

포화 LQR 제어기를 이용한 능동 진동 제어

Active Vibration Control Using Saturated LQR Controller

임 채 욱†

Chae-Wook Lim

(2008년 6월 18일 접수 ; 2008년 8월 28일 심사완료)

Key Words : Saturated LQR Controller(포화 LQR 제어기), Control Input's Saturation(제어입력 포화), Active Vibration Control(능동 진동 제어), Stability(안정성), Control Performance(제어 성능)

ABSTRACT

In this paper, a saturated LQR controller considering control input's saturation for stable linear time-invariant systems with single control input is studied. Based on Lyapunov stability, two linear matrix inequality sufficient existence conditions for this controller are presented. Through numerical simulations for 2DOF vibrating system, it is confirmed that the saturated LQR controller is stable in the presence of control input's saturation and it is also shown that this controller can be applied to vibrating system practically.

1. 서 론

기계공학, 조선공학, 항공우주공학, 토목/건축공학, 화학공학 분야 등의 능동 제어 시스템에서 제어입력의 포화는 종종 발생한다. 특히 선박이나 건물 등 대형 구조물의 능동 진동 제어 시스템에서 제어입력의 포화를 고려한 제어기 설계 방법이 필연적이라고 할 수 있다. 대형 구조물에 작용하는 파도, 바람, 지진 등의 자연적인 가진 외란은 매우 가변적이고 확률적인 특성을 가지고 있다. 제어 대상인 대형 구조물에 대하여 상대적으로 짧은 시간동안 발생하는 강한 외란을 목표로 제어기를 설계하는 것은 비경제적이며 비현실적이다. 그러므로 대형 구조물에 대한 제어기는 평상시에 주로 발생하는 외란을 대상으로 설계하고, 강한 외란이 발생할 경우에는 제어입력의 포화를 이용하는 것이 실질적이고 바람직한 접근 방법이라고 할 수 있다.

제어입력의 포화를 고려하지 않고 설계된 제어기

는 제어입력의 포화가 발생하는 동안 안정성을 보장할 수 없다. 포화는 비선형적인 특성이므로, 제어입력의 포화가 있는 계에 대한 제어기의 설계는 선형 제어 이론의 접근 방법만으론 어렵다. 비선형계에 대해서도 제어기의 설계가 가능한 Lyapunov 안정성 조건을 이용한 설계방법이 제어입력의 포화가 있는 계에 많이 이용되고 있다⁽¹⁾. Lee와 Hedrick은 Lyapunov 안정성 조건을 근거로 하여 제어입력의 포화가 존재하는 선형 제어기의 접근 안정성을 보장하는 LMI(linear matrix inequality) 형태의 충분조건들을 제시하였다⁽²⁾. 그러나 PID 제어기, LQR(linear quadratic regulator) 제어기, H_{∞} 제어기와 같은 선형 제어기들에 대한 이 LMI 충분조건들의 보수성과 제어성능 등에 대한 연구는 수행되지 않았다. 그리고 참고문헌(3~6) 등에서 제시된 방법은 이들 충분조건들 중 하나의 조건만을 이용한 것으로, Lyapunov 행렬 방정식의 해를 이용하여 제어기를 설계한 것이다. 이렇게 설계된 제어기는 뱅뱅 제어(bang-bang control)의 형태로, 제어입력의 비포화 시에도 비선형적인 제어입력으로 표현되는 단점이 있다. 또한 참고문헌(7)에서는 제어입력의 포화를 가지는 시스템에 대한 LQR

† 교신저자: 정회원, 한밭대학교 기계공학과
E-mail : cwlim@hanbat.ac.kr
Tel : (042)821-1733, Fax : (042)821-1587

제어기를 다루었으나, 준선형화(quasilinearization)를 이용한 접근방법이다.

