DOI: 10.3745/KIPSTA.2008.15-A.6.301

메쉬의 교차큐브에 대한 임베딩

김 숙 연†

요 약

교차큐브는 병렬처리 시스템의 상호연결망으로서 널리 알려진 하이퍼큐브와 많은 면에서 비슷하면서도 절반 정도의 지름을 가지는 등 개선된 망 성질들을 가지므로 각광 받아 왔다. 크기가 2×2^m이거나 4×2^m인 메쉬를 연장율 1로 교차큐브에 임베딩하는 연구 결과는 이미 발표된 바 있다. 그러나 양변의 길이가 모두 8 이상인 메쉬가 교차큐브에 연장율 1로 임베딩되는지는 알려진 바가 없다. 본 논문에서는 크기 $2^n\times2^m$인 메쉬가 교차큐브에 연장율 1, 확장율 2^{n-1}로 임베딩될 수 있음을 보인다, $n\geq1$, $m\geq3$.

키워드 : 교차큐브, 메쉬, 임베딩, 연장율, 확장율

Embedding a Mesh into a Crossed Cube

Kim, Sook-Yeon†

ABSTRACT

The crossed cube has received great attention because it has equal or superior properties to the hypercube that is widely known as a versatile parallel processing system. It has been known that a mesh of size 2×2^m can be embedded into a crossed cube with dilation 1 and expansion 1 and a mesh of size 4×2^m with dilation 1 and expansion 2. However, as we know, it has been a conjecture that a mesh with more than eight rows and columns can be embedded into a crossed cube with dilation 1. In this paper, we show that a mesh of size $2^n\times2^m$ can be embedded into a crossed cube with dilation 1 and expansion 2^{n-1} where $n\geq1$ and $m\geq3$.

Keywords : Crossed Cube, Mesh, Embedding, Dilation, Expansion

1. 서 론

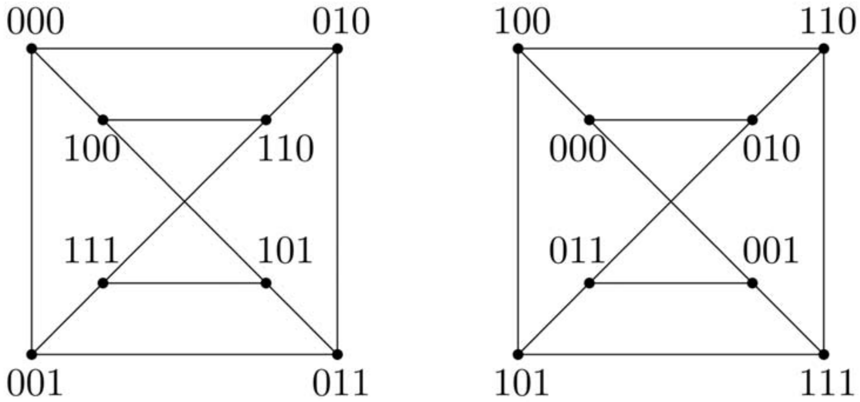
병렬처리 분야에서는 용량이 큰 작업을 부작업 (subtask)들로 나누어 병렬로 처리 하는 기법이 오래 전부터 널리 사용되어 왔다. 부작업들을 병렬처리시스템의 프로세서들에게 할당하는 문제는 그래프 임베딩으로 모델링될 수 있다. 부작업들과 그들간의 통신은 그래프 G로 나타내고 병렬처리시스템의 프로세서와 그들간의 연결 상태를 그래프 H로 나타낸다. 그런 후 그래프 G를 그래프 H에 효율적으로 임베딩하면 부작업들은 병렬처리시스템에 효과적으로 할당될 수 있다. 더구나 그래프 임베딩은 병렬 구조간의 시뮬레이션이나 [16, 18], 병렬처리시스템의 병렬 알고리즘 수행[1, 4], VLSI 칩 설계[2, 15, 17]등을 위해서도 필수적인 기술이다.

