응용통계연구 (2008)
21(5), 739–754

다중탈퇴모형과 절대탈퇴모형에서 전환 공식의 일반화

이항석[1]

[1]성균관대학교 보험계리학과/수학과

(2008년 7월 접수, 2008년 8월 채택)

요 약

다중탈퇴모형 연구에서 연(year) 기준의 다중탈퇴율과 연 기준의 절대탈퇴율을 상호 전환하는 방법에 집중되어 있다. 실제 실무에서는 월(month) 기준의 다중탈퇴율이 필요한 경우가 많으므로 본 논문에서는 연 기준의 절대탈퇴율을 월 기준의 다중탈퇴율로 전환하거나 연 기준의 다중탈퇴율을 월 기준의 절대탈퇴율로 전환하는 공식을 유도한다. 유도된 공식은 월 기준 대신에 일(day) 기준 또는 분기(quarter) 기준 또는 반기(semiannual) 기준 등으로도 전환 가능한 공식이다. 또한 월 기준의 절대탈퇴율에서 월 기준의 다중탈퇴율로 전환 가능한 공식도 제시한다. 절대탈퇴율에서 다중탈퇴율로 전환하는 과정에서 절대탈퇴율이 균등분포 가정(UDD: Uniform Distribution of Decrements)을 따른다고 한다. 다중탈퇴율에서 절대탈퇴율로 전환하는 과정에서는 다중탈퇴율이 UDD를 가정하는 경우와 상수탈퇴력 가정(Constant force assumption)을 따르는 경우로 나누어서 공식을 유도한다. 유도된 공식은 Bowers 등 (1997)에 있는 전환 공식의 일반적인 형태임을 확인할 수 있다. 또한 유도된 공식을 활용하여 수치 예를 통하여 자료를 이용하여 절대탈퇴율과 다중탈퇴율의 전환 과정을 설명하며 유도된 공식들의 차이점을 비교한다.

주요용어: 다중탈퇴율, 절대탈퇴율, UDD, 상수탈퇴력 가정.

1. 서론

생명보험회사에서 판매되는 여러 보험상품과 손해보험회사에서 판매되는 장기보험상품에서 사망에 대한 보험금 지급뿐만 아니라 해약에 대한 해약환급금 지급 및 장애 발생시 장애보험금 지급 등과 같은 여러 가지 원인에 따른 보험금 또는 환급금의 지급과 같은 현상을 다루기 위해서는 탈퇴 원인별 발생 확률이 필요하다. 생명보험계리에서는 이러한 확률현상을 다루기 위하여 다중탈퇴표(multiple decrement table) 또는 다중탈퇴모형(multiple decrement model)을 구축하여 다양한 보험상품의 보험료 및 준비금 계산에 활용하고 있다. 또한 퇴직연금 계리 분야 및 국민연금, 사학연금, 공무원연금과 같은 공적 연금의 추계 부분에서도 다중탈퇴모형은 중요한 업무 영역이다.

다중탈퇴표의 작성은 여러 가지 탈퇴 원인이 반영된 자료를 이용하여 만들어지므로 새로운 보험 상품을 개발할 때 또는 상품판매 초기에는 자료의 부족으로 다중탈퇴표를 만들기 어려운 점이 있다. 이러한 점을 극복하기 위하여 단일 요인에 의한 절대탈퇴표의 절대탈퇴율(absolute rate of decrement)을 이용하여 다중탈퇴표 또는 다중탈퇴모형으로 전환하는 방법에 대한 연구들이 이루어져 왔다. 절대탈퇴율은 다중탈퇴율(rate of decrement due to cause j)과 다르게 탈퇴를 특정한 요인만 고려하여 탈퇴 확률을 계산하는 과정으로 이루어져 있다. 또한 다중탈퇴표에 있는 다중탈퇴율을 절대탈퇴율로 전환하여 사용할

[1](110-745) 서울시 종로구 명륜동3가 53, 성균관대학교 보험계리학과/수학과, 조교수.
Email: hangsuck@skku.edu

필요도 있고 전환된 절대탈퇴율을 새로운 다중탈퇴표를 만드는데 이용될 수도 있다. 따라서 절대탈퇴율을 다중탈퇴율로 전환하는 방법과 다중탈퇴율을 절대탈퇴율로 전환하는 방법은 보험계리에서 중요한 부분인 것이다.

다중탈퇴모형에 대한 선행연구는 다음과 같다. Bowers 등 (1997)의 10장에서 다중탈퇴모형에 대한 자세한 설명과 절대탈퇴율과 다중탈퇴율의 전환과정에 대하여 포괄적으로 다루고 있다. Shiu (1987)는 리만 스틸지 적분(Riemann-Stieltjes Integration)을 이용하여 다중탈퇴율을 절대탈퇴율로 표현하는 일반적인 정의를 활용하여 절대탈퇴율을 다중탈퇴율로 전환하는 과정을 제시하였다. Daniel (1993)은 조건부 확률을 이용한 대안적인 절대탈퇴율을 정의하여 다중탈퇴모형과의 관계를 살펴보았다. Carriere (1994)는 다중탈퇴모형에 탈퇴원인들 사이의 종속성(dependency)을 반영한 연구를 진행하였다. 참고로 생명표의 작성 및 추정에 대한 연구는 Golbeck (1986)과 London (1997)에서 논의 되었다.

Bowers 등 (1997) 및 위의 선행 연구에서 발생기간이 연(year) 기준의 다중탈퇴율과 연 기준의 절대탈퇴율을 상호 전환하는 방법에 대한 연구에 집중되어 있다. 실제 실무에서는 월 단위 보험료를 적용하는 상품이 많고 준비금 계산이 월 단위로 이루어지는 경우가 많으므로 월(month) 기준의 다중탈퇴율이 필요한 경우가 많다. 따라서 본 논문에서는 연 기준의 절대탈퇴율을 월 기준의 다중탈퇴율로 전환하거나 연 기준의 다중탈퇴율을 월 기준의 절대탈퇴율로 전환하는 공식을 유도한다. 유도된 공식은 월 기준 대신에 일(day) 기준 또는 분기(quarter) 기준 또는 반기(semiannual) 기준 등으로도 전환 가능한 공식이다. 즉 단위기간에 상관없이 전환 가능한 공식이다.

또한 월 기준의 절대탈퇴율에서 월 기준의 다중탈퇴율로 전환 가능한 공식도 제시한다. 본 논문은 Shiu (1987)의 경우처럼 리만-스틸지 적분을 이용하여 다중탈퇴율을 표현하여 논의를 전개하였다. 다중탈퇴율을 리만 적분(Riemann Integration)으로 표현하는 것에 비하여 리만-스틸지 적분으로 표현하는 것이 일반적이기 때문이다.

본 논문의 구성은 서론에 이어서 다중탈퇴모형과 절대탈퇴모형의 기본 성질을 살펴보고 절대탈퇴율에서 다중탈퇴율로 전환하는 공식을 유도하고 다중탈퇴율을 절대탈퇴율로 전환하는 공식을 유도해 본다. 절대탈퇴율에서 다중탈퇴율로 전환하는 과정에서 절대탈퇴율이 균등분포 가정(UDD: Uniform Distribution of Decrements)를 따른다고 한다. 다중탈퇴율에서 절대탈퇴율로 전환하는 과정에서는 다중탈퇴율이 UDD를 따르는 가정하는 경우와 상수탈퇴력 가정(Constant force assumption)을 따르는 경우로 나누어서 공식을 유도한다. 유도된 공식은 Bowers 등 (1997)에 있는 전환 공식의 일반적인 형태임을 확인할 수 있다. 또한 유도된 공식을 이용하여 수치 예를 통하여 자료를 이용하여 절대탈퇴율과 다중탈퇴율의 전환 과정을 설명하며 유도된 공식들의 차이점을 비교한다.

2. 다중탈퇴모형과 절대탈퇴모형의 기본 성질

다중탈퇴율과 절대탈퇴율에서 서로 전환 가능한 공식을 유도하는데 필요한 다중탈퇴모형의 기본성질을 먼저 논의하고 절대탈퇴모형의 기본 성질을 살펴본다. 또한 확률을 표현하는데 필요한 리만-스틸지 적분의 특성을 다중탈퇴율에 적용하여 본다.

