 훨씬 자연스럽고 논리적인 교과서의 전개가 이루어질 것이다.

2. 복소수 정의와 연산의 서술 방식에 대한 개선 방안

가. 허수 단위 i의 도입과 음수의 제곱근

위의 연구문제 1에 대한 교과서의 서술을 살펴본 결과 그에 대한 개선 방안은 다음과 같이 제시할 수 있다.

우선 기호 사용의 대한 개선 방안은 다음과 같다. 현재 교과서의 전개를 그대로 따른다면, 허수 단위의 도입 시 근호 안에 음수가 존재할 수 있음을 교과서에 명시해 주고, 그것이 이차방정식 $x^2+1=0$의 '두 개의 해' 중에 하나인 $\sqrt{-1}$이라는 값이라는 것을 알게 하는 것이다. 즉, 중학교 과정에서 다루었던 제곱근의 의미를 생각하여 직관적으로 유추해 나가면서 $x^2+1=0$의 해를 $x^2-2=0$의 해를 구할 때와 같은 방법으로 추측한다. 이 때 방정식의 두 해는 $x=\sqrt{-1}$ 또는 $-\sqrt{-1}$인데 실수 범위에서는 어떤 수도 제곱하여 음수가 될 수 없으므로 이 두 값 중 어느 것도 실수가 될 수 없다. 따라서 이들은 새로운 수로 정의해야 하며 그 새로운 수를 두 해 중 하나인 $\sqrt{-1}$을 선택하여 하나의 단위인 i로 적기로 하고 이것을 허수 단위라고 한다는 설명이 필요하다.

그러나 이것이 새로운 수임을 더 분명히 하기 위해 ∧-1 , -∧-1과 같은 기호를 사용해도 좋을 것이다. 즉 제곱근은 근호 안의 수가 양수일 경우만 사용하지만 음수인 경우도 그와 비슷한 모양의 새로운 수일 수밖에 없음을 분명히 하기 위함이다.

두 번째 $i=\sqrt{-1}$ 값의 결정에 대한 개선 방안은 다음과 같다. i가 $\sqrt{-1}$인지 $-\sqrt{-1}$인지에 대한 언급은 교과서마다 차이를 보이고 있는데 첫 번째 개선 방안은 켤레복소수의 의미를 알도록 방정식의 두 해 중에서 어느 것을 허수 단위로 정하더라도 성립함을 학생들이 이해할 수 있게 하는 것이다. 교과서의 설명과 같이 '새로운 수를 하나 정하는 것' 보다는 '방정식의 두 해가 존재하지만 그 중 기본이 될 것 같은 $\sqrt{-1}$을 i로 둔다' 는 것을 보여주고 $-\sqrt{-1}$에 대한 언급을 해주는 것이 좋다. 두 번째 순서쌍을 도입하여 허수 단위의 값을 결정하는 방안을 생각할 수 있다. 순서쌍에 의한 사칙연산을 정의한 후 $(0,1)$을 i로 적기로 약속하고 $(0,1)^2=-1$이 됨을 보인 후 $(a,b)=(a,0)+(0,b)=$ $(a,0)+(b,0)\cdot(0,1)=a+bi$가 되어 순서쌍을 $a+bi$와 같은 대수적 표현으로 바꾸어 주면 $(a,b)=a+bi$가 되고 이 때, $(0,1)=i$라고 허수 단위로 정의할 수 있다. 세 번째 방안은 삼차방정식을 이용하여 도입하는 것인데 페로가 삼차방정식 $x^3+6x=20$의 해를 구하는 과정에서 하나의 실근 $x_1=2$와 두 근 $x_2=-1+3\sqrt{-1}$, $x_3=-1-3\sqrt{-1}$을 가지게 된다는 것을 발견하였는데 이 때 실근이 아닌 나머지 두 근은 항상 짝을 이루어서(켤레) 존재하므로 이 때 $\sqrt{-1}$을 i로 두기로 약속하였다고 해 주는 것이다.

세 번째 음수의 제곱근의 정의 과정에 대한 개선 방안은 다음과 같다.

양수의 제곱근의 정의에서는 $a>0$일 때, $x^2=a$의 해는 $\pm\sqrt{a}$이며 여기서 $x^2=-a$의 제곱근을 직관적으로 유추해 낼 수 있다. 그러나 여기서 $a>0, b>0$일 때,

$\sqrt{(-a)}\sqrt{(-b)}=-\sqrt{ab}\neq\sqrt{(-a)(-b)}$가

되어 실수에서는 가능하던 성질이 성립하지 않게 되면서 이러한 음수의 제곱근의 표현에 대한 사용은 문제를 일으킨다. 즉, 16종의 교과서 중 3종(약 19%)만이 위와 같이 일반적으로 임의의 양수 a에 대하여

" $(\sqrt{a}i)^2=-a$, $(-\sqrt{a}i)^2=-a$이므로

$-a$의 제곱근은 $\pm\sqrt{a}i$" 로 표현하여

$\sqrt{-a}$라는 표현을 사용하지 않고 있다. 음수의 제곱근이나 근호 안에서 음수 사용은 유추에 의해 $\sqrt{-a}$의 형태로 사용할 수도 있으나 분명 새로운 수이며, 양수 제곱근의 연산법칙을 따르지 않으므로 이런 유사표현 보다는 허수 단위 i를 사용한 $\sqrt{a}i$로 고쳐서 사용하는 것이 음수의 제곱근과 관련된 연산을 정확히 공부하는 방법이 될 수 있다. 이것은 음수의 제곱근을 가지는 이차, 삼차 방정식에서 해를 구하는 데에도 확장되어 적절히 적용될 수 있다.