주어진 그래프 G에 대해서 $V(G)$와 $E(G)$를 그래프 G의 노드 집합과 에지 집합이라고 하자. 주어진 두 개의 그래프 G과 H에 대해서 그래프 G의 그래프 H에 대한 임베딩은 노드 집합 $V(G)$의 노드 집합 $V(H)$에 대한 단사 함수 ψ 이다 ($\psi:V(G)\rightarrow V(H)$). 여기서 그래프 G를 손님 그래프 (guest graph)라 하고 그래프 H를 주인 그래프 (host graph)라고 한다.

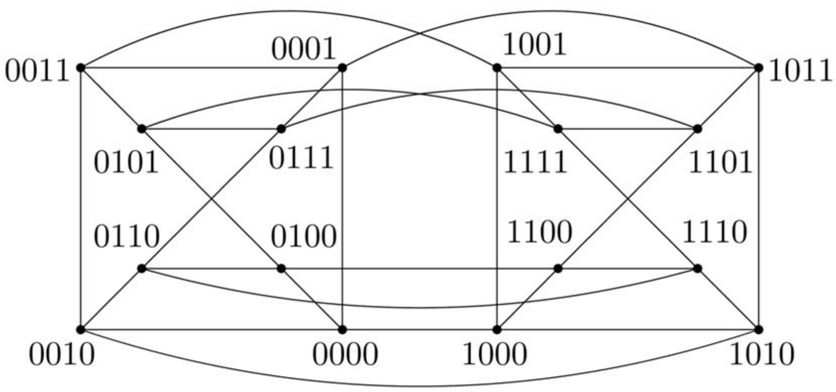
임베딩의 성능을 측정하는 척도에는 연장율 (dilation) 과 확장율 (expansion) 등이 있다. 주인 그래프가 프로세서간의 연결 상태를 나타낼 때 임베딩의 연장율은 통신지연 (communication delay)을 측정하는 척도가 되고 확장율은 프로세서 이용도 (processor utilization) 를 측정하는 척도가 된다. 손님 그래프 G의 에지 (u,v)에 대해서 에지 (u,v)의 연장율은 두 노드 $\psi(u)$와 $\psi(v)$간의 최단 거리이다. 임베딩 ψ의 연장율은 에지 집합 $E(G)$에 속한 에지들의 연장율 중 최대값이다. 확장율은 주인 그래프와 손님 그래프의 노드 개수의 비율 $|V(H)|/|V(G)|$이다.

한편 병렬 처리 분야에서 매우 유명한 상호연결망인 하이퍼큐브는 단순한 구조, 작은 지름, 정규 분지수, 대칭성, 고장 감내성 등의 유용한 성질들을 가지고 있다. 하이퍼큐브의 변형으로서 제안된 교차큐브 (crossed cube)는 하이퍼큐브와 많

† 정 회 원 : 한경대학교 컴퓨터공학과 교수
논문접수 : 2008년 6월 19일
수 정 일 : 1차 2008년 9월 9일
심사완료 : 2008년 9월 25일



(그림 1) 교차큐브 Q_3



(그림 2) 교차큐브 Q_4

은 면에서 비슷하면서도 절반 정도의 지름을 가지는 등 개선된 망 성질들을 가지므로 각광 받게 되었다[3,6,7,8,9,11,13]. 따라서 최단경로, 헤밀톤 경로, 사이클, 트리, 메쉬 등을 교차큐브에 임베딩하는 연구도 활발히 진행되었다[3,6,12,19,14,10,5]. 크기가 2×2^m이거나 4×2^m인 메쉬를 연장율 1로 교차큐브에 임베딩하는 연구 결과는 이미 발표된 바 있다 [10]. 그러나 양변의 길이가 모두 8 이상인 메쉬가 교차큐브에 연장율 1로 임베딩되는지는 알려진 바가 없다.

본 논문에서는 크기 $2^n \times 2^m$인 메쉬가 교차큐브에 연장율 1, 확장율 2^{n-1}로 임베딩될 수 있음을 보인다 ($n \ge 1, m \ge 3$). 2절에서는 교차큐브와 메쉬를 정의하고 3절에서는 메쉬를 교차큐브에 임베딩하는 재귀적인 방법을 제시하고 4절에서는 크기 $2^n \times 2^m$인 메쉬가 교차큐브에 연장율 1, 확장율 2^{n-1}로 임베딩될 수 있음을 보이고 5절에서는 결론을 맺는다.