먼저 다중탈퇴모형에 대하여 살펴 보자. 다중탈퇴모형은 탈퇴 원인이 한 개가 아닌 m개로서 탈퇴 원인을 $j = 1, \ldots, m$으로 구별하여 표시한다. 연령이 x인 사람이 미래에 탈퇴가 발생하는 시점을 나타내는 확률변수 $T(x)$와 탈퇴 원인을 나타내는 확률변수 J로 다중탈퇴 현상을 표현한다. 시점 t 이내에 탈퇴원인 j에 의하여 탈퇴가 발생할 확률(다중탈퇴율)은 다음과 같이 정의된다.

$$ {}_tq_x^{(j)} = \Pr\left(T(x) \le t,\ J = j\right). \tag{2.1} $$

탈퇴 원인에 상관없이 시점 t 이내에 탈퇴가 발생할 총탈퇴율은

$$ {}_tq_x^{(\tau)} = \Pr\left(T(x) \le t\right) = \sum_{j=1}^{m} {}_tq_x^{(j)} \tag{2.2} $$

이 되며 총탈퇴율은 다중탈퇴율의 합과 같다. 시점 t 이후에 탈퇴가 발생할 확률은

$$ {}_tp_x^{(\tau)} = \Pr\left(T(x) > t\right) = 1 - {}_tq_x^{(\tau)} \tag{2.3} $$

이다. 시점 t 이내에 탈퇴가 발생하지 않을 확률이므로 유지율(persistency rate)로 불리기도 한다. 탈퇴 원인 j에 의한 탈퇴력(force of decrement due to cause j)은 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$ \mu_x^{(j)}(t) = \frac{d_t q_x^{(j)}}{dt} \Big/ {}_tp_x^{(\tau)}. \tag{2.4} $$

또한 총탈퇴력은

$$ \mu_x^{(\tau)}(t) = \frac{d_t q_x^{(\tau)}}{dt} \Big/ {}_tp_x^{(\tau)} = \frac{d\left(\sum_{j=1}^{m} {}_tq_x^{(j)}\right)}{dt} \Big/ {}_tp_x^{(\tau)} = \sum_{j=1}^{m} \mu_x^{(j)}(t) \tag{2.5} $$

이며 개별탈퇴력의 합과 같다. 앞에서 정의된 탈퇴력이 존재하면 다중탈퇴율은 식 (2.4)에 $t = z$를 대입하고 ${}_zp_x^{(\tau)}$를 식 (2.4)의 양변에 곱하여 적분하면

$$ {}_tq_x^{(j)} = \int_0^t {}_zp_x^{(\tau)} \mu_x^{(j)}(z)dz \tag{2.6} $$

과 같이 적분의 형태로 표현이 가능하다. 또한 총탈퇴율도 식 (2.2)와 (2.6)을 활용하면

$$ {}_tq_x^{(\tau)} = \int_0^t {}_zp_x^{(\tau)} \mu_x^{(\tau)}(z)dz \tag{2.7} $$

이 된다.

이제 절대탈퇴모형에 대하여 살펴보자. 절대탈퇴모형은 특정 탈퇴원인만을 고려하여 탈퇴 현상을 나타내는 모형이다. 특정 탈퇴 원인에 대한 절대유지율(절대생존율)은

$$ {}_tp_x^{\prime(j)} = \exp\left(-\int_0^t \mu_x^{(j)}(z)dz\right) \tag{2.8} $$

로 정의하며 절대탈퇴율은

$$ {}_tq_x^{\prime(j)} = 1 - {}_tp_x^{\prime(j)} \tag{2.9} $$

이다. 다중탈퇴율과 구별하기 위하여 기호 p와 q의 위첨자에 표시 $'$를 한다. 따라서 탈퇴력은 식 (2.8)과 (2.9)를 이용하면

$$ \mu_x^{(j)}(t) = \frac{d_t q_x^{\prime(j)}}{dt} \Big/ {}_tp_x^{\prime(j)} \tag{2.10} $$

이고 절대유지율은 두 개의 절대유지율 곱으로 표현된다. 즉 식 (2.8)에 $t = t + s$를 대입하고 적분의 성질을 적용하면

$$ {}_{t+s}p_x^{\prime(j)} = {}_tp_x^{\prime(j)} \cdot {}_sp_{x+t}^{\prime(j)} \tag{2.11} $$

이 된다. 또한 시점 t 이후에서 시점 $t+s$ 이내에 절대탈퇴가 발생할 확률은

$$ {}_{t|s}q_x^{\prime(j)} = {}_tp_x^{\prime(j)} \cdot {}_sq_{x+t}^{\prime(j)} \tag{2.12} $$

이다. 식 (2.12)뿐만 아니라 위에서 언급한 다중탈퇴율과 절대탈퇴율의 여러 성질들은 Bowers 등 (1997)에서 확인 할 수 있다.

Shiu (1987)는 리만-스틸지 적분을 이용하여 다중탈퇴율을 절대탈퇴율로 표현하였다. 이러한 접근이 Bowers 등 (1997)에 사용된 리만 적분보다 일반적인 경우에도 폭넓게 사용될 수 있으므로 본 논문의 확률 표현은 가급적 리만-스틸지 적분으로 나타낸다. 특히 탈퇴력이 존재하지 않는 경우에는 확률 또는 기대값을 적분형태로 나타내는데 편리하다. 리만-스틸지 적분에 대한 상세한 논의는 Apostol (1974)를 참조하면 도움이 된다. 변수 z에 대한 리만-스틸지 적분으로 다중탈퇴율을 정의하면

$$ {}_tq_x^{(j)} = \int_0^t \prod_{i\neq j} {}_zp_x^{\prime(i)} d\left({}_zq_x^{\prime(j)}\right) \tag{2.13} $$

이다. Bowers 등 (1997)에서 탈퇴력 $\mu_x^{(j)}(z)$가 존재하는 경우에는 다중탈퇴율의 리만 적분 표현은

$$ \begin{aligned} {}_tq_x^{(j)} &= \int_0^t {}_zp_x^{(\tau)} \mu_x^{(j)}(z)dz \\ &= \int_0^t \left(\prod_i {}_zp_x^{\prime(i)}\right) \mu_x^{(j)}(z)dz \\ &= \int_0^t \left(\prod_{i\neq j} {}_zp_x^{\prime(i)}\right) {}_zp_x^{\prime(j)} \mu_x^{(j)}(z)dz \end{aligned} \tag{2.14} $$

이 된다. 여기서

$$ d\left({}_zq_x^{\prime(j)}\right) = {}_zp_x^{\prime(j)} \mu_x^{(j)}(z)dz \tag{2.15} $$

이므로 리만-스틸지 적분의 성질인 식 (2.17)에 의해 식 (2.13)은 식 (2.14)와 같다. 본 논문에서 많이 사용될 리만-스틸지 적분의 성질을 소개하면 다음과 같다. 연속인 함수 $f(z)$와 증가함수인 $g(z)$ 및 양수인 상수 c에 대하여

$$ \int_a^b f(z)d(c\cdot g(z)) = c\int_a^b f(z)d(g(z)) \tag{2.16} $$

이고 추가적으로 $g(z)$가 미분 가능이면

$$ \int_a^b f(z)d(g(z)) = \int_a^b f(z)\frac{d(g(z))}{dz}dz \tag{2.17} $$

이 된다. 물론 $f(z)$가 연속이고 $g(z)$가 증가함수이므로 식 (2.16)과 (2.17)의 적분도 존재한다.

3. 절대탈퇴율에서 다중탈퇴율로 전환

실제 실무에서는 월(month) 기준의 다중탈퇴율이 필요한 경우가 많으므로 이 절에서는 연 기준의 절대탈퇴율을 월 기준의 다중탈퇴율로 전환하는 공식을 유도한다. 유도된 공식은 월 기준 대신에 일(day) 기준 또는 분기(quarter) 기준 또는 반기(semiannual) 기준 등으로도 전환 가능한 공식이다. 변수 t와

s는 $\{0 \le t < 1,\ 0 < s+t \le 1\}$인 경우로 한정한다. 여기서 절대탈퇴율이 균등분포 가정(UDD: Uniform Distribution of Decrements)을 따른다고 하면

$$ {}_tq_x'^{(j)} = t \cdot q_x'^{(j)} \tag{3.1}$$

이 성립하고

$$ {}_tp_x'^{(j)} = 1 - t \cdot q_x'^{(j)} \tag{3.2}$$

과

$$ {}_{t|z}q_x'^{(j)} = z \cdot q_x'^{(j)} \tag{3.3a}$$

및

$$ {}_sq_{x+t}'^{(j)} = \frac{s \cdot q_x'^{(j)}}{1 - t \cdot q_x'^{(j)}} \tag{3.3b}$$

이 된다. 자세한 내용은 Bowers 등 (1997)을 참고하면 된다.