또 교과서마다 음수의 제곱근을 정의하는 위치나 방식, 내용에서도 차이를 보이고 있는데, 바른 논리적 전개를 위한 것이라면 바람직해 보이나, 간혹 그렇게 이해할 만한 타당한 이유를 찾을 수 없어 혼란스러운 경우도 있으므로 이에 대한 교과서 저자들의 신중한 검토가 요구된다.

다섯째, 음수의 제곱근을 다루려면 그 논의의 위치를 신중히 결정해야 한다. 복소수의 도입에서 허수 단위의 정의 직후에 $\sqrt{-1}=i$를 $\sqrt{-a}=\sqrt{a}i$로 두어 음수의 제곱근으로 일반

화할 경우 논리 순서상 그것은 성급한 전개인 경우가 많았다. 즉, $\sqrt{a}$와 i의 곱인지 복소수의 순허수 형태인 $\sqrt{a}i$인지 의문이 생기는 데 두 가지 모두, 아직 배우지 않은 상태이기 때문에 논리적 혼란이 발생된다. 이러한 혼란은 음수의 제곱근의 계산에도 영향을 준다. 따라서 음수의 제곱근을 다루기 위해서는 복소수의 사칙 연산과 연산에 관한 성질을 모두 다룬 후에 $\sqrt{-a}=\sqrt{a}i$를 정의하고 대수적 구조를 전체적으로 파악한 후에 연산을 이용하여 증명해 주는 것이 오류에 빠지지 않는 하나의 방법이 될 것으로 생각된다.

나. 복소수의 정의 방식

기호 구별에 대한 개선 방안은 복소수의 구분 기호에 덧셈 기호를 사용하지 않고 복소수를 정의해 보면 $a+bi$꼴의 복소수를 덧셈 기호가 아닌 다른 기호 ※를 사용하여 표현해 볼 수 있다. 즉, 복소수를 $a※bi$꼴의 수로 정의하고 여기서 $a※0i$는 실수가 된다. 교과서에서 만약 '실수 a를 $a※0i$로 나타낼 수 있으므로~' 라고 서술한다면 학생들은 $a※0i$이 왜 실수가 되는지 의문을 가질 수 있다.

교과서의 서술방식을 다시 살펴보면 다음과 같다.

$$a+bi=a+0i=a+0=a$$

↑ ↑ ↑

(구분기호) (구분기호) (연산기호)

다른 기호로 바꾸었을 때 :

$$a※bi=a※0i\rightarrow a$$

[그림 Ⅳ-2] 실수의 정의과정의 구분 기호의 예

위의 표에 따르면 등식에서 구분 기호와 연산 기호를 다르게 사용하고 있어 등식이 성립하지 않는다. 이러한 교과서의 서술 방식을 그대로 가르치게 되면 학생들은 복소수의 구분 기호를 덧셈 기호와 구분 없이 사용하고 실수에서의 연산과 같이 정의된 덧셈 연산을 하게 된다. 이것은 수학적 입장에서 논리적 비판 능력이 무뎌지게 할 우려가 있다. 이러한 사고는 교수학적 극단현상의 '토파즈 효과'(Topaze effect)에 해당한다고 생각할 수도 있는데 교과서 저자는 실수의 정의 과정에서 이미 구분 기호를 덧셈 기호로 파악하여 $a+bi=a+0i=a+0=a$과 같은 설명으로 학생들의 이해를 유도해 내고 있어 이러한 설명은 마치 $a+bi$가 $b=0$이 되면 a라는 결과가 유도된다는 해답을 제시해 주어 학습자들이 이러한 지식의 구성 과정을 그대로 따라오기를 바라는 것과 같다. 이러한 사고는 학생들이 스스로 탐구하여 문제 해결을 위한 방법을 찾아내고 그것을 통해 수학적 지식을 구성하고자 하는 교수학적 상황과는 거리가 있다고 할 수 있다. 따라서 교과서에서는 구분 기호와 연산 기호를 구별하여 '$a+0i$는 a로 적기로 한다' 는 약속과 같은 서술을 해 주는 것이 적절할 것으로 생각된다.

등호 사용에 대한 개선 방안은 다음과 같다. 등호는 원래 산술의 한 과정에 대한 결과를 나타내거나 '대칭화' 시킬 수 있는 기호이며 정의를 하기에는 어색할 수 있다. 따라서 정의를 할 때에는 등식을 사용하기보다는 '하기로 한다' 는 언어적 설명을 통해 약속하는 것이 좋다.