2. 교차큐브와 메쉬의 정의

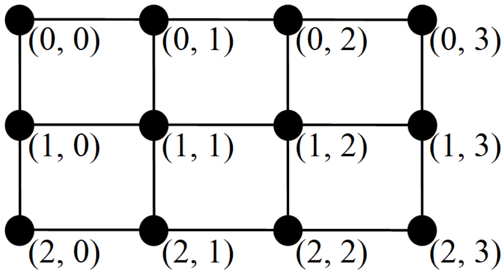
이 절에서는 교차큐브와 메쉬를 정의한다. 교차큐브를 정의하기 위해서 먼저 두 이진스트링간의 짝꿍 관계를 정의하겠다.

정의 2.1 길이가 짝수 p인 이진스트링 $x = x_0x_1 \cdots x_{p-2}x_{p-1}$와 $y = y_0y_1 \cdots y_{p-2}y_{p-1}$이 있다고 하자. 만약 모든 i, $0 \le i < p/2$, 에 대해서 다음 조건을 만족하면 x와 y는 짝꿍이다. 그 역도 성립한다.

$$(x_{2i}x_{2i+1}, y_{2i}y_{2i+1}) \in \{(00,00), (10,10), (01,11), (11,01)\}$$

이제 교차큐브를 정의한다.

정의 2.2 p차원 교차큐브 Q_p는 2^p개의 노드를 가진다. 교차큐브 Q_p의 각 노드는 서로다른 주소를 가지는데 각 주소는 p비트이다. 교차큐브 Q_p의 노드 $u = u_0u_1 \cdots u_{p-2}u_{p-1}$ 와 노드 $v = v_0v_1 \cdots v_{p-2}v_{p-1}$는 다음 조건을 만족하는 d가 존재하면 d-차원 에지 (u,v)를 가진다.



(그림 3) 크기 3×4인 메쉬

1) $u_k = v_k$, $0 \le k < d$,

2) $u_d \ne v_d$,

3) d가 홀수이면 $u_{d+1}u_{d+2}\cdots u_{p-2}u_{p-1}$와 $v_{d+1}v_{d+2}\cdots v_{p-2}v_{p-1}$가 짝꿍이고,

4) d가 짝수이면 $u_{d+1} = v_{d+1}$이고 $u_{d+2}u_{d+3}\cdots u_{p-2}u_{p-1}$와 $v_{d+2}v_{d+3}\cdots v_{p-2}v_{p-1}$가 짝꿍이다.

(그림 1)과 (그림 2)에 교차큐브 Q_3과 교차큐브 Q_4가 그려져 있다. 앞으로 교차큐브 Q_p를 간단히 큐브 Q_p라고 하고 교차큐브의 노드를 큐브노드라 하겠다.

이제 메쉬를 정의한다. (그림 3)에 크기 3×4인 메쉬가 나타나 있다.

정의 2.3 크기 $N \times M$ 인 메쉬는 다음과 같은 노드 집합 V와 에지 집합 E를 가진다.

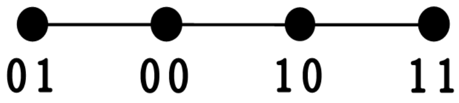
$$V = \{(i,j) | 0 \le i < N, 0 \le j < M\}$$

$$E = \{((i,j),(i',j)) | (i,j) \in V, (i',j) \in V, i+1 = i'\}$$
$$\cup \{((i,j),(i,j')) | (i,j) \in V, (i,j') \in V, j+1 = j'\}$$

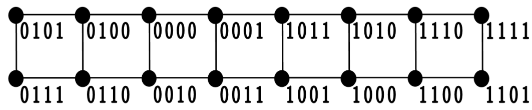
3. 메쉬의 교차큐브에 대한 재귀적 임베딩

이 절에서는 메쉬를 교차큐브에 임베딩하는 재귀적인 방법을 제시한다. 차후 제시하는 모든 임베딩의 연장율은 1이다. 임베딩을 재귀적으로 정의하기 위해서 다음과 같은 조건 3.1을 설정한다.