이제 변수 z에 대한 리만-스틸지 적분으로 다중탈퇴율을 표현하여 계산하면

$$\begin{aligned} {}_sq_{x+t}^{(j)} &= \int_0^s \prod_{i\neq j} {}_zp_{x+t}'^{(i)} d\left({}_zq_{x+t}'^{(j)}\right) \\ &= \int_0^s \prod_{i\neq j}\left(\frac{{}_{z+t}p_x'^{(i)}}{{}_tp_x'^{(i)}}\right) d\left(\frac{{}_{t|s}q_x'^{(j)}}{{}_tp_x'^{(j)}}\right) \\ &= \left(\prod_{i=1}^m \frac{1}{{}_tp_x'^{(i)}}\right)\int_0^s \prod_{i\neq j}\left({}_{z+t}p_x'^{(i)}\right) d\left({}_{t|z}q_x'^{(j)}\right) \\ &= \left(\prod_{i=1}^m \frac{1}{1-t\cdot q_x'^{(i)}}\right) q_x'^{(i)} \int_0^s \prod_{i\neq j}\left({}_{z+t}p_x'^{(i)}\right) dz \end{aligned} \tag{3.4}$$

이 된다. 식 (3.4)의 첫 번째 등호는 식 (2.13)의 적용이며 두 번째 등호는 식 (2.11)과 (2.12)를 이용한 것이다. 식 (3.4)의 세 번째 등호는 식 (2.16)을 활용했고 네 번째 등호는 식 (3.3a)와 (2.16)을 적용하였다. 위 식 (3.4)의 마지막에 있는 적분 부분의 계산은 UDD 성질과 변수변환($z = z + t$)을 이용하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \int_0^s \prod_{i\neq j}\left({}_{z+t}p_x'^{(i)}\right) dz &= \int_0^s \prod_{i\neq j}\left(1-(z+t)\cdot q_x'^{(i)}\right) dz \\ &= \int_t^{t+s} \prod_{i\neq j}\left(1 - z\cdot q_x'^{(i)}\right) dz. \end{aligned} \tag{3.5}$$

적분 내부에 있는 z의 함수는

$$\begin{aligned} \prod_{i\neq j}\left(1 - z\cdot q_x'^{(i)}\right) &= 1 - z\sum_{i\neq j} q_x'^{(i)} + z^2 \sum_{\substack{i_1,i_2\neq j\\ i_1<i_2}} q_x'^{(i_1)}q_x'^{(i_2)} + \cdots + \\ &\quad (-z)^k \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_k\neq j\\ i_1<\cdots<i_k}} q_x'^{(i_1)}\cdots q_x'^{(i_k)} + \cdots + (-z)^{m-1}\prod_{i\neq j} q_x'^{(i)} \end{aligned} \tag{3.6}$$

와 같이 z의 다항함수가 된다. 단 $i_1, i_2, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, m\}$. 이 다항함수를 z에 대하여 정적분($t \le z \le t+s$)을 하면 식 (3.5)는

$$s - \frac{1}{2}\left\{(t+s)^2 - t^2\right\}\sum_{i\neq j} q_x^{\prime(i)} + \frac{1}{3}\left\{(t+s)^3 - t^3\right\}\sum_{\substack{i_1,i_2\neq j\\ i_1<i_2}} q_x^{\prime(i_1)}q_x^{\prime(i_2)} + \cdots + \frac{1}{k+1}(-1)^k$$
$$\left\{(t+s)^{k+1} - t^{k+1}\right\}\sum_{\substack{i_1,\ldots,i_k\neq j\\ i_1<\cdots<i_k}} q_x^{\prime(i_1)}\cdots q_x^{\prime(i_k)} + \cdots + \frac{1}{m}(-1)^{m-1}\left\{(t+s)^m - t^m\right\}\prod_{i\neq j} q_x^{\prime(i)} \quad (3.7)$$

이 된다. 식 (3.7)을 식 (3.4)의 적분부분에 대체하면 다중탈퇴율은

$${}_sq_{x+t}^{(j)} = q_x^{\prime(j)}\left(\prod_{i=1}^{m}\frac{1}{1-t\cdot q_x^{\prime(i)}}\right)\left[s+\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{k+1}(-1)^k\left\{(t+s)^{k+1}-t^{k+1}\right\}\sum_{\substack{i_1,\ldots,i_k\neq j\\ i_1<\cdots<i_k}} q_x^{\prime(i_1)}\cdots q_x^{\prime(i_k)}\right] \quad (3.8)$$

이 된다. 참고로 이 공식에서 $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$의 가능한 경우의 수는 조합수 ${}_{m-1}C_k$이다.

만약 $t = 0$, $s = 1$인 경우는 $\prod_{i=1}^{m} 1/(1-t\cdot q_x^{\prime(i)}) = 1$, $(t+s)^{k+1} - t^{k+1} = 1$ 이므로 다음의 공식이 된다.

$$q_x^{(j)} = q_x^{\prime(j)}\left\{1 + \sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{k+1}(-1)^k\sum_{\substack{i_1,\ldots,i_k\neq j\\ i_1<\cdots<i_k}} q_x^{\prime(i_1)}\cdots q_x^{\prime(i_k)}\right\}. \quad (3.9)$$

식 (3.9)는 연 기준의 절대탈퇴율을 연 기준의 다중탈퇴율로 전환하는 공식이다. 월(month) 기준의 다중탈퇴율로 표현하는 방법은 식 (3.8)에 $s = 1/12$, $t = n/12$ (단, $n = 0, 1, \ldots, 11$)을 대입하면

$${}_{\frac{1}{12}}q_{x+\frac{n}{12}}^{(j)} = q_x^{\prime(j)}\left(\prod_{i=1}^{m}\frac{1}{1-\frac{n}{12}\cdot q_x^{\prime(i)}}\right)\left[\frac{1}{12} + \sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{k+1}(-1)^k\right.$$
$$\left.\left\{\left(\frac{n+1}{12}\right)^{k+1} - \left(\frac{n}{12}\right)^{k+1}\right\}\sum_{\substack{i_1,\ldots,i_k\neq j\\ i_1<\cdots<i_k}} q_x^{\prime(i_1)}\cdots q_x^{\prime(i_k)}\right] \quad (3.10)$$

이 된다. 분기 기준으로 전환은 $s = 1/4$, $t = n/4$ (단, $n = 0,\ 1,\ 2,\ 3$)을 식 (3.8)에 대입하면 된다.

4. 탈퇴원인이 두 개 또는 세 개인 경우의 공식

이 절에서는 앞 절에서 논의하여 유도된 공식을 다중탈퇴모형에서 많이 쓰이는 경우인 탈퇴 원인이 두 개 또는 세 개인 경우에 대하여 자세히 살펴 보고 다른 형태의 공식도 유도하여 보자. 주로 탈퇴 원인으로는 사망, 장애, 해약 등이 고려 대상이다.

먼저 탈퇴원인이 두 개인 $m = 2$인 경우를 고려하면 위의 유도된 식 (3.8)에서 $m = 2$를 적용하면 다음과 같다.

$${}_sq_{x+t}^{(1)} = \frac{q_x^{\prime(1)}}{\left(1-t\cdot q_x^{\prime(1)}\right)\left(1-t\cdot q_x^{\prime(2)}\right)}\left[s - \frac{1}{2}\left\{(s+t)^2 - t^2\right\}q_x^{\prime(2)}\right] \quad (4.1)$$

$${}_sq_{x+t}^{(2)} = \frac{q_x^{\prime(2)}}{\left(1-t\cdot q_x^{\prime(1)}\right)\left(1-t\cdot q_x^{\prime(2)}\right)}\left[s - \frac{1}{2}\left\{(s+t)^2 - t^2\right\}q_x^{\prime(1)}\right] \quad (4.2)$$