이 논문에서는 하나의 제어입력을 가지는 안정한 선형 시불변계에 대한 포화 LQR 제어기를 다룬다. 대형 구조물의 제어에는 주로 하나의 제어입력이 사용되고, LQR 제어기는 이에 많이 적용된 방법 중의 하나이다⁽⁸⁾. 포화 LQR 제어기는 제어입력의 비포화 시에는 기존의 LQR 제어기와 같고, 제어입력의 포화 시의 제어기의 안정성이 보장되는 형태이다. 제어입력의 포화 시의 제어기의 안정성을 보장하기 위하여 참고문헌(2)에서 제시된 LMI 충분조건들을 모두 이용하여 설계된다. 그러므로 뱁벡 제어기와는 달리 포화 LQR 제어기는 제어입력의 비포화 시의 제어입력은 선형적으로 표현되고, 제어기의 설계는 기존의 LQR 제어기 설계 방법을 따르는 장점이 있다. 제시되는 포화 LQR 제어기의 능동 진동 제어에 대한 적용 가능성과 실용성을 확인하기 위하여 2자유도 진동계에 대한 수치실험을 수행하여 그 결과를 고찰한다.

2. 포화 선형 제어기의 안정성

먼저 제어입력의 포화가 존재하는 임의의 선형 제어기의 안정성에 대하여 살펴보자.

다음의 선형 시불변계 식(1)을 고려해 보자.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), x(0) = x_0 \quad (1)$$

여기서 A 는 $n \times n$ 크기의 안정한 시스템 행렬이고, $x = [x_1 x_2 \dots x_n]^T$ 는 $n \times 1$ 크기를 가지는 상태 벡터이고, B 는 $n \times 1$ 크기의 제어입력 벡터이고, 제어입력 $u(t)$ 의 최대값은 u_{\max} 로 식(2)의 제한조건에 의해서 구속된다.

$$|u(t)| \leq u_{\max} \quad (2)$$

다음의 선형 제어기 식(3)을 고려해 보자.

$$u(t) = -Gx(t) \quad (3)$$

여기서 G 는 제어 게인이고, 제어기 식(3)은 제어입력의 포화를 고려하지 않고 설계된 임의의 선형 제어기이다.

제어입력에 포화가 발생하는 포화 선형 제어기의 형태는 포화함수를 이용하여 식(4)와 같이 표현된다.

$$u(t) = -\text{sat}[Gx(t)] = \begin{cases} u_{\max}, & \text{if } -Gx(t) \geq u_{\max} \\ -Gx(t), & \text{if } |Gx(t)| < u_{\max} \\ -u_{\max}, & \text{if } -Gx(t) \leq -u_{\max} \end{cases} \quad (4)$$

Lyapunov 함수를 식(5)와 같이 양정 대칭행렬 S 를 이용하여 이차함수의 형태로 정의하자.

$$V(x(t)) = x^T(t)Sx(t) \quad (5)$$

만약 다음의 LMI 형태의 충분조건 식(6)과 식(7)을 동시에 만족하는 양정 대칭행렬 S 가 존재한다면, 선형 시불변계 식(1)에 대한 선형 제어기 식(3)은 제어입력의 포화가 발생하더라도 점근 안정성이 보장된다(증명은 참고문헌(2)를 참조).

$$A^T S + SA < 0 \quad (6)$$

$$(A - BG)^T S + S(A - BG) < 0 \quad (7)$$

식(6)은 개루프계의 안정성을 의미하고, 식(7)은 폐루프계의 안정성을 의미한다. 그러므로 개루프계와 폐루프계의 안정성을 동시에 만족시키는 Lyapunov 함수의 양정 대칭행렬 S 가 존재한다면, 포화 선형 제어기의 안정성은 보장된다는 의미를 내포하고 있다.

3. 포화 LQR 제어기

이 논문은 제어입력의 포화가 존재하는 선형 시불변계에 대하여 폐루프계의 안정성이 해석적으로 보장되는 포화 LQR 제어기를 다루고자 한다. 이를 위해 Lyapunov 안정성 조건을 이용한 식(6)과 식(7)의 LMI 조건들을 이용한다.

LQR 제어기는 식(8)의 이차 성능 지수를 최소화하는 제어입력을 구하는 것이다.

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [x^T(t)Qx(t) + ru^2(t)] dt \quad (8)$$

여기서 Q 는 반양정 가중행렬이고, r 은 양의 스칼라이다.

LQR 제어기는 식(9)와 같다⁽⁹⁾.

$$u(t) = -Kx(t) = -r^{-1}B^T Px(t) \quad (9)$$

여기서 $K=r^{-1}B^T P$ 는 최적 제어 게인이고, 행렬 P 는 Riccati 행렬식 (10)의 해이다.

$$A^T P + PA + Q - PB r^{-1} B^T P = 0 \quad (10)$$

식 (9)로 주어지는 LQR 제어기는 제어입력의 포화를 고려하지 않고 설계되었으므로, 제어입력 한계 안의 선형 구간에서만 안정성이 보장된다.