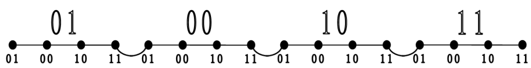
조건 3.1 크기 $N \times M$ 인 메쉬를 교차큐브 Q_p에 임베딩할 때 차원 p는 짝수이고 임의의 행 i, $0 \le i < N$, 의 맨 왼쪽 노드 $(i,0)$과 맨 오른쪽 노드 $(i, M-1)$가 대응하는 큐브노드들이 서로 짝꿍이다.



(그림 4) 크기 1×4인 메쉬의 Q_2에 대한 임베딩



(그림 5) 크기 2×8인 메쉬의 Q_4에 대한 임베딩 f_1



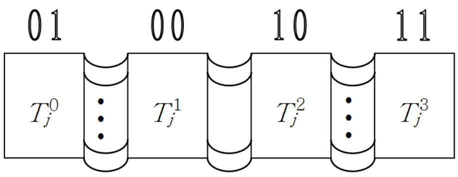
(그림 6) 크기 1×16 메쉬의 Q_4에 대한 임베딩

(그림 4)에 크기 1×4인 메쉬를 Q_2에 조건 3.1을 만족하면서 임베딩한 예가 나타나 있다. 맨 왼쪽 노드 (0,1)이 대응하는 노드 01과 맨 오른쪽 노드 (0,3)이 대응하는 노드 11이 서로 짝꿍이다.

(그림 5)에 크기 2×8인 메쉬를 Q_4에 조건 3.1을 만족하면서 임베딩한 예가 나타나 있다. 맨 왼쪽 위 노드 (0,0)과 맨 오른쪽 위 노드 (0,7)이 대응하는 큐브노드 0101과 1111은 서로 짝꿍이고 맨 왼쪽 아래 노드 (1,0)과 맨 오른쪽 아래 노드 (1,7)이 대응하는 노드 0111과 1101은 서로 짝꿍이다. (그림 5)에서 인접한 메쉬 노드들은 인접한 큐브 노드들에 대응한다.

(그림 4)이나 (그림 5)와 같이 크기 $N \times M$인 메쉬를 큐브 Q_p에 조건 3.1을 만족하면서 임베딩할 수 있으면 크기 $N \times 4M$인 메쉬를 큐브 Q_{p+2}에 조건 3.1을 만족하면서 임베딩할 수 있다. 예를 들어 (그림 4)과 같이 크기 1×4인 메쉬를 Q_2에 조건 3.1을 만족하면서 임베딩할 수 있으면 (그림 6)과 같이 크기 1×16인 메쉬를 Q_4에 조건 3.1을 만족하면서 임베딩할 수 있다.

(그림 6)은 크기 1×4인 메쉬의 복사본 네 개로부터 에지를 추가하여 크기 1×16인 메쉬를 구성한 예를 보여 준다. 추가된 에지들은 곡선으로 그려져 있다. (그림 6)에서 각 복사본의 아래쪽에는 (그림 4)과 똑같이 두 비트씩 붙어 있다. 또한 각 복사본의 위쪽에는 큰 숫자로 2 비트씩 붙어 있다. 위쪽의 2 비트와 아래의 2 비트를 연결하여 네 비트의 큐브 노드 주소를 얻을 수 있다. 예를 들어 맨 왼쪽 노드 (0,0)은 큐브노드 0101에 대응되고 그 다음 노드 (0,1)은 0100에 대응되고 맨 오른쪽 노드 (0,15)는 1111에 대응된다. (그림



(그림 7) 메쉬 T_{j+1}의 큐브 Q_{p+2j+2}에 대한 임베딩

6)에서 인접한 메쉬 노드들은 인접한 큐브노드들에 대응한다. 뿐만 아니라 맨 왼쪽 노드 (0,1)과 맨 오른쪽 노드 (0,15)가 대응하는 노드들 0101과 1111이 서로 짝꿍이다. 이제 다음 소정리를 증명하겠다.