이 다중탈퇴율 공식에 $s = 1/12$, $t = n/12$ (단, $n = 0, 1, \ldots, 11$)을 대입하면 연 기준의 절대탈퇴율에서 월 기준의 다중탈퇴율로 전환 가능한 공식이 된다. 이 때 식 (4.1)의 우측 부분을 전개하고 식 (3.3b)를 적용하면

$$
\begin{aligned}
{}_s q_{x+t}^{(1)} &= \frac{q_x'^{(1)}}{\left(1 - t\cdot q_x'^{(1)}\right)\left(1 - t\cdot q_x'^{(2)}\right)} \left\{ s - \frac{1}{2} s\,(s + 2t)\, q_x'^{(2)} \right\} \\
&= \frac{s\cdot q_x'^{(1)}}{\left(1 - t\cdot q_x'^{(1)}\right)\left(1 - t\cdot q_x'^{(2)}\right)} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}s + t\right) q_x'^{(2)} \right\} \\
&= \frac{s\cdot q_x'^{(1)}}{\left(1 - t\cdot q_x'^{(1)}\right)\left(1 - t\cdot q_x'^{(2)}\right)} \left\{ \left(1 - t\cdot q_x'^{(2)}\right) - \frac{1}{2} s\cdot q_x'^{(2)} \right\} \\
&= {}_s q_{x+t}'^{(1)} \left(1 - \frac{1}{2}\cdot \frac{s\cdot q_x'^{(2)}}{1 - t\cdot q_x'^{(2)}} \right) \\
&= {}_s q_{x+t}'^{(1)} \left(1 - \frac{1}{2}\cdot {}_s q_{x+t}'^{(2)} \right) \qquad (4.3)
\end{aligned}
$$

이 된다. 식 (4.3)의 (1)과 (2)를 서로 바꾸어 유도하면 다음과 같다.

$$
{}_s q_{x+t}^{(2)} = {}_s q_{x+t}'^{(2)} \left(1 - \frac{1}{2}\cdot {}_s q_{x+t}'^{(1)} \right) \qquad (4.4)
$$

위에서 새로 유도한 두 개의 다중탈퇴율 공식에 $s = 1/12$, $t = n/12$ (단, $n = 0, 1, \ldots, 11$)을 대입하면 월 기준의 절대탈퇴율에서 월 기준의 다중탈퇴율로 전환 가능한 공식이 된다.

이제 탈퇴 원인이 세 개인 $m = 3$인 경우를 고려하면 위의 유도된 공식 (3.8)에서 $m = 3$를 적용하면 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
{}_s q_{x+t}^{(1)} &= \frac{q_x'^{(1)}}{\left(1 - t\cdot q_x'^{(1)}\right)\left(1 - t\cdot q_x'^{(2)}\right)\left(1 - t\cdot q_x'^{(3)}\right)} \\
&\quad \times \left[s - \frac{1}{2}\left\{(s+t)^2 - t^2\right\}\left(q_x'^{(2)} + q_x'^{(3)}\right) + \frac{1}{3}\left\{(s+t)^3 - t^3\right\} q_x'^{(2)}\cdot q_x'^{(3)} \right] \\
&= \frac{s\cdot q_x'^{(1)}}{\left(1 - t\cdot q_x'^{(1)}\right)\left(1 - t\cdot q_x'^{(2)}\right)\left(1 - t\cdot q_x'^{(3)}\right)} \\
&\quad \times \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}s + t\right)\left(q_x'^{(2)} + q_x'^{(3)}\right) + \frac{1}{3}\left(s^2 + 3st + 3t^2\right) q_x'^{(2)}\cdot q_x'^{(3)} \right\} \qquad (4.5)
\end{aligned}
$$

이 식에서 식 (3.3b)를 활용하면 다음의 식 (4.6)의 좌변이 되고 식 (4.6)의 우변을 통분하면 좌변과 동일함을 알 수 있다.

$$
\begin{aligned}
&{}_s q_{x+t}'^{(1)} \frac{1}{\left(1 - t\cdot q_x'^{(2)}\right)\left(1 - t\cdot q_x'^{(3)}\right)} \times \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}s + t\right)\left(q_x'^{(2)} + q_x'^{(3)}\right) + \frac{1}{3}\left(s^2 + 3st + 3t^2\right) q_x'^{(2)}\cdot q_x'^{(3)} \right\} \\
&= {}_s q_{x+t}'^{(1)} \left\{ 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{s\cdot q_x'^{(2)}}{1 - t\cdot q_x'^{(2)}} + \frac{s\cdot q_x'^{(3)}}{1 - t\cdot q_x'^{(3)}} \right) + \frac{1}{3}\frac{s\cdot q_x'^{(2)}}{1 - t\cdot q_x'^{(2)}}\frac{s\cdot q_x'^{(3)}}{1 - t\cdot q_x'^{(3)}} \right\}. \qquad (4.6)
\end{aligned}
$$

표 4.1. 절대탈퇴율을 다중탈퇴율로 전환 ($q_x'^{(1)} = 0.2$, $q_x'^{(2)} = 0.3$, $q_x'^{(3)} = 0.4$인 경우)

n	${}_{\frac{1}{12}}q'^{(1)}_{x+\frac{n}{12}}$	${}_{\frac{1}{12}}q'^{(2)}_{x+\frac{n}{12}}$	${}_{\frac{1}{12}}q'^{(3)}_{x+\frac{n}{12}}$	${}_{\frac{1}{12}}q^{(1)}_{x+\frac{n}{12}}$	${}_{\frac{1}{12}}q^{(2)}_{x+\frac{n}{12}}$	${}_{\frac{1}{12}}q^{(3)}_{x+\frac{n}{12}}$
0	0.016667	0.025000	0.033333	0.016185	0.024380	0.032644
1	0.016949	0.025641	0.034483	0.016445	0.024987	0.033753
2	0.017241	0.026316	0.035714	0.016712	0.025624	0.034942
3	0.017544	0.027027	0.037037	0.016988	0.026295	0.036218
4	0.017857	0.027778	0.038462	0.017272	0.027002	0.037590
5	0.018182	0.028571	0.040000	0.017565	0.027747	0.039072
6	0.018519	0.029412	0.041667	0.017868	0.028534	0.040676
7	0.018868	0.030303	0.043478	0.018180	0.029367	0.042418
8	0.019231	0.031250	0.045455	0.018502	0.030248	0.044316
9	0.019608	0.032258	0.047619	0.018835	0.031184	0.046394
10	0.020000	0.033333	0.050000	0.019178	0.032178	0.048678
11	0.020408	0.034483	0.052632	0.019532	0.033236	0.051199

따라서 절대탈퇴율은

$$ {}_sq^{(1)}_{x+t} = {}_sq'^{(1)}_{x+t}\left\{1 - \frac{1}{2}\left({}_sq'^{(2)}_{x+t} + {}_sq'^{(3)}_{x+t}\right) + \frac{1}{3}\cdot {}_sq'^{(2)}_{x+t}\cdot {}_sq'^{(3)}_{x+t}\right\} \tag{4.7} $$

이 된다. 같은 방법을 적용하면 다음과 같이 유도된다.

$$ {}_sq^{(2)}_{x+t} = {}_sq'^{(2)}_{x+t}\left\{1 - \frac{1}{2}\left({}_sq'^{(1)}_{x+t} + {}_sq'^{(3)}_{x+t}\right) + \frac{1}{3}\cdot {}_sq'^{(1)}_{x+t}\cdot {}_sq'^{(3)}_{x+t}\right\} \tag{4.8} $$

$$ {}_sq^{(3)}_{x+t} = {}_sq'^{(3)}_{x+t}\left\{1 - \frac{1}{2}\left({}_sq'^{(1)}_{x+t} + {}_sq'^{(2)}_{x+t}\right) + \frac{1}{3}\cdot {}_sq'^{(1)}_{x+t}\cdot {}_sq'^{(2)}_{x+t}\right\}. \tag{4.9} $$

위에서 새로 유도한 세 개의 다중탈퇴율 공식에 $s = 1/12$ (단, $t = n/12$, $n = 0, 1, \ldots, 11$)을 대입하면 월 기준의 절대탈퇴율에서 월 기준의 다중탈퇴율로 전환 가능한 공식이다. 위의 공식 (4.7), (4.8)과 (4.9)는 Bowers 등 (1997)의 p.329에 있는 공식 (10.6.3)의 일반적인 표현이다.