실수의 경우 등호를 사용하지 말고 '복소수 $a+bi$에서 $b=0$일 때 $a+bi=a+0i$인데, 이와 같은 복소수는 간단히 a로 적기로 한다' 라고 서술하는 것이 보다 나은 서술방식이며 이 때 'a는 실수이고 $a+0i$는 복소수이므로 모든 실수 a는 복소수의 특별한 경우'라고 볼 수 있다. 여기서 세부적인 문제는 언급하지 않고 다음 주제로 이동할 수도 있으나(설명이 난해해질 뿐 아니라, 결과적으로 구조적 문제는

없으므로) 구조적 문제에 대한 부연 설명을 하려면 다음과 같은 대안을 생각해 볼 수 있다.

다. 복소수의 사칙연산

1) 복소수의 덧셈 · 뺄셈 · 곱셈

(가) '문자' 라는 표현에 대한 개선 방안

문자는 수와 일상 언어와는 구별되며 수학에서는 일반성, 유연성, 정확성을 가지고 있다. 또 일반적으로 어떠한 연산을 할 때에는 그 연산이 정의된 집합이 존재한다. 중학교 3학년 수준에서 연산이 정의된 집합은 실수 집합으로 실수 범위에서 모든 연산이 이루어진다. 이렇게 연산이 이루어지는 집합이 정해지고 그 대상 집합 안에서 연산이 이루어지므로 문자 또한 사용되는 범위가 달라진다. 따라서 '문자'로 생각하여 연산하는 것에 대한 명확한 이해를 위해서는 그 연산의 범위를 알고 있어야 한다. 교과서에 만약 문자를 실수 범위의 문자를 상징하는 값으로 본다면 복소수에서 문자만 실수 범위의 문자를 다루었으므로 앞뒤가 맞지 않는 표현이다. 복소수 범위의 문자를 상징하는 값이라면 복소수 범위의 수를 어떻게 문자로 두겠다는 약속이 아직 없었으므로 그 문자를 어떻게 연산하는지에 대한 정의가 필요하다. 따라서 복소수의 연산에서 '문자'가 상징하는 것은 문맥 속에서 분명하고 정확하여야 하며 어떤 집합을 대상으로 하는지 분명하게 제시하여야 한다.

(나)기호의 엄밀성에 대한 개선 방안

$$(2\ ATT\ 3i) \oplus (4\ ATT\ 5i) = (2+4)\ ATT\ (3+5)$$

↑ (복소수의 덧셈기호) ↑ (실수의 덧셈기호) ↑ (실수의 덧셈기호)

$$= 6ATT8i$$

[그림 Ⅳ-3] 복소수의 덧셈에서 기호의 구분

위의 연산 결과에서 보는 바와 같이 복소수의 덧셈은 새로운 연산 방법이므로 복소수 덧셈의 결과가 실수에서의 연산 결과와 결국 같아지더라도 연산을 정의할 때는 그 생성 과정을 보여주어 단원의 마지막에서 수체계의 확장에 따른 구조가 같아짐을 알게 하는 것이 좋을 것이다.

곱셈 연산의 정의도 실수의 곱셈 연산과는 다른 새로운 수 체계에서의 연산에 대한 정의이다.

$$(aATTbi) \otimes (cATTdi) = (ac-bd)\ ATT\ (bc+ad)i$$

↑ (복소수의 곱셈기호) ↑ (실수의 뺄셈기호) ↑ (실수의 덧셈기호)

[그림 Ⅳ-4] 복소수 곱셈에서의 기호의 구분

실수에서 분배법칙을 이용하여 전개한 것과 같이 곱셈 연산이 정의되었다고 이해하기보다 새로운 하나의 값을 생성하는 정의로 생각된다. 따라서 곱셈 연산도 새롭게 정의하고 연산 기호와 구분 기호를 구별하여 충분히 설명한 후 정의를 알게 한다. 이러한 기호의 구분은 복소수의 대수적 구조와 유사하게 같아진다는 결과와 함께 '⊗'연산이 실수에서의 곱셈 연산과 구조적으로 같으며 구분 없이 쓰기로 한다고 결론지으면 될 것이다.

2) 복소수의 나눗셈에 대한 개선 방안

우선 우리나라 교과서의 경우 복소수의 나눗셈을 분수의 형태를 취하고 있는데 이를 위해서는 먼저 곱셈의 역원을 소개하는 것이 좋다. 즉 $(a+bi)(A+Bi)=1$이 되는 A와 B를 a, b로 각각 나타내게 하는 것이다. ,

$B=\frac{-b}{a^2-b^2}$를 넣어 곱셈의 정의에 따라 결과를 얻으면 1임을 확인하게 하여 A+Bi를

$\frac{1}{a+bi}$로 적기로 하고, (a+bi)÷(c+di)를 (a+bi) $\frac{1}{c+di}$로 정의한 후에 이를 간단히 $\frac{a+bi}{c+di}$로 적기로 하고, 곱셈의 정의를 이용하여 이를 계산한 필연적 결과가 현재 교과서에서 사용하는 나눗셈의 정의가 되도록 서술하는 방법을 말한다. 결국 나눗셈의 정의는 모든 나눗셈의 정의 대신 1÷(복소수) 꼴, 역원의 모양만 정의하는 것이다.