제어입력에 포화가 발생하는 포화 LQR 제어기의 형태를 포화함수를 이용하여 식 (11)과 같이 표현한다.

$$u(t) = -\text{sat}[Kx(t)] = -\text{sat}[r^{-1}B^T P x(t)] \quad (11)$$

포화 LQR 제어기 식 (11)의 안정성은 식 (6)과 식 (7)의 결과를 이용하면 보장된다. 최적 제어 게인 $K=r^{-1}B^T P$ 를 식 (7)에 대입하면 식 (12)와 같다.

$$A^T S + SA - (PB r^{-1} B^T S + SB r^{-1} B^T P) < 0 \quad (12)$$

따라서 주어진 행렬 P 에 대하여 LMI 형태의 충분조건 식 (6)과 식 (12)를 동시에 만족하는 양정 대칭행렬 S 가 존재한다면, 식 (11)로 주어지는 포화 LQR 제어기는 제어입력의 포화가 발생하더라도 안정성은 항상 보장된다.

식 (6)과 식 (12)의 LMI 조건들을 동시에 만족하는 해석적인 해 행렬 P 와 S 를 동시에 구하기는 어렵다. 또한 식 (6)과 식 (12)는 충분조건이므로 주어진 행렬 P 에 대하여 식 (6)과 식 (12)를 만족하는 해 행렬 S 가 존재하여 안정한 제어기가 설계된다 할지라도 경우에 따라 설계된 제어기의 제어성능이 나쁠 수도 있다. 그러므로 수치실험을 통하여 제어입력의 포화가 존재하는 포화 LQR 제어기의 안정성과 제어성능을 살펴볼 필요가 있다. 식 (6)과 식 (12)의 LMI 조건들을 만족하는 해의 존재여부는 상용 프로그램인 MATLAB[®]에서 제공하는 LMI toolbox⁽¹⁰⁾ 등을 이용하여 수치적으로 쉽게 확인할 수 있다. r 의 크기가 작아짐에 따라 LQR 제어기의 제어 게인 K 는 커지므로, 수치적으로는 포화 LQR 제어기의 제어 게인의 크기는 행렬 Q 를 고정시킨 상태에서 r 을 조절함으로써 확인할 수 있다. r 의 크기가 작아짐에 따라 식 (6)과 식 (12)의 LMI 조건들을 만족하는 행렬 S 가 존재하는 해의 영역이 좁아지게 된다. 그러

므로 고정된 행렬 Q 에 대하여 식 (6)과 식 (12)의 LMI 조건들을 만족하는 r 의 최소값(r_{\min})을 수치적으로 확인할 수 있고, $r \geq r_{\min}$ 인 조건 하에서 포화 LQR 제어기의 안정성은 보장된다.

4. 수치 예제

여기에서는 이 논문에서 제시된 포화 LQR 제어기 식 (11)의 제어성능과 실용성을 수치 예제를 통하여 살펴본다. 이 논문에서 제시된 포화 LQR 제어기는 기존의 LQR 제어기의 설계 방법을 그대로 따르면서 제어입력의 포화 시 제어기의 안정성을 보장하기 위하여 단지 제어 게인의 크기에 제한을 두는 방법이므로, 어느 정도의 제어 성능을 확보할 수 있는지를 확인할 필요가 있다. 이를 위하여 식 (6)과 식 (12)의 LMI 조건들을 만족하는 포화 LQR 제어기의 선형 구간에서의 제어성능을 확인하여 실구조물에 대한 적용가능성을 확인해 본다. 식 (6)과 식 (12)의 LMI 조건들에 대한 수치적인 계산은 상용 프로그램인 MATLAB[®]에서 제공하는 LMI toolbox⁽¹⁰⁾을 이용하였다.