수치 예를 통하여 다중탈퇴율로 전환하는 공식의 적용 과정을 살펴보자. 위의 공식($m = 3$의 경우)을 예를 들어 설명해 보자. $q_x'^{(1)} = 0.2$, $q_x'^{(2)} = 0.3$, $q_x'^{(3)} = 0.4$라고 가정하고 $s = 1/12$, $t = n/12$ (단, $n = 0, 1, \ldots, 11$)인 경우로 식 (3.3b)를 이용하여 계산하면 표 4.1의 두 번째 열에서 네 번째 열에 있는 월 기준의 절대탈퇴율을 나타내는 값이 된다. 이를 위의 공식 (4.7), (4.8)과 (4.9)에 넣어서 계산하면 ${}_sq^{(j)}_{x+t}$의 값이 표 4.1의 다섯 번째 열에서 일곱 번째 열에 있는 값이 된다. 또한 표 4.1에서 Bowers 등 (1997)의 p.321에 있는 공식 (10.5.3) 보다 일반적인 경우의 부등식 ${}_sq'^{(j)}_{x+t} \geq {}_sq^{(j)}_{x+t}$이 성립함을 확인할 수 있다.

5. 월 기준 절대탈퇴율에서 월 기준 다중탈퇴율로 전환

앞 절에서 연 기준 절대탈퇴율에서 월 기준 다중탈퇴율로 전환하는 공식을 수정하여 월 기준 절대탈퇴율에서 월 기준 다중탈퇴율 공식을 탈퇴 원인이 두 개 또는 세 개인 경우에 유도 하였다. 이렇게 유도된 공식 (4.3), (4.4), (4.7), (4.8)과 (4.9)를 살펴보면 식 (3.9)의 연 기준 절대탈퇴율 대신에 월 기준 절대탈퇴율로 대체된 것 같다. 이러한 특성이 탈퇴 원인이 m개 일 때도 공식으로 유도 가능한지 이 절에서 살펴 보자.

위에서 $m = 2$ 또는 $m = 3$인 경우에 유도된 공식은 앞 절에서 유도된 공식을 다른 형태로 간단히 표현 가능함을 알 수 있다. 이번 절에서는 m이 일반적인 경우에 유도하여 본다. $\{0 \le t < 1,\ 0 < s + t \le 1\}$인 경우로 u가 $0 \le u \le 1$인 경우를 고려한다. UDD 성질을 이용하면 다음의 관계식을 알 수 있다.

$$ {}_{u \cdot s}q'^{(j)}_{x+t} = \frac{{}_{t|u \cdot s}q'^{(j)}_x}{{}_tp'^{(j)}_x} = \frac{u \cdot s \cdot q'^{(j)}_x}{{}_tp'^{(j)}_x} = \frac{u \cdot {}_{t|s}q'^{(j)}_x}{{}_tp'^{(j)}_x} = u \cdot {}_sq'^{(j)}_{x+t}, \tag{5.1} $$

여기서 식 (5.1)의 첫 번째 등호는 식 (2.12)의 응용이며 두 번째와 세 번째 등호는 식 (3.3a)를 적용했으며 마지막 등호는 식 (2.12)를 이용하였다. 연령이 $(x+t)$인 사람이 탈퇴원인 j에 의한 $u \cdot s$ 시점 이내에 탈퇴할 절대탈퇴율은 u에 비례하는 관계가 있다. 이 관계식은 아래의 식 (5.3)을 전개하는데 중요한 요소로 활용된다. 식 (2.13)을 이용하여 다중탈퇴율을 정의하면

$$ \begin{aligned} {}_sq^{(j)}_{x+t} &= \int_0^s \prod_{i \ne j} {}_zp'^{(i)}_{x+t}\, d\left({}_zq'^{(j)}_{x+t}\right) \\ &= \int_0^s \prod_{i \ne j} {}_zp'^{(i)}_{x+t}\, d\left(\frac{{}_{t|z}q'^{(j)}_x}{{}_tp'^{(j)}_x}\right) \\ &= \int_0^s \left(\prod_{i \ne j} {}_zp'^{(i)}_{x+t}\right) \frac{q'^{(j)}_x}{{}_tp'^{(j)}_x}\, dz \end{aligned} \tag{5.2} $$

된다. 여기서 식 (5.2)의 두 번째 등호는 식 (2.12)의 응용이며 세 번째 등호는 (3.3a)와 (2.16)을 적용하였다. 식 (5.2)의 정적분을 치환 $(u = z/s)$하고 식 (5.1)을 이용하면

$$ \begin{aligned} \int_0^1 \left(\prod_{i \ne j} {}_{u \cdot s}p'^{(i)}_{x+t}\right) \frac{q'^{(j)}_x}{{}_tp'^{(j)}_x}\, s\, du &= {}_sq'^{(j)}_{x+t} \int_0^1 \prod_{i \ne j} {}_{u \cdot s}p'^{(i)}_{x+t}\, du \\ &= {}_sq'^{(j)}_{x+t} \int_0^1 \prod_{i \ne j} \left(1 - {}_{u \cdot s}q'^{(i)}_{x+t}\right) du \\ &= {}_sq'^{(j)}_{x+t} \int_0^1 \prod_{i \ne j} \left(1 - u \cdot {}_sq'^{(i)}_{x+t}\right) du \end{aligned} \tag{5.3} $$

이 된다. 식 (5.3)의 첫 번째 등호는 (3.1)과 (3.3b)를 이용하였고 두 번째와 마지막 등호는 (2.9)와 (5.1)을 각각 적용하였다. 식 (5.3)의 적분 내부에 있는 u의 함수는 다음과 같이 전개가 가능하다.

$$ \begin{aligned} \prod_{i \ne j} \left(1 - u \cdot {}_sq'^{(i)}_{x+t}\right) = 1 - u \sum_{i \ne j} {}_sq'^{(i)}_{x+t} + u^2 \sum_{\substack{i_1, i_2 \ne j \\ i_1 < i_2}} {}_sq'^{(i_1)}_{x+t} \cdot {}_sq'^{(i_2)}_{x+t} + \cdots + \\ (-u)^k \sum_{\substack{i_1, \ldots, i_k \ne j \\ i_1 < \cdots < i_k}} {}_sq'^{(i_1)}_{x+t} \cdots {}_sq'^{(i_k)}_{x+t} + \cdots + (-u)^{m-1} \prod_{i \ne j} {}_sq'^{(i)}_{x+t}, \end{aligned} \tag{5.4} $$

이것은 u의 다항 함수이고 u의 차수와 절대탈퇴율의 곱의 개수가 같은 특성이 있다. 이 다항 함수를 u에 대하여 정적분을 하면

$$ \int_0^1 \prod_{i \ne j} \left(1 - u \cdot {}_sq'^{(i)}_{x+t}\right) du = 1 + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k+1} (-1)^k \sum_{\substack{i_1, \ldots, i_k \ne j \\ i_1 < \cdots < i_k}} {}_sq'^{(i_1)}_{x+t} \cdots {}_sq'^{(i_k)}_{x+t} \tag{5.5} $$

이 된다. 따라서 적분 결과를 식 (5.3)의 적분 부분으로 대체하면 다중탈퇴율은

$$ {}_{s}q_{x+t}^{(j)} = {}_{s}q_{x+t}^{\prime(j)} \left(1 + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k+1} (-1)^k \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_k \neq j \\ i_1 < \cdots < i_k}} {}_{s}q_{x+t}^{\prime(i_1)} \cdots {}_{s}q_{x+t}^{\prime(i_k)} \right) \tag{5.6} $$

으로 표현된다. 이 다중탈퇴율 공식에 $s = 1/12$, $t = n/12$ (단, $n = 0, 1, \ldots, 11$)을 대입하면 다음과 같은 월 기준의 절대탈퇴율에서 월 기준의 다중탈퇴율로 전환 가능한 공식이다.

$$ {}_{\frac{1}{12}}q_{x+\frac{n}{12}}^{(j)} = {}_{\frac{1}{12}}q_{x+\frac{n}{12}}^{\prime(j)} \left(1 + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k+1} (-1)^k \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_k \neq j \\ i_1 < \cdots < i_k}} {}_{\frac{1}{12}}q_{x+\frac{n}{12}}^{\prime(i_1)} \cdots {}_{\frac{1}{12}}q_{x+\frac{n}{12}}^{\prime(i_k)} \right) \tag{5.7} $$

위의 전환 공식 (5.6)은 앞 절에서 유도한 공식 (3.8)과 표현이 다를 뿐 결과는 동일한 공식이다. 위의 공식 (5.6)은 $\{{}_{s}q_{x+t}^{\prime(i)} | i = 1, 2, \ldots, m\}$을 이용하여 ${}_{s}q_{x+t}^{(j)}$를 계산하는 공식이며 앞 절에서 유도한 공식 (3.8)은 $\{q_x^{\prime(i)} | i = 1, 2, \ldots, m\}$을 이용하여 ${}_{s}q_{x+t}^{(j)}$를 계산하는 공식이다. 위의 다중탈퇴율 공식 (5.6)은 식 (3.3b)를 이용하여 확률을 전환한 다음 이용하면 되므로 두 공식은 동일한 정보를 이용하여 계산이 가능하다.