소정리 3.1 크기 $N \times M$인 메쉬가 큐브 Q_p에 조건 3.1을 만족하면서 임베딩된다고 하자 ($N \geq 1$, $M > 1$). 그러면 크기 $N \times 4^i M$인 메쉬는 큐브 Q_{p+2i}에 조건 3.1을 만족하면서 임베딩된다 ($i \geq 0$).

[증명] 정수 i에 관한 수학적 귀납법으로 증명하겠다. $i = 0$일 때 본 소정리가 성립한다. 본 소정리가 $i = j$일 때 성립한다고 가정하고 $i = j+1$일 때 성립함을 보이겠다. 크기 $N \times 4^j M$인 메쉬를 T_j라 하자. 메쉬 T_j의 네 개의 복사본을 만들어 T_j^0, T_j^1, T_j^2, T_j^3라 하자. 이들을 (그림 7)와 같이 크기 $N \times 4^{j+1} M$인 메쉬 T_{j+1}을 형성하도록 에지들을 추가한다. 그 추가된 에지들은 (그림 7)에 곡선으로 그려져 있다.

메쉬 T_j는 큐브 Q_{p+2j}에 조건 3.1을 만족하면서 임베딩되므로 네 개의 복사본의 노드들은 각각 길이가 $p+2j$인 큐브노드 주소를 가지고 있다. 길이 $p+2j$인 큐브노드 주소의 앞에 두 비트씩 덧붙이되 메쉬 T_j^0의 노드들에는 모두 01을 붙인다. 또한 메쉬 T_j^1, T_j^2, T_j^3의 노드들에는 각각 00, 10, 11을 덧붙인다. 그러면 메쉬 T_{j+1}의 각 노드들은 서로 다른 새로운 큐브노드 주소를 갖게 되는데 이 큐브노드 주소는 길이가 $p+2j+2$이다. 이 주소대로 T_{j+1}을 큐브 $Q_{p+2(j+1)}$에 임베딩하면 조건 3.1을 만족한다. 왜냐하면 맨 왼쪽 노드의 첫 두 비트 01과 맨 오른쪽 노드의 첫 두비트 11은 짝꿍이기 때문이다. 첫 두비트를 제외한 나머지 비트들에 대해서 맨 왼쪽 노드와 맨 오른쪽 노드가 서로 짝꿍임은 가정에 의해서 명확하다. 또한 메쉬 T_{j+1}에서 인접한 노드들은 인접한 큐브노드들에 대응함도 쉽게 확인해 볼 수 있다. □

위 소정리에서는 크기 $N \times M$인 메쉬가 큐브 Q_p에 조건 3.1을 만족하면서 임베딩되면 열의 개수가 네 배인 메쉬를 같은 확장율로 임베딩할 수 있음을 보였다. 이제 열의 개수가 두 배인 메쉬를 같은 확장율로 임베딩할 수 있음을 보이겠다.

소정리 3.2 크기 $N \times M$인 메쉬가 큐브 Q_p에 조건 3.1을 만족하면서 임베딩된다고 하자 ($N \geq 1$, $M > 1$). 그러면 크기 $N \times 2 \cdot 4^i M$인 메쉬는 큐브 Q_{p+2i+1}에 임베딩된다 ($i \geq 0$).

[증명] 크기 $N \times M$인 메쉬가 큐브 Q_p에 조건 3.1을 만족하면서 임베딩된다고 하자 ($N \geq 1$, $M > 1$). 그러면 소정리 3.1에 의해서 크기 $N \times 4^i M$인 메쉬는 큐브 Q_{p+2i}에 조건 3.1을 만족하면서 임베딩된다 ($i \geq 0$). 크기 $N \times 4^i M$인 메쉬를 T_i라 하자. 메쉬 T_i의 복사본을 두 개 만들어 T_i^0와 T_i^1라 하자. 이들이 크기 $N \times 2 \cdot 4^i M$인 메쉬를 형성하도록 에지들을 추가한다.
메쉬 T_i는 큐브 Q_{p+2i}에 조건 3.1을 만족하면서 임베딩되므로 복사본들의 노드들은 각각 길이가 $p+2i$인 큐브노드 주소를 가지고 있다. 길이 $p+2i$인 큐브노드 주소의 앞에 한 비트씩 덧붙이되 복사본 T_i^0의 노드들에는 모두 0을 복사본 T_i^1의 노드들에는 모두 1을 붙인다. 그러면 크기 $N \times 2 \cdot 4^i M$인 메쉬의 각 노드들은 서로 다른 새로운 큐브노드 주소를 갖게 되는데 이 큐브노드 주소의 길이는 $p+2i+1$이다. 이 주소대로 큐브 Q_{p+2i+1}에 임베딩하면 크기 $N \times 2 \cdot 4^i M$인 메쉬에서 인접한 노드들은 인접한 큐브노드들에 대응한다. □