수치 예제는 Fig. 1과 같이 2자유도 진동계에 하나의 구동기가 있는 경우를 고려한다. 일반적으로 선박, 건물 등의 대형 구조물은 1% 이하의 감쇠비를 가지는 2자유도 이하의 진동계로 표현된다. 계의 질량 $m_1 = m_2 = 1\text{kg}$, 강성 $k_1 = k_2 = 1\text{N/m}$, 감쇠 $c_1 = c_2 = 0.01\text{Ns/m}$ 이고, 계의 운동 방정식은 (1)과 같다. 여기서 상태 벡터 $x = [x_1 \ x_2 \ \dot{x}_1 \ \dot{x}_2]^T$, 시스템

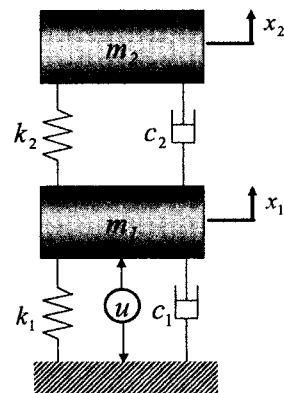


Fig. 1 2DOF vibrating system with one actuator

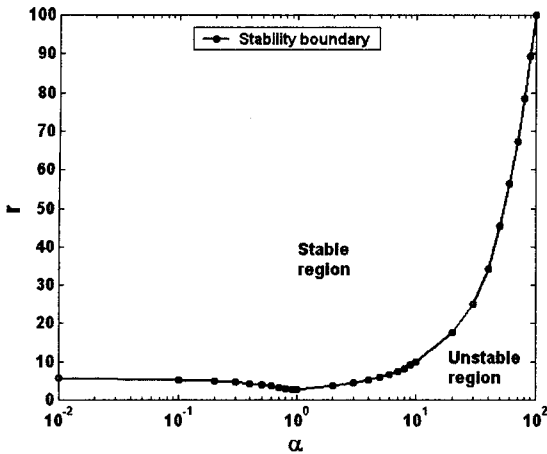
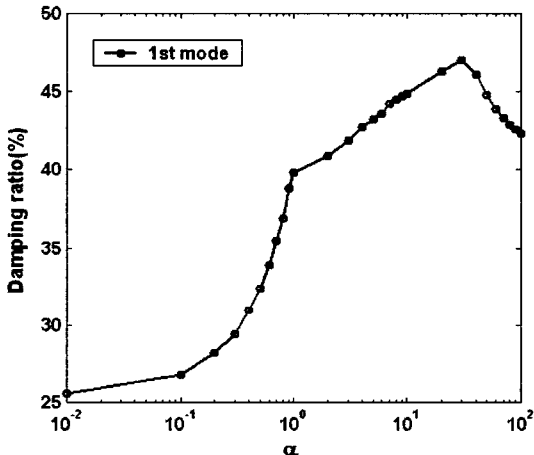
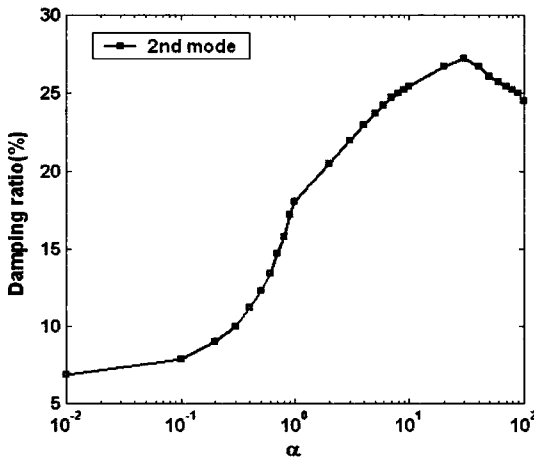


Fig. 2 Values of r_{min} according to the values of α



(a) 1st mode



(b) 2nd mode

Fig. 3 Damping ratios at $r = r_{min}$ according to the values of α

행렬 A 는 식 (13)과 같고, 제어입력 벡터 $B = [0 \ 0 \ 1/m_1 \ 0]^T$ 이다.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1+k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & -\frac{c_1+c_2}{m_1} & \frac{c_2}{m_1} \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} & \frac{c_2}{m_2} & -\frac{c_2}{m_2} \end{bmatrix} \quad (13)$$

이 진동계의 1, 2차 모드의 고유진동수(감쇠비)는 각각 0.098 Hz(0.31%), 0.258 Hz(0.81%)이다. 최대 제어력 $u_{max} = 1N$, 초기 상태 $x_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 6]^T$ 인 경우를 고려한다.