6. 다중탈퇴모형이 UDD인 경우에 절대탈퇴모형으로 전환

앞에서 절대탈퇴모형에서 다중탈퇴모형으로 전환하는 방법에 대하여 논의하였다. 이번 절에서는 다중탈퇴모형에서 절대탈퇴모형으로 전환하는 공식을 유도해보자. 먼저 다중탈퇴모형이 UDD인 경우에 절대탈퇴모형으로 전환하는 공식을 논의하고 다음 절에서 다중탈퇴모형이 상수탈퇴력 가정(Constant force assumption)인 경우에 절대탈퇴모형으로 전환하는 공식을 논의한다.

다중탈퇴모형이 UDD인 경우를 가정하자. $\{0 \le t < 1,\ 0 < s + t \le 1\}$인 경우에 다중탈퇴율이 UDD 가정을 따르면

$$ {}_{t}q_x^{(j)} = t \cdot q_x^{(j)} \tag{6.1} $$

이고 총탈퇴율도 식 (2.2)와 (6.1)에 의하여

$$ {}_{t}q_x^{(\tau)} = t \cdot q_x^{(\tau)} \tag{6.2} $$

이 된다. 또한 식 (2.4), (2.3), (6.1), (6.2)를 이용하면 탈퇴력은

$$ \mu_x^{(j)}(t) = \frac{q_x^{(j)}}{1 - t \cdot q_x^{(\tau)}} \tag{6.3} $$

으로 표현된다. 또한 시점 t 이후에서 시점 $t + s$ 이내에 다중탈퇴가 발생할 확률은

$$ {}_{t|s}q_x^{(j)} = {}_{t}p_x^{(\tau)} \cdot {}_{s}q_{x+t}^{(j)} \tag{6.4} $$

이고 UDD 가정에서 식 (6.1)을 이용하면 식(3.3a) 처럼

$$ {}_{t|s}q_x^{(j)} = s \cdot q_x^{(j)} \tag{6.5} $$

이다.

절대탈퇴율은 식 (2.8)에 의하여 탈퇴력을 적분한 지수함수의 형태로 다음과 같이 표현되며 식 (6.3)을 이용하면 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} {}_s p'^{(j)}_{x+t} &= \exp\left(-\int_0^s \mu^{(j)}_{x+t}(z)dz\right) \\ &= \exp\left(-\int_t^{t+s} \mu^{(j)}_{x}(z)dz\right) \\ &= \exp\left(-\int_t^{t+s} \frac{q^{(j)}_x}{1-z\cdot q^{(\tau)}_x}dz\right) \\ &= \exp\left(-\frac{q^{(j)}_x}{q^{(\tau)}_x}\int_t^{t+s} \frac{q^{(\tau)}_x}{1-z\cdot q^{(\tau)}_x}dz\right), \end{aligned} \tag{6.6}$$

여기서 위 식 (6.6)의 마지막 부분을 유리함수의 적분 후에 유지율로 전환하면 다음과 같은 결과가 나온다. 식 (6.7)의 두 번째 등호는 식 (6.2)와 (2.3)을 적용한다.

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{q^{(j)}_x}{q^{(\tau)}_x}\left[\ln\left(1-z\cdot q^{(\tau)}_x\right)\right]_{z=t}^{z=t+s}\right) &= \left(\frac{1-(t+s)\cdot q^{(\tau)}_x}{1-t\cdot q^{(\tau)}_x}\right)^{\frac{q^{(j)}_x}{q^{(\tau)}_x}} \\ &= \left(\frac{{}_{t+s}p^{(\tau)}_x}{{}_t p^{(\tau)}_x}\right)^{\frac{q^{(j)}_x}{q^{(\tau)}_x}} \\ &= \left({}_s p^{(\tau)}_{x+t}\right)^{\frac{q^{(j)}_x}{q^{(\tau)}_x}} \end{aligned} \tag{6.7}$$

위 식의 지수부분의 분수는 다음과 같이 표현 가능하다. $\{0 \le w < 1,\ 0 < w + r \le 1\}$인 경우에

$$\frac{q^{(j)}_x}{q^{(\tau)}_x} = \frac{r\cdot q^{(j)}_x}{r\cdot q^{(\tau)}_x} = \frac{{}_{w|r}q^{(j)}_x}{{}_{w|r}q^{(\tau)}_x} = \frac{{}_{w|r}q^{(j)}_x / {}_w p^{(\tau)}_x}{{}_{w|r}q^{(\tau)}_x / {}_w p^{(\tau)}_x} = \frac{{}_r q^{(j)}_{x+w}}{{}_r q^{(\tau)}_{x+w}} \tag{6.8}$$

이 되는데 식 (6.8)의 두 번째 등호는 식 (6.5)의 적용이며 마지막 등호는 식 (6.4)의 적용으로 가능하다. 따라서 변형된 지수부분으로 식 (6.7)에 대입하면 다음과 같다.

$${}_s p'^{(j)}_{x+t} = \left({}_s p^{(\tau)}_{x+t}\right)^{\frac{{}_r q^{(j)}_{x+w}}{{}_r q^{(\tau)}_{x+w}}} \tag{6.9}$$

이것은 Bowers 등 (1997)의 p.323에 있는 공식 (10.2.3)의 일반적인 표현이다. 또한 ${}_s q'^{(j)}_{x+t}$와 ${}_s p'^{(j)}_{x+t}$의 합은 1이므로

$${}_s q'^{(j)}_{x+t} = 1 - {}_s p'^{(j)}_{x+t} = 1 - \left({}_s p^{(\tau)}_{x+t}\right)^{\frac{{}_r q^{(j)}_{x+w}}{{}_r q^{(\tau)}_{x+w}}} = 1 - \left(1 - {}_s q^{(\tau)}_{x+t}\right)^{\frac{{}_r q^{(j)}_{x+w}}{{}_r q^{(\tau)}_{x+w}}} \tag{6.10}$$

된다. 여기서 $(w,\, r)$과 $(t,\, s)$는 $\{0 \le w < 1,\ 0 < w + r \le 1\}$과 $\{0 \le t < 1,\ 0 < s + t \le 1\}$을 만족하는 어떤 실수도 가능하다. 따라서 연 기준의 다중탈퇴율을 이용하여 전환하는 공식은 $w = 0$, $r = 1$을 대입하면

$${}_s q'^{(j)}_{x+t} = 1 - \left(1 - \frac{s\cdot q^{(\tau)}_x}{1 - t\cdot q^{(\tau)}_x}\right)^{\frac{q^{(j)}_x}{q^{(\tau)}_x}} \tag{6.11}$$

표 6.1. UDD 가정에서 절대탈퇴율로 전환한 결과($q_x^{(1)} = 0.2, q_x^{(2)} = 0.3, q_x^{(3)} = 0.4$인 경우)

n	${}_{\frac{1}{12}}q^{(\tau)}_{x+\frac{n}{12}}$	${}_{\frac{1}{12}}p^{(\tau)}_{x+\frac{n}{12}}$	${}_{\frac{1}{12}}q'^{(1)}_{x+\frac{n}{12}}$	${}_{\frac{1}{12}}q'^{(2)}_{x+\frac{n}{12}}$	${}_{\frac{1}{12}}q'^{(3)}_{x+\frac{n}{12}}$
0	0.075000	0.925000	0.017176	0.025652	0.034056
1	0.081081	0.918919	0.018615	0.027792	0.036884
2	0.088235	0.911765	0.020318	0.030322	0.040223
3	0.096774	0.903226	0.022364	0.033358	0.044229
4	0.107143	0.892857	0.024870	0.037072	0.049121
5	0.120000	0.880000	0.028008	0.041716	0.055231
6	0.136364	0.863636	0.032054	0.047693	0.063080
7	0.157895	0.842105	0.037469	0.055674	0.073534
8	0.187500	0.812500	0.045094	0.066872	0.088154
9	0.230769	0.769231	0.056636	0.083740	0.110065
10	0.300000	0.700000	0.076201	0.112096	0.146596
11	0.428571	0.571429	0.116937	0.170173	0.220200

이 된다. 특히 연 기준의 다중탈퇴율을 월 기준의 절대탈퇴율로 전환하는 공식은 위 식에 $s = 1/12$, $t = n/12$, $n = 0, 1, \ldots, 11$을 대입하면

$$ {}_{\frac{1}{12}}q'^{(j)}_{x+\frac{n}{12}} = 1 - \left(1 - \frac{\frac{1}{12}\cdot q_x^{(\tau)}}{1 - \frac{n}{12}\cdot q_x^{(\tau)}}\right)^{\frac{q_x^{(j)}}{q_x^{(\tau)}}} \tag{6.12} $$

로 간단히 표현된다.