이 방법은 후에 복소수의 대수적 구조를 설명할 때 편리할 뿐만 아니라 나눗셈 자체의 엄밀한 논리 전개를 위해서도 도움이 되는 방법이다.

현재 대개의 교과서는 복소수의 나눗셈에서 켤레복소수를 이용하고 있는데 분모를 실수화하는데 이용하려는 것으로 보인다. 그러나 이 과정에는 (복소수)÷(실수) 꼴의 나눗셈, 분자 분모에 같은 $0+0i$ 아닌 복소수를 곱했을 때의 결과의 불변성 등 여러 가지 확인해 두어야 할 성질들이 생략되어 있으며 이것은 복소수의 대수적 구조가 이후에 나온다는 점에서(반드시 이런 나눗셈의 성질 전에 구조 소개가 되어야 하는 것은 아니나 그것이 순서상 더 체계적으로 보인다는 뜻) 논리적 비약이 있다고 볼 수도 있다. 즉 대부분의 학생들이 이 과정을 실수에서의 유추에 의존한다고 할 때, 이에 관한 빈틈없는 논리 전개는 학생들의 수학에 대한 논리성과 엄밀함을 유지할 수 있게 하는 원동력이 될 수 있기 때문이다. 따라서 교사는 켤레복소수의 사용 전에 다음과 같은 많은 증명들이 먼저 제공될 필요가 있음을 인지하여야 하고, 따라서 켤레복소수에 관한 논의는 대수적 구조의 소개 이후에 실수와 같이 취급하는 문자 i의 사용과 함께 소개하는 것이 더 좋을 것이다..

우선 $\frac{e+fi}{e+fi}=1$은 개선안을 따른다면 정의에 의해 곧 확인되고, $(a+bi)\cdot(1+0i)=a+bi$를 간단히 확인시켜 $1+0i$가 항등원임을 미리 느끼게 해 줄 수 있다.

위의 증명 후에 결합법칙을 소개한다면 다소 장황한 계산 (a+bi)(c+di)(e+fi)이 필요하다. 그러나 $\frac{a+bi}{c+di}=\frac{a+bi}{c+di}\times\frac{e+fi}{e+fi}=\frac{(a+bi)\cdot(e+fi)}{(c+di)\cdot(e+fi)}$를 증명하려면 결합법칙을 미리 확인해 두어 아래와 같은 방법으로 하는 것이 수고를 덜 수 있다.

즉, 복소수에서의 대수적 구조에 대한 설명(결합법칙, 역원 등)이 이루어지고 난 후에는 두 복소수 z_1, z_2에 대하여 두 복소수의 곱 z_1z_2와 그 역원 $\frac{1}{z_1z_2}$에 대하여 다음을 보자.
(이 때, 각각의 복소수의 항등원, 역원의 존재성은 이미 이루어졌다고 본다.)

$$\left\{(z_1z_2)\cdot\frac{1}{z_2}\right\}\cdot\frac{1}{z_1}=\left\{z_1\left(z_2\cdot\frac{1}{z_2}\right)\right\}\cdot\frac{1}{z_1}=$$

$(z_1\cdot 1)\cdot\frac{1}{z_1}=1$이므로 $\frac{1}{z_1z_2}=\frac{1}{z_2}\cdot\frac{1}{z_1}$이 된다.

(곱셈에 대한 역원을 이용) 그 결과

$$\frac{z_2\omega}{z_1\omega}=(z_2\omega)\cdot\left(\frac{1}{\omega}\cdot\frac{1}{z_1}\right)=$$

$$z_2\cdot 1\cdot\frac{1}{z_1}=\frac{z_2}{z_1}=\frac{z_2}{z_1}\cdot\frac{\omega}{\omega}$$

이다. 즉 $\frac{a+bi}{c+di}\times\frac{e+fi}{e+fi}=\frac{(a+bi)\cdot(e+fi)}{(c+di)\cdot(e+fi)}$를 이렇게 증명할 수 있다.(직접 증명은 너무 장황해 진다.)

즉, 복소수 분수의 분자, 분모에 어떠한 복소수를 같이 곱하여도 그 값이 보존됨을 알았으므로 켤레복소수를 분자, 분모에 곱하는 것에 대해서는 논리적인 비약(gap)이 줄어들게 되고 사고의 확장이 이루어질 수 있다.

여기서 복소수의 나눗셈에서 분모가 실수가 될 경우에 대한 예를 제시해 주는 것이 좋다. 어떤 수와 그 켤레복소수를 곱했을 때 결과는

실수가 되므로 간단한 예를 통하거나 꼴이 이렇게 된다는 정도로 다루어 주어도 좋을 것이다.