포화 LQR 제어기 설계를 위하여 가중행렬 $Q = \text{diag}(1, 1, \alpha, \alpha)$ 인 경우에 대하여 살펴본다. 주어진 α 의 값에 대하여 r 의 값을 변화시키면서 식 (6)과 식 (12)의 LMI 조건들을 만족하는 행렬 S 의 존재 여부를 수치적으로 확인하여 r_{min} 의 값을 확인해 보았다. Fig. 2는 이에 대한 수치해석 결과를 보여주고 있다. Fig. 2에서 곡선은 포화 LQR 제어기의 안정성 경계이고, 이 곡선의 윗면이 안정한 영역이고 아랫면이 불안정한 영역이다. 안정한 영역이 매우 넓음을 관찰할 수 있으며, α 의 값이 커질수록 r_{min} 의 값이 커지는 경향을 확인할 수 있다. 또한 포화 LQR 제어기의 안정성이 보장되지 않는 불안정한 영역은 제어 게인이 매우 큰 영역에 속함을 Fig. 3을 통하여 확인할 수 있다. Fig. 3은 주어진 α 의 값에 대하여 안정성 경계에 있는 r_{min} 의 값을 이용하여 설계된 제어기를 적용했을 때의 1, 2차 모드의 감쇠비를 보여주고 있다. 제어입력의 비포화 시에 1차 모드에서는 대략 25~50%의 감쇠비를, 2차 모드에서는 대략 5~30%의 감쇠비를 가지는 제어성능을 확보할 수 있음을 확인할 수 있다. 일례를 들어 보자. $\alpha = 3$ 인 경우 $r_{min} = 4.4$ 인데, 이를 이용하여 설계된 포화 LQR 제어기의 최적 제어 게인 $K = [-0.4617 \ 0.2557 \ -1.2514 \ -0.5439]$ 이다. 이를 적용했을 때 질량 m_2 에 작용하는 외란에 대한 변위 x_1 의 주파수 응답함수를 Fig. 4에서 보이고 있다. Fig. 4에서 보이는 것처럼 1, 2차 모드에서 각각 41.56 dB(비제어 시 45.55 dB, 제어 시 3.99 dB)와 25.48 dB(비제어 시 20.48 dB, 제어 시 -5 dB)의 진동 레벨의 감소효과를 준다. 동일한 제어기를 적용했을

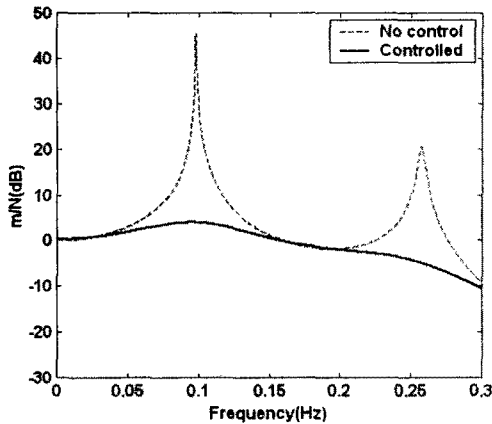
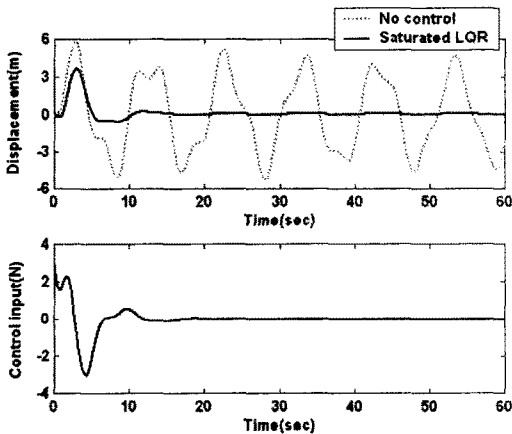
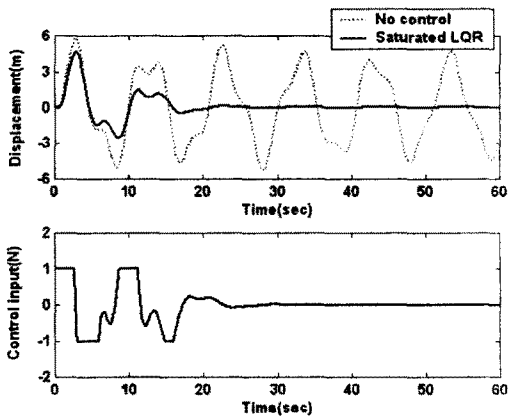