수치 예를 통하여 다중탈퇴율이 UDD 가정을 따르는 경우 절대탈퇴율로 전환하는 공식의 적용 과정을 살펴보자. 위의 공식 (6.12)($m = 3$의 경우)을 예를 들어 설명해 보자.

$q_x^{(1)} = 0.2$, $q_x^{(2)} = 0.3$, $q_x^{(3)} = 0.4$라고 가정하고 $s = 1/12$, $t = n/12$, (단, $n = 0, 1, \ldots, 11$)인 경우로 $q_x^{(\tau)} = 0.2+0.3+0.4 = 0.9$이고 ${}_sq^{(\tau)}_{x+t} = (s\cdot q_x^{(\tau)})/(1-t\cdot q_x^{(\tau)})$를 이용하여 계산하고 ${}_sp^{(\tau)}_{x+t} = 1-{}_sq^{(\tau)}_{x+t}$를 이용하면 표 6.1의 두 번째 열과 세 번째 열에 있는 값이 된다. $q_x^{(1)}/q_x^{(\tau)} = 2/9$, $q_x^{(2)}/q_x^{(\tau)} = 3/9$, $q_x^{(3)}/q_x^{(\tau)} = 4/9$를 위의 공식에 넣어서 계산하면 ${}_sq'^{(j)}_{x+t}$의 값이 표 6.1의 네 번째 열에서 여섯 번째 열에 있는 값이 된다.

7. 다중탈퇴모형이 상수탈퇴력 가정인 경우에 절대탈퇴모형으로 전환

다음으로 다중탈퇴모형이 상수탈퇴력 가정(Constant force assumption)인 경우에 절대탈퇴모형으로 전환하는 공식을 유도해 보자. 이 가정에 의하면 $\{0 \le t < 1,\ 0 < z + t \le 1\}$인 경우에

$$ \mu^{(j)}_{x+t}(z) = \mu^{(j)}_x(0) \tag{7.1} $$

이고 t와 z의 값에 상관없이 $\mu^{(j)}_{x+t}(z)$가 상수이다. $\{0 \le t < 1,\ 0 < s + t \le 1\}$인 경우 다중탈퇴율은

$$ {}_sq^{(j)}_{x+t} = \int_0^s \prod_{i\neq j} {}_zp'^{(i)}_{x+t}\, d\left({}_zq'^{(j)}_{x+t}\right) = \int_0^s {}_zp'^{(\tau)}_{x+t}\, \mu^{(j)}_{x+t}(z)dz \tag{7.2} $$

이 된다. 여기서 탈퇴력이 적분 구간에서 상수이고 총탈퇴력도 상수임을 활용하면 위 식 (7.2)는

$$\begin{aligned}\int_0^s {}_zp_{x+t}^{(\tau)}\,\mu_x^{(j)}(0)dz &= \frac{\mu_x^{(j)}(0)}{\mu_x^{(\tau)}(0)}\int_0^s {}_zp_{x+t}^{(\tau)}\,\mu_x^{(\tau)}(0)dz \\ &= \frac{\mu_x^{(j)}(0)}{\mu_x^{(\tau)}(0)}\int_0^s {}_zp_{x+t}^{(\tau)}\,\mu_{x+t}^{(\tau)}(z)dz \\ &= \frac{\mu_x^{(j)}(0)}{\mu_x^{(\tau)}(0)}\,{}_sq_{x+t}^{(\tau)} \end{aligned} \tag{7.3}$$

이 된다. 위 식의 분수 부분을 다음의 과정을 통하여 변형이 가능하다. 생존을 나타내는 절대유지율은 상수탈퇴력 가정으로 지수표현이 간단히 된다. log변환을 통하여 다음과 같이 나타낼 수 있다. $\{0 \le w < 1,\ 0 < w + r \le 1\}$인 경우에

$${}_rp_{x+w}^{\prime(j)} = \exp\left(-\int_0^r \mu_{x+w}^{(j)}(z)dz\right) = \exp\left(-\int_0^r \mu_x^{(j)}(0)dz\right) = \exp\left(-r\cdot\mu_x^{(j)}(0)\right) \tag{7.4}$$

또한 log변환을 통하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$-r\cdot\mu_x^{(j)}(0) = \ln\left({}_rp_{x+w}^{\prime(j)}\right). \tag{7.5}$$

마찬가지 과정을 유지율에 적용하면

$${}_rp_{x+w}^{(\tau)} = \exp\left(-\int_0^r \mu_{x+w}^{(\tau)}(z)dz\right) = \exp\left(-\int_0^r \mu_x^{(\tau)}(0)dz\right) = \exp\left(-r\cdot\mu_x^{(\tau)}(0)\right) \tag{7.6}$$

되고 log변환을 통하여 다음과 같이 된다.

$$-r\cdot\mu_x^{(\tau)}(0) = \ln\left({}_rp_{x+w}^{(\tau)}\right). \tag{7.7}$$

위의 식 (7.5)를 식 (7.7)로 나누면

$$\frac{\mu_x^{(j)}(0)}{\mu_x^{(\tau)}(0)} = \frac{\ln\left({}_rp_{x+w}^{\prime(j)}\right)}{\ln\left({}_rp_{x+w}^{(\tau)}\right)} \tag{7.8}$$

이 되어 식 (7.8)을 식 (7.3)에 대입하면 다음과 같다.

$${}_sq_{x+t}^{(j)} = \frac{\ln\left({}_rp_{x+w}^{\prime(j)}\right)}{\ln\left({}_rp_{x+w}^{(\tau)}\right)}\cdot{}_sq_{x+t}^{(\tau)}, \tag{7.9}$$

이 식 (7.9)를 변환하면

$${}_rp_{x+w}^{\prime(j)} = \left({}_rp_{x+w}^{(\tau)}\right)^{\frac{{}_sq_{x+t}^{(j)}}{{}_sq_{x+t}^{(\tau)}}} \tag{7.10}$$

이 된다. 여기서 (w, r)과 (t, s)는 서로 바꿀 수 있으므로 식은 다음과 같이 표현이 가능하다

$${}_sp_{x+t}^{\prime(j)} = \left({}_sp_{x+t}^{(\tau)}\right)^{\frac{{}_rq_{x+w}^{(j)}}{{}_rq_{x+w}^{(\tau)}}}. \tag{7.11}$$

표 7.1. 상수탈퇴력 가정에서 절대탈퇴율로 전환한 결과($q_x^{(1)} = 0.2$, $q_x^{(2)} = 0.3$, $q_x^{(3)} = 0.4$인 경우)

n	${}_{\frac{1}{12}}p^{(\tau)}_{x+\frac{n}{12}}$	${}_{\frac{1}{12}}q'^{(1)}_{x+\frac{n}{12}}$	${}_{\frac{1}{12}}q'^{(2)}_{x+\frac{n}{12}}$	${}_{\frac{1}{12}}q'^{(3)}_{x+\frac{n}{12}}$
$0, 1, \ldots, 11$	0.825404	0.041744	0.061958	0.081746

이 공식 (7.11)은 Bowers 등 (1997)의 p.323에 있는 공식 (10.5.10)의 일반적인 공식이다.