> (복소수)÷(실수)의 경우를 생각해 보자. 만약 분모가 실수로 주어진다면 나눗셈의 정의에 의하여 $\frac{a+bi}{c} = \frac{a+bi}{c+0i} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}i$이 되어 실수부분과 허수부분을 가지는 복소수의 형태가 될 것이다

이제 켤레복소수를 이용하여 분모의 켤레복소수를 분자, 분모에 곱하여 계산한 결과가 복소수의 나눗셈이라는 새로운 연산의 정의와 같아짐을 설명할 준비가 되었다고 할 수 있다. 따라서 켤레복소수를 이용하여 교과서의 서술과 같이 계산하여 그 결과가 나눗셈 연산의 정의와 같고 복소수의 나눗셈을 계산할 때에 켤레복소수를 이용하면 편리하게 계산할 수 있음을 알게 한다. 따라서 나눗셈에 대한 대수적 구조가 실수에서의 구조와 같이 분수의 형태로 계산이 가능함을 알 수 있다.

위의 복소수의 나눗셈에 대한 개선 방안을 통해 교과서의 전체적인 전개 순서에 대한 두 가지 방안을 생각해 보았다.

첫 번째, 기존의 교과서 전개 순서대로 나눗셈을 정의하고 전개 하되 부족한 부분의 수정, 보완이 이루어지도록 하는 것이다. 두 번째 방안은 대학 수학에서 복소수의 대수적 기본 성질을 다룰 때에는 현재 고등학교의 전개 순서와는 차이가 있으므로 순서를 바꾸어서 논리적인 비약(gap)을 줄이고자 하는 것이다. 현재 고등학교 교과서의 서술 방식은 복소수의 사칙연산을 정의하고 연산에 대한 기본 성질을 서술하고 있으므로 대학 교재의 다음과 같은 순서의 전개 방식을 따르게 되면 그 방법이 달라지지만 위에서와 같이 복소수 분수나 복소수 분수에서의 여러 가지 성질을 증명하지 않고 유도할 수 있는 좋은 방법이라 할 수 있다. 또 왜 켤레복소수를 곱해야 하는지, 나눗셈을 분수꼴로 나타낸 이유에 대하여도 어느 정도 해결의 실마리를 찾을 수 있을 것이라 생각된다.

위의 두 가지 방안을 참고하여 현재 고등학교 교과서의 복소수 단원의 전개를 다음과 같이 새롭게 구성해 볼 수 있다.

① 허수 단위 i의 도입
② 복소수의 정의(실수, 허수, 순허수와 $1i, 0i, (-1)i$의 정의 포함)
③ 복소수의 상등과 켤레복소수의 정의
④ 복소수의 덧셈, 곱셈의 정의와 덧셈, 곱셈에 대한 항등원, 역원
⑤ 덧셈, 곱셈에 대한 결합, 교환, 분배법칙
⑥ 덧셈에 관한 역원을 이용한 뺄셈의 정의
⑦ 곱셈에 관한 역원을 이용한 나눗셈의 정의
⑧ 복소수와 실수의 구조적 성질 비교
⑨ 나눗셈을 켤레복소수를 이용하여 구하고 두 결과를 비교하기
⑩ 복소수의 사칙연산을 실수연산과 연결(구조적 성질의 보존)
⑪ 음수의 제곱근의 성질

위와 같은 순서로 전개해 나간다면 정의와 연산에 대한 논리적 비약(gap)을 줄이고 수체계의 확장을 시켜나갈 수 있으며 나눗셈의 정의를 역원을 이용하여 정의할 수 있어 복소수 분수와 같은 부연설명을 이용하지 않아도 될 것이므로 자연스러운 전개 순서가 될 수 있을 것으로 생각된다.

Ⅴ. 결론 및 제언

복소수 이론은 수학적으로 매력적일 뿐만 아니라 다른 학문에도 매우 유용하다. 또 복소수는 교류와 관련된 계산을 효과적으로 수행할

뿐만 아니라 공기역학이나 유체역학에도 이용되며 아인슈타인의 상대성 이론에서도 복소수가 유용하게 사용되고 있다.

본 연구에서는 복소수 단원의 교과서 서술방식이 학생들의 '수준'에 적합하며, 교과서의 전체적인 흐름으로 보아 수의 대수적 구조를 파악하고자 하는 단원의 목표에 적합하도록 교과서의 내용이 수학적으로 정확하고 논리에 맞게 전개되고 있는지 살펴보았다.

복소수의 정의와 연산, 연산에 관한 성질을 다룬 후에는 단원의 마지막 부분에서는 수 체계의 확장에 따른 대수적 구조의 보존이 이루어짐을 설명해 주어야 할 것이다. 즉, 현재 교과서의 흐름으로 보았을 때 고등학교 1학년 학생들의 '수준'이 대수적 구조의 파악이 가능하고 대수적 구조가 보존됨을 이해할 수 있는 수준에 이르렀다고 보고 단원의 목표가 수를 알기보다는 수의 전체적인 구조를 파악하여 수학에 대한 안목의 확장을 이루고자 하는 것이라고 본다면 본 단원의 학습을 통해 학생들은 사고의 범위를 스스로 확장해 나가고 그것이 성립함을 각각 수학적인 형식과 법칙을 밝혀냄으로서 논리적 사고의 확장으로 자신의 사고에 대한 확신을 갖게 하는 것이 필요하다.