소정리 3.1과 소정리 3.2로부터 다음과 같은 정리를 얻을 수 있다.

정리 3.1 크기 $N \times M$인 메쉬가 큐브 Q_p에 조건 3.1을 만족하면서 임베딩된다고 하자 ($N \geq 1$, $M > 1$). 그러면 크기 $N \times 2^q M$인 메쉬는 큐브 Q_{p+q}에 임베딩된다 ($q \geq 0$).

정리 3.1과 (그림 4)로부터 다음과 같은 따름정리를 얻을 수 있는데 이 따름정리는 Chang에 의해서 이미 알려진 바 있다 [3].

〈표 1〉 함수 f_1

$f_1(0,0,0) = 0$	$f_1(0,0,1) = 1$	$f_1(0,0,2) = 0$	$f_1(0,0,3) = 1$	$f_1(0,1,0) = 0$	$f_1(0,1,1) = 1$	$f_1(0,1,2) = 0$	$f_1(0,1,3) = 0$
$f_1(1,0,0) = 0$	$f_1(1,0,1) = 1$	$f_1(1,0,2) = 1$	$f_1(1,0,3) = 1$	$f_1(1,1,0) = 0$	$f_1(1,1,1) = 1$	$f_1(1,1,2) = 1$	$f_1(1,1,3) = 0$

〈표 2〉 함수 $f_n(i,j,k)$, $n \ge 2$, $0 \le k < 4$

$0 \le i < 2^{n-1}$	$f_n(i,j,k) = f_1(0,j,k)$
$2^{n-1} \le i < 2^n$	$f_n(i,j,k) = f_1(1,j,k)$

따름정리 3.1 큐브 Q_{q+2}은 헤밀톤 경로 (hamiltonian path) 를 가진다 ($q \ge 0$).

4. 크기 $2^n \times 2^m$인 메쉬의 교차큐브에 대한 임베딩

이 절에서는 크기 $2^n \times 2^m$인 메쉬가 교차큐브에 연장율 1, 확장율 2^{n-1}로 임베딩될 수 있음을 보인다 ($n \ge 1, m \ge 3$). 먼저 열의 개수가 8인 메쉬를 임베딩한 후 열의 개수가 2^m인 메쉬로 확장하겠다. 크기 $2^n \times 8$인 메쉬를 큐브 Q_{2n+2}에 임베딩하는 함수 f_n은 크기 $2^n \times 8$인 메쉬의 노드 (i,j)가 대응하는 큐브 Q_{2n+2}의 노드의 k번째 비트이다. 따라서 f_n은 다음과 같다.

$$f_n : \{i \mid 0 \le i < 2^n\} \times \{j \mid 0 \le j < 8\} \times \{k \mid 0 \le k < 2n+2\} \to \{0,1\}$$

(그림 5)로부터 크기 2×8인 메쉬를 Q_4에 임베딩하는 함수 f_1을 얻을 수 있다. <표 1>은 함수 f_1을 나타내는데 0 열과 1 열만 표시하였고 2 열 이후는 생략하였다.

이제부터 함수 f_n, $n \ge 2$, 을 정의하겠는데 $k < 4$인 경우와 $k \ge 4$인 경우로 나누어서 다루겠다. $k < 4$인 경우는 노드 (i,j)가 대응하는 큐브노드 주소의 첫 네 비트에 해당하는데 <표 2>에 $f_n(i,j,k)$, $k < 4$, 이 정의되어 있다. 노드 (i,j)가 메쉬의 상반부에 속할 경우, $i < 2^{n-1}$, 첫 네 비트는 (그림 5)의 위쪽 행과 같다. 따라서 $f_n(i,j,k) = f_1(0,j,k)$이다. 노드 (i,j)가 메쉬의 하반부에 속할 경우, $i \ge 2^{n-1}$, (그림 5)의 아래쪽 행과 같다. 따라서 $f_n(i,j,k) = f_1(1,j,k)$이다.