이제 UDD 가정에서 유도된 공식 (6.9)과 상수탈퇴력 가정에서 유도된 공식 (7.11)을 서로 비교하여 보자. 식 (6.9)와 (7.11)은 동일한 공식처럼 보이지만 ${}_sp^{(\tau)}_{x+t}$의 계산 공식이 가정에 따라서 다르다. 즉, UDD의 경우는

$$ {}_sp^{(\tau)}_{x+t} = 1 - {}_sq^{(\tau)}_{x+t} = 1 - \frac{s \cdot q_x^{(\tau)}}{1 - t \cdot q_x^{(\tau)}} \tag{7.12} $$

이지만 상수탈퇴력 가정에서는

$$ {}_sp^{(\tau)}_{x+t} = \exp\left(-s \cdot \mu_x^{(\tau)}(0)\right) = \left(e^{-\mu_x^{(\tau)}(0)}\right)^s = \left(p_x^{(\tau)}\right)^s \tag{7.13} $$

이다. 따라서 ${}_sp^{(\tau)}_{x+t}$의 공식이 동일하지 않아서 결과가 다르게 계산된다. 이는 표 6.1과 7.1의 결과를 비교해보면 쉽게 확인이 된다. Bowers 등 (1997)의 p.323의 식 (10.5.10)과 식 (10.5.12)를 이용하면 $p_x'^{(j)}$의 공식이 UDD 가정과 상수탈퇴력 가정에서 나온 결과가 동일한데 그 이유는 $p_x^{(\tau)}$가 동일하기 때문이다. 앞에서 유도한 두 개의 공식 (7.11)과 (6.9)에 $t = 0$, $s = 1$, $w = 0$, $r = 1$를 대입하면 두 가정의 결과가 동일하다.

연 기준 다중탈퇴율에서 월 기준 절대탈퇴율로 전환하는 공식을 살펴보자. 위 공식 (7.11)에서도 (w, r)과 (t, s)는 $\{0 \le w < 1,\ 0 < w + r \le 1\}$과 $\{0 \le t < 1,\ 0 < s + t \le 1\}$을 만족하는 어떤 실수도 가능하다. 따라서 연 기준의 다중탈퇴율을 이용하여 전환하는 공식은 $w = 0, r = 1$을 대입하면

$$ {}_sp'^{(j)}_{x+t} = \left\{\left(p_x^{(\tau)}\right)^s\right\}^{\frac{q_x^{(j)}}{q_x^{(\tau)}}} = \left(p_x^{(\tau)}\right)^{s \cdot \frac{q_x^{(j)}}{q_x^{(\tau)}}} \tag{7.14} $$

이 된다. 따라서 이 식에 $s = 1/12$, $t = n/12$ (단, $n = 0, 1, \ldots, 11$)을 대입하면 연 기준 다중탈퇴율에서 월 기준 절대탈퇴율로 전환하는 공식은

$$ {}_{\frac{1}{12}}q'^{(j)}_{x+\frac{n}{12}} = 1 - \left(1 - q_x^{(\tau)}\right)^{\frac{1}{12} \cdot \frac{q_x^{(j)}}{q_x^{(\tau)}}} \tag{7.15} $$

이 된다.

수치 예를 통하여 다중탈퇴율이 상수탈퇴력 가정을 따르는 경우 절대탈퇴율로 전환하는 공식의 적용 과정을 살펴보자. 위의 공식($m = 3$의 경우)을 예를 들어 설명해 보자. $q_x^{(1)} = 0.2$, $q_x^{(2)} = 0.3$, $q_x^{(3)} = 0.4$라고 가정하고 $s = 1/12$, $t = n/12$ (단, $n = 0, 1, \ldots, 11$)인 경우로 $q_x^{(\tau)} = 0.2 + 0.3 + 0.4 = 0.9$이고 $p_x^{(\tau)} = 1 - q_x^{(\tau)} = 0.1$를 이용하여 계산하고 ${}_sp^{(\tau)}_{x+t} = (p_x^{(\tau)})^s$를 이용하면 표 7.1의 두 번째 열에 있는 값이 된다. $q_x^{(1)}/q_x^{(\tau)} = 2/9$, $q_x^{(2)}/q_x^{(\tau)} = 3/9$, $q_x^{(3)}/q_x^{(\tau)} = 4/9$를 위의 공식에 넣어서 계산하면 ${}_sq'^{(j)}_{x+t}$의 값이 표 7.1의 세 번째 열에서 다섯 번째 열에 있는 값이 된다. 주목할 점은 ${}_{1/12}q'^{(1)}_{x+n/12}$와 ${}_{1/12}q'^{(2)}_{x+n/12}$와 ${}_{1/12}q'^{(3)}_{x+n/12}$의 값이 n에 관계없이 일정하다는 점이다. 이는 ${}_{1/12}p^{(\tau)}_{x+n/12}$의 값이 n의 값에 관계없이 일정하기 때문이다.

8. 결론

본 논문에서 다중탈퇴모형과 절대탈퇴모형의 기본 성질을 살펴보았고 절대탈퇴율에서 다중탈퇴율로 전환하는 공식을 유도하고 다중탈퇴율을 절대탈퇴율로 전환하는 공식을 유도해 보았다. 절대탈퇴율에서 다중탈퇴율로 전환하는 과정에서 절대탈퇴율이 UDD를 따르는 가정을 하였다. 다중탈퇴율에서 절대탈퇴율로 전환하는 과정에서는 다중탈퇴율이 UDD를 따르는 가정하는 경우와 상수탈퇴력 가정을 따르는 경우로 나누어서 공식을 유도하였다. 유도된 공식은 Bowers 등 (1997)에 있는 전환 공식의 일반적인 형태임을 확인할 수 있었다. 또한 유도된 공식을 이용하여 수치 예를 통하여 자료를 이용하여 절대탈퇴율과 다중탈퇴율의 전환 과정을 설명하였으며 유도된 공식의 차이점을 서술하였다.

마지막으로 본 연구와 관련이 있는 향후 연구 과제를 제시해 본다. 첫 번째로 다중탈퇴 원인 중의 하나인 해약률은 변액 보험의 경우 보증금액 대비 적립금 수준에 따라서 변동할 수 있으므로 이러한 문제점을 반영할 수 있는 다중탈퇴모형으로의 전환 방법이 필요하다. 두 번째로 탈퇴율의 전환을 위하여 UDD 가정을 많이 사용하므로 발생하는 문제점에 대한 논의와 이를 극복을 위한 대안 방법이 필요하다. 구체적인 예를 들자면 절대탈퇴율에서 다중탈퇴율로 전환 후 절대탈퇴율로 전환하면 원래의 절대탈퇴율과 약간 다르게 되는데 이에 대한 대안적인 전환 방법에 대한 연구가 필요하다. 세 번째로 본 연구에서 제시된 공식을 기존 연구와 결합하여 탈퇴 원인 사이의 종속성을 반영한 방법을 만들어 볼 수도 있다. 네 번째로 탈퇴율의 추정방법의 개선 및 추정오차에 대한 연구가 필요하다.

참고문헌

Apostol, T. M. (1974). *Mathematical Analysis*, Addison-Wesley.

Bowers, N. L., Jones, D. A., Gerber, H. U., Nesbitt, C. J. and Hickman, J. C. (1997). *Actuarial Mathematics*, Society of Actuaries.

Carriere, J. F. (1994). Dependent decrement theory, *Transactions of Society of Actuaries*, **46**, 45–74.

Daniel, J. W. (1993). Multiple-decrement models and corresponding conditional single-decrement models, *Actuarial Research Clearing House*, 1, 229–237.

Golbeck, A. L. (1986). Probabilistic approaches to current life table estimation, *American Statistical Association*, **40**, 185–190.

London, D. (1997). *Survival Models and Their Estimation*, ACTEX Publications.

Shiu, E. S. W. (1987). Multiple-decrements by Riemann-Stieltjes integration, *Actuarial Research Clearing House*, 1, 1–4.

Generalized Conversion Formulas between Multiple Decrement Models and Associated Single Decrement Models

Hangsuck Lee[1]

[1]Dept. of Actuarial Science/Mathematics, Sungkyunkwan University

(Received July 2008; accepted August 2008)

Abstract

Researches on conversion formulas between multiple decrement models and the associated single decrement models have focused on calculating yearly-based conversion formulas. In practice, actuaries may be more interested in monthly-based conversion formulas. Multiple decrement tables and their associated single decrement tables consist of yearly-based rates of multiple decrements and absolute rates of decrements, respectively. This paper derives conversion formulas from yearly-based absolute rates of decrements to monthly-based rates of decrement due to cause j under the uniform distribution of decrements(UDD). Next, it suggests conversion formulas from monthly-based absolute rates of decrements to monthly-based rates of decrement due to cause j under UDD. In addition, it calculates conversion formulas from yearly-based rates of decrement due to cause j to the corresponding absolute rates of decrements under UDD or constant force assumption. Some numerical examples are discussed.

Keywords: Absolute rates of decrements, rates of decrement due to cause j, uniform distribution of decrements, constant force assumption.

[1]Assistant Professor, Dept. of Actuarial Science/Mathematics, Sungkyunkwan University, 53 Myungnyun-dong 3ga, Jongno-gu, Seoul 110-745, Korea. Email: hangsuck@skku.edu