본 연구에서 주요 관점으로 살펴본 교과서의 서술방식에 대한 논리적인 정확성과 순환논리는 오류가 생길 수 있는 가능성이 있으며 교과서상의 서술방식에 대한 논리적 비약(gap)은 오류가 아닐 수는 있으나 학생들이 이해하는 데에 있어 논리적으로 전후가 맞지 않는 전개 과정이다. 즉, 'A이면 B이고, B이면 C가 되므로 A이면 C이다' 라는 전개에서 만약 B가 옳지 않으면 이 비약은 학생들로 하여금 논리적인 오류를 유도하는 비약이 될 수 있는 것이다. 이것은 수학적 사고에 논리적 사고가 내재된 수학적인 학습 내용은 학생들이 이해할 수 있는 수준 내에 있어야 한다는 뜻으로도 해석할 수 있다.

복소수 단원을 마친 후 복소수까지 확장된 수의 범위에서 그 대수적 구조를 느끼게 하여야 하는데 집합 연산과 실수 연산, 복소수 연산의 연산 체계를 서로 비교하고 관련된 법칙들이 상호 유사함을 느낄 수 있으면 된다는 의미로 생각할 수 있다. 만약 이러한 대수적 구조의 보존에 대한 구체적인 설명 없이 현재의 교과서 서술처럼 '실수에서도 복소수에서와 같이~'라는 한 문장의 표현으로 수 체계의 확장에 따른 대수적 구조를 학생들이 파악하기를 바라면서, 그 결과 학생들이 복소수 계산을 능숙하게 한다는 것만으로 대수적 구조를 잘 이해하고 있을 것으로 판단하는 것은 교수학적 극단 현상의 '쥬르뎅 효과(Jourdain effect)'에 해당한다고 생각할 수 있다. 복소수 단원의 교과서 서술 방식 또한 단지 복소수의 정의, 연산, 연산에 관한 성질의 순서로 직관적인 유추의 과정을 통해 확장해 나가고 있지만 교과서 저자는 이러한 교과서의 전개를 통해 복소수의 수 체계에 대한 구조를 이해하기를 바란다. 또 그러한 구조를 이해했다고 생각한다. 이미 본 연구에서 살펴 본 실수와 순허수의 정의가 그러하며 복소수의 사칙연산의 연산 과정은 복소수와 실수의 두 수 체계의 확장에 따른 구조의 보존이 이루어졌다는 전제 하에 복소수의 연산이 실수의 연산과 유사한 방법에 의해 이루어지고 있다. 복소수의 대수적 구조를 파악한 학생이 아니라면 복소수의 곱셈연산에서 실수의 분배법칙과 같이 계산할 때, 이 연산이 복소수라는 새로운 수에서의 연산에 대한 성질을 이해한 후 계산한 것이라 이해하기 학생에게는 단지 '형식적인 계산 과정'으로 보여질 뿐이다. 이러한 교수학적 극단 현상은 학생들로 하여금 혼란을 가중시키기에 충분하다. 따라서 교수학

적인 변환을 위한 지식의 재구성을 위해 교과서 저자와 교사는 이러한 교과서의 서술방식에 주의를 기울여야 할 것이다.

따라서 단원의 마지막에 다루어져야 할 내용을 정리해 보면 다음과 같다.

복소수의 덧셈, 뺄셈, 곱셈은 연산을 우선 정의하고 연산 기호와 구분 기호를 잘 구별할 수 있도록 그에 대한 설명이 필요하며 정의에 의한 연산의 결과를 통해 대수적 구조의 보존이 성립함을 학생들이 인식할 수 있다. 여기서 연산을 정의하고 계산이 이루어진 후 복소수의 연산이 실수의 연산과 유사하다는 것을 알 수 있는 예를 들어 보이는 것이 필요하다.

덧셈의 경우 복소수의 덧셈을 정의하고 단원의 마지막에서 허수 단위 i를 마치 실수 범위에서 미지수 x와 같이 생각하여 동류항끼리 더하는 방법으로 '실수부분끼리 계산하고 허수부분끼리 계산한 것과 같다'는 설명으로 두 수 체계의 구조적 동질성이 연산법칙의 통일성으로 이어짐을 설명할 수 있다.

곱셈의 경우도 마찬가지로 마지막에서 i를 실수에서의 미지수 x와 같이 보고 실수범위에서 분배법칙을 이용하여 계산하여 $i^2 = -1$을 대입한 결과가 곱셈의 연산에 대한 정의와 같아짐을 보여줄 수 있다. 여기서 분배법칙을 이용하는 것은 복소수 연산의 성질이 아닌 실수체계에서의 분배법칙임을 알고 있어야 한다. 이 때, 학생들은 직접 실수 체계와 복소수 체계를 직접 비교하고 확인하는 과정을 거칠 수 있게 될 것이고 교과서의 전체적인 흐름에 따른 단원의 목표를 수립하는데 도움이 될 것이라는 것으로 해석된다.