<표 3>에 크기 4×8인 메쉬를 Q_6에 임베딩하는 함수 f_2가 나타나 있다. 첫 두 비트는 각 열의 위쪽에 따로 표시하였다. 예를 들어 0 열과 1 열의 노드들의 첫 두 비트는 모두 01이고 2 열과 3 열의 노드들의 첫 두비트는 모두 00이다. <표 3>에서 0 행과 1 행의 노드들의 첫 네 비트는 (그림 5)의 위쪽 행과 같고 2 행과 3 행의 노드들의 첫 네 비트는 (그림 5)의 아래쪽 행과 같음을 확인할 수 있다.

$k \ge 4$인 경우는 노드 (i,j)가 대응하는 큐브노드의 첫 네 비트를 제외한 나머지 ($2n-2$) 비트들에 해당하는데 <표 4>에 $f_n(i,j,k)$, $k \ge 4$, 이 정의되어 있다. <표 4>에서 보다시피 k가 홀수일 경우엔 $f_n(i,j,k)$는 1이다. 예를 들어 <표 3>의 f_2에서 $f_2(i,j,5)$가 모두 1임을 확인할 수 있다.

<표 4>에서 k가 짝수이고 j가 짝수인 경우의 $f_n(i,j,k)$, $k \ge 4$, 는 정수 $i \bmod 2^{n-1}$를 이진수로 표현했을 때 등장하는 비트들로부터 얻는다. 예를 들어 <표 5>는 $n=3$이고 k가 4과 6일 경우의 $f_3(i,0,k)$이 정수 $i \bmod 4$를 이진수로 표현했을 때 등장하는 비트들로부터 얻어짐을 보여준다. <표 5>에는 j가 0인 경우만 나타나 있으나 j가 다른 짝수이어도 <표 5>와 동일하다.

k가 짝수이고 j가 짝수인 경우의 f_n을 쉽게 표현하기 위해서 함수 b_n을 정의하겠다. 함수 $b_n(i,j)$는 정수 i를 ($n-1$) 비트의 이진수로 표현했을 때 j번째 등장하는 비트이다. 따라서 함수 b_n은 다음과 같다.

$$b_n : \{i | 0 \le i < 2^{n-1}\} \times \{j | 0 \le j < (n-1)\} \to \{0,1\}$$

예를 들어 3을 네 비트 이진수로 표현하면 0011이므로 $b_5(3,0)=0$, $b_5(3,1)=0$, $b_5(3,2)=1$, $b_5(3,3)=1$이다. 그러면 k가 짝수이고 j가 짝수인 경우에 $f_n(i,j,k)$, $k \ge 4$, 은 <표 4>와 같이 $b_n(i \bmod 2^{n-1}, (k-4)/2)$로 표현할 수 있다.

〈표 3〉 크기 4×8인 메쉬의 Q_6에 대한 임베딩 f_2

	$j=0$	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$	$j=6$	$j=7$
	01		00		10		11	
$i=0$	0101	0011	0001	0111	1101	1011	1001	1111
$i=1$	0111	0001	0011	0101	1111	1001	1011	1101
$i=2$	1101	1011	1001	1111	0101	0011	0001	0111
$i=3$	1111	1001	1011	1101	0111	0001	0011	0101

〈표 4〉 $f_n(i,j,k)$, $n \ge 2$, $4 \le k < 2n+2$

	k가 짝수	k가 홀수
j가 홀수	$b_n(i \bmod 2^{n-1}, (k-4)/2)$	1
j가 짝수	$b_n(i \bmod 2^{n-1}, (k-4)/2)'$	

〈표 5〉 $f_3(i,0,4)$과 $f_3(i,0,6)$

	$f_3(i,0,4)$	$f_3(i,0,6)$
$i=0$	0	0
$i=1$	0	1
$i=2$	1	0
$i=3$	1	1
$i=4$	0	0
$i=5$	0	1
$i=6$	1	0
$i=7$	1	1