Fig. 4 Frequency response function applying the LQR controller($\alpha=3$ & $r=r_{\min}=4.4$)



(a) Without control input's saturation



(b) With control input's saturation

Fig. 5 Displacement and control input applying the saturated LQR controller($\alpha=3$ & $r=r_{\min}=4.4$)

때의 초기 상태에 대한 x_1 의 시간응답을 보면 Fig. 5와 같다. Fig. 5(a)는 제어입력의 포화가 없는 경우이고 Fig. 5(b)는 제어입력의 포화가 있는 경우이다. 제어입력의 포화가 없는 경우에 충분히 큰 제어 게인의 설계가 가능하므로 제어입력의 비포화 시에 제어성능이 매우 좋고, 제어입력의 포화 시에도 제어가 안정하게 작동할 뿐만 아니라 제어성능도 우수함을 확인할 수 있다. 그러므로 불안정한 영역은 제어 게인이 매우 큰 경우에 해당함을 알 수 있다.

5. 결 론

이 논문의 목적은 제어입력의 포화가 존재하는 선형 시불변계 대하여 안정성이 해석적으로 보장되는 포화 LQR 제어를 제시하고, 이 포화 LQR 제어기의 능동 진동 제어에 대한 적용 가능성을 살펴보는 것이었다. 제시된 포화 LQR 제어기 식 (11)은 제어입력의 포화가 없는 기존의 LQR 제어기와 동일한 설계 방법을 따르며, 제어입력의 포화에 대한 안정성 보장은 식 (6)과 식 (12)의 LMI 충분조건들을 통하여 확인한다. 그리고 2자유도 진동계에 대한 수치 실험을 통하여 제시된 포화 LQR 제어기의 안정성과 실용성을 확인하였다. 식 (6)과 식 (12)의 조건으로 인해 포화 LQR 제어기의 제어 게인의 크기는 제한되지만, 진동계의 진동 레벨 감소효과를 충분히 크게 할 수 있는 제어성능의 확보가 가능함을 확인할 수 있었다.

참 고 문 헌

- (1) Kalman, R. E. and Bertram, J. E., 1960, "Control System Analysis and Design via the Second Method of Lyapunov: I Continuous-time Systems", Journal of Basic Engineering, Vol. 82, pp. 371-393.
- (2) Lee, A. W. and Hendrick, J. K., 1995, "Some New Results on Closed-loop Stability in the Presence of Control Saturation", International Journal of Control, Vol. 62, No. 3, pp. 619-631.
- (3) Wu, Z. and Soong, T. T., 1996, "Modified Bang-bang Control Law for Structural Control Implementation", Journal Engineering Mechanics,

ASCE, Vol. 122, pp. 771~777.

(4) Cai, G. P., Huang, J. Z., Sun F. and Wang, C., 2000, "Modified Sliding-mode Bang-bang Control for Seismically Excited Linear Structures", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 29, pp. 1647~1657.

(5) Lim, C. W., Moon, S. J., Park, Y. and Park, Y. S., 2006, "Experimental Study on Stability of Robust Saturation Controller", *Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering*, Vol. 16, No. 2, pp. 207~213.

(6) Lim, C. W., Park, Y. and Moon, S. J., 2006, "Active Vibration Control of Structure Using LMI Optimization Design of Robust Saturation Controller", *Transactions of the Korean Society for*

Noise and Vibration Engineering, Vol. 16, No. 3, pp. 298~306.

(7) Gökçek, C., Kabamba, P. T. and Meerkov, S. M., 2001, "An LQR/LQG Theory for Systems with Saturating Actuators", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 46, No. 10, pp.1529~1542.

(8) Spencer Jr., B. F. and Sain, M. K., 1997, "Controlling Buildings: A New Frontier in Feedback", *IEEE Control Systems Magazine on Emerging Technology*, Vol. 17, No. 6, pp.19~35.

(9) Dorato, P., Abdallah, C. and Cerone, V., 1995, "Linear Quadratic Control : an Introduction", Prentice Hall, Inc.

(10) Gahinet, P. and Nemirovski, A., 1995, "The LMI Control Toolbox", The MathWorks Inc.