이러한 결론을 바탕으로 복소수 단원 전체의 서술 방식의 몇 가지 대안을 제시하고자 한다.

첫째, 중학교까지 정수에서 유리수, 유리수에서 무리수로 직관적인 방법에 의해 확장 과정을 거친 것과 같이 복소수 또한 비형식적인 방법 즉, 직관적인 방법으로 서술해 주는 것이다. 이 때는 항등원, 역원, 교환, 결합, 분배 법칙의 서술은 하지 않는 것이 더 적절하며 대신 $\sqrt{-a}\sqrt{-b} \neq \sqrt{ab}$와 같은 복소수의 성질을 언급한 후 $\sqrt{-a} = \sqrt{a}i$가 됨을 설명해 주어야 한다. 그리하여 허수 단위를 자연스럽게 정의하고 허수의 크기 표현(대소 관계) 또한 이루어질 수 없음을 가르칠 수 있다. 즉, 과거 중학교 과정에서와 같이 직관적인 확장과정을 거치되 복소수에는 예외적인 사항이 있음을 보여주는 전개를 하는 방법이 있다.

둘째, 현재 교과서의 흐름대로 실수단원까지 항등원과 역원, 여러 연산법칙들을 소개하고 복소수의 정의와 연산을 정의하고 난 후 곧바로 복소수의 연산법칙 즉, 연산에 대한 성질을 증명하게 한 후 계산이 이루어지도록 하는 방법이다. 즉, 복소수의 정의 ⇒ 구조의 파악 ⇒ 복소수 연산의 구체적인 계산의 순서로 다루어지게 되면 현재 복소수의 정의 ⇒ 구체적인 계산 ⇒ 구조의 파악하는 것과는 차이가 있을 것으로 보인다. 즉, 대수적인 구조를 파악한 후 계산을 하게 되면 계산에 치중하기보다는 실수에서의 대수적 구조가 복소수에서 어떻게 보존되었고 그 구조를 어떻게 적용할 것인지 실수체계와 직접 비교가 가능해지기 때문이다. 따라서 이러한 방법도 교과서의 수정이 이루어진다면 생각해 볼 문제이다.

마지막 대안으로는 현재 교과서의 골격을 그대로 유지하되 본 연구에서 지적한 사항들을 수정, 첨가하여 바르게 고쳐서 서술하는 방법이다. 교과서의 분량만을 생각하여 내용의 삭제, 감소하여 수학적으로 논리에 맞지 않게 생략하여 다루기보다는 학생들이 이해할 수 있는 범위에서 그 순서와 서술방식을 생각하여 부분적인 수정을 통해 복소수라는 수의 전체적인

흐름을 파악할 수 있는 교과서가 될 수 있을 것이다.

본 연구의 결론에 대해 다음과 같은 제언을 하고자 한다.

본 연구에서는 여러 가지 복소수 단원의 문제점을 지적하고 개선 방향을 살펴보았지만 단지 교과서의 문헌 연구에 그쳤다. 여러 가지 대안에 의해 복소수 단원의 교과서의 재구성이 적절히 이루어지고 그러한 교과서에 의한 학습이 현재의 복소수 단원의 목표에 적합한지에 대해 좀 더 많은 연구를 기울일 필요가 있을 것이라 생각된다. 또한 허수 단위의 도입과 음수의 제곱근의 사용 등에 대한 다양한 사례 연구와 실제적인 실험 연구를 통해 학생들의 수학적 논리적이고 비판적인 사고가 향상될 것이라는 가정 하에 수 체계의 확상을 통한 대수적 구조를 파악이 학생들의 사고력 증진에 어떠한 도움이 되는지 실제 실험을 통해 확인해 보는 후속 연구도 해 볼 수 있을 것이다.

참고문헌

강영계(2007). **논리정석,** 도서출판 답계

강행고 외(2002). **고등학교 수학 10-가.** 동화사.

구광조 외(1992). **수학교육과정과 평가의 새로운 방향(NCTM-1989)**. 경문사.

김광수(2007). **논리와 비판적 사고**. 철학과 현실사.

김국태(2003). **실용 논리학**. 철학과 현실사.

김남희 외(2006). **수학교육과정과 교재연구.** 경문사.

김수환 외(2002). **고등학교 수학 10-가**. (주)지학사.

김응태 외(2001). **수학교육개론**. 서울대학교 출판부.

김홍기(2001). 7차 교육과정과 교과서의 문제점. **한국수학교육학회지 수학교육 40**(1), 139-159.

김홍기 · 이종철(2007). 제10-가 단계 수학에서 복소수 지도에 관한 연구. 대한수학교육학회 학회지 **학교수학 9**(2), 291-312.

류제광(1997). **복소수 지도에 관한 소고 -고등학교 교과 과정 중심으로-.** 경성대학교 교육대학원 석사학위논문.

류희찬 외(2007). **학교수학을 위한 원리와 규준(NCTM-2000).** 경문사.

박규홍 외(2002). **고등학교 수학 10-가.** (주)교학사.

박두일 외(2002). **고등학교 수학 10-가.** (주)교학사.

박배훈 외(2002). **고등학교 수학 10-가.** 법문사.

박세희 외(2002). **고등학교 수학 10-가.** (주)동아서적.

박영주(2005). **중등수학에서 문자의 효율적인 도입과 지도에 관한 연구**. 대구카톨릭 대학교 교육대학원 석사학위논문.

박윤범 외(2002). **고등학교 수학 10-가.** (주)대한교과서.

박재근(2007). **복소수 개념의 역사 발생적 접근 및 응용에 관한 연구**. 영남대학교 교육대학원 석사학위논문.

서정선(2002). **논리학의 첫걸음**. 서광사.

신현성 외(2002). **고등학교 수학 10-가.** (주)천재교육.

안범현(2006). **복소수에 관한 교과내용 연구 -교육과정을 중심으로-**. 경희대학교 교육대학원 석사학위논문.

양승갑 외(2002). **고등학교 수학 10-가.** (주)금성출판사.

우정호 외(2002). **고등학교 수학 10-가.** (주)대한교과서.

우정호(2000). **수학 학습-지도 원리와 방법.** 서울대학교 출판부.

이광복 외(2002). **고등학교 수학 10-가.** (주)새한교과서.

이방수 외(2002). **고등학교 수학 10-가.** (주)천재교육.

이석영(1998). **복소함수론.** 교학연구사.

이희선(2006). **Brousseau의 교수학적 상황론에 입각한 함수 지도의 상황 구성,** <7-가단계> 함수 도입 활용을 중심으로. 서강대학교 교육대학원 석사학위논문.

임재훈 외(2002). **고등학교 수학 10-가.** (주)두산.

장건수 외(2002). **고등학교 수학 10-가.** 지구문화사.

장봉규(2002). **복소수 사칙연산의 기하학적 의미.** 인하대학교 교육대학원 석사 학위논문.

정은주(2005). **제7차 교육과정에 따른 복소수 단원 지도 방안에 관한 연구.** 명지대 교육대학원 석사학위논문.

조영미(2001). **학교수학에 제시된 정의에 관한 연구.** 서울대학교 박사학위논문.

최봉대 외(2002). **고등학교 수학 10-가.** (주)중앙교육진흥연구소.

최상기 외(2002). **고등학교 수학 10-가.** (주)고려출판.

한상기(2007). **비판적 사고와 논리.** 서광사.

Bertrand Russell(2002). **수리철학의 기초.**(임정대 역). 서울: 경문사. (원전은 1919년에 출판)

Tall D.(2003). 고등 수학적 사고. (류희찬 외 공역). 서울: 경문사.(원전은 1991년에 출판)

Carney, J. D. & Scheer, R. K.(2007). 논리학 입문.(전영삼 역). 서울: 간디 서원.(원전은 1980에 출판)

Eves H. (1995). 수학의 기초와 기본 개념. (허민 외 공역). 서울: 경문사.(원전은 1990에 출판)

Brown J. W. 외 (2004). 복소함수론과 그 응용. (허민 역). 서울: 경문사.

Nahin P. (2004). $\sqrt{-1}$ 의 어제와 오늘 -허수 이야기-.(허민 역). 서울: 경문사. (원전은 1998년에 출판).

Alexander R. et. al. (2002). Functions and Relations. Addition-Wesley Ontario.(캐나다 온타리오 주 11학년 교과서)

Bocks H. & Walsch W. (2001). Mathematik Analysis. Oldenbourg.(독일 김나지움 2학년 교과서)

A Search for an Alternative Articulation and Treatment on the Complex Numbers in Grade - 10 Mathematics Textbook

Yang, Eun Young (Ewha Womens University, Graduate School)
Lee Young Ha (Ewha Womans University)

The complex number system is supposed to introduce first chapter in the first grade of high school. When number system is expanded to complex numbers, the main aim is to understand preservation of algebraic structure with regard to the flow of curriculum and textbook. This research reviewed overall alternative articulation and treatment of textbooks from a logical viewpoint.

Two research questions are developed below.

First, in the structure of the current curriculum, when we consider student's 'level', how are the alternative articulation and treatment of textbooks in complex unit on a logical point of view?

Second, What are more logical alternative articulation and treatment? What alternative articulation and treatment are suitable for a running goal? and what are the improvement which is definitive?

* key word : complex numbers(복소수), logical viewpoint(논리적 관점), imaginary unit(허수 단위), the square root of a negative numbers(음수의 제곱근), the definition of real numbers in complex number system(실수의 정의), definition of pure imaginary number(순허수의 정의), order relation of complex numbers(복소수의 대소 관계), multiplicative inverse of $a+bi$(곱셈에 관한 역원), the preservation of algebraic structure(대수적 구조의 보존)

논문접수 : 2008. 7. 9
논문수정 : 2008. 8. 28
심사완료 : 2008. 9. 4