〈표 6〉 크기 8×8인 메쉬의 Q_8에 대한 임베딩 f_3

	$j=0$	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$	$j=6$	$j=7$
	01		00		10		11	
$i=0$	010101	001111	000101	011111	110101	101111	100101	111111
$i=1$	010111	001101	000111	011101	110111	101101	100111	111101
$i=2$	011101	000111	001101	010111	111101	100111	101101	110111
$i=3$	011111	000101	001111	010101	111111	100101	101111	110101
$i=4$	110101	101111	100101	111111	010101	001111	000101	011111
$i=5$	110111	101101	100111	111101	010111	001101	000111	011101
$i=6$	111101	100111	101101	110111	011101	000111	001101	010111
$i=7$	111111	100101	101111	110101	011111	000101	001111	010101

<표 4>에서 k가 짝수이고 j가 홀수인 경우에 함수 $f_n(i,j,k)$, $k\ge 4$, 은 짝수 열의 해당 비트의 보수가 된다. 따라서 $f_n(i,j,k)=b_n(i \bmod 2^{n-1},(k-4)/2)'$이다. <표 4>의 정의로부터 알 수 있듯이 주어진 행에 대해서 모든 짝수 열의 마지막 ($2n-2$) 비트가 서로 같고 모든 홀수 열의 마지막 ($2n-2$) 비트가 서로 같다. 예를 들어 <표 3>의 함수 f_2에서 3 행의 짝수 열의 마지막 두 비트는 모두 11이고 홀수 열의 마지막 두 비트는 모두 01이다. 이제까지 함수 f_n을 (그림 5)와 <표 2>와 <표 4>를 통해 정의하였다.

<표 6>에는 크기 8×8인 메쉬를 Q_8에 임베딩하는 함수 f_3이 나타나 있다. 첫 두 비트는 각 열의 위쪽에 따로 표시하였다. <표 6>에서 위쪽 네 행의 노드들의 첫 네 비트는 (그림 5)의 위 행과 같고 아래쪽 네 행의 노드들의 첫 네 비트는 (그림 5)의 아래 행과 같다. 또한 $f_3(i,j,5)=f_3(i,j,7)=1$임도 확인할 수 있다. 짝수 열에 대한 $f_3(i,j,4)$과 $f_3(i,j,6)$은 정수 $i \bmod 4$를 이진수로 표현했을 때 등장하는 비트들로부터 얻어진다. 홀수 열에 대한 $f_3(i,j,4)$과 $f_3(i,j,6)$은 짝수 열의 해당 비트의 보수이다. 따라서 주어진 행에 대해서 짝수 열의 마지막 네 비트가 모두 같고 홀수 열의 마지막 네 비트가 모두 같음을 확인할 수 있다.

함수 f_n을 이용하여 크기 $2^n\times 8$인 메쉬를 교차큐브 Q_{2n+2}에 임베딩하면 다음과 같은 성질들을 만족한다. 첫째, 메쉬의 임의의 행 i, $0\le i<2^n$에 대해서 맨 왼쪽 노드 $(i,0)$와 맨 오른쪽 노드 $(i,7)$이 대응하는 큐브노드들은 서로 짝꿍이다. 둘째, 각 메쉬 노드는 서로 다른 큐브노드에 대응한다. 셋째, 인접한 메쉬 노드들은 인접한 큐브노드들에 대응한다. 이제부터 이 세가지 성질들을 증명하겠다.

성질 4.1 함수 f_n, $n\ge 1$, 을 이용하여 크기 $2^n\times 8$인 메쉬를 교차큐브 Q_{2n+2}에 임베딩하면 메쉬의 임의의 행 i, $0\le i<2^n$, 에 대해서 노드 $(i,0)$와 $(i,7)$이 대응하는 큐브노드들은 서로 짝꿍이다.

[증명] $n=1$일 경우에 본 성질이 성립함은 (그림 5)로부터 쉽게 알 수 있다. $n\ge 2$일 경우에 함수 f_n의 처음 네 비트는 (그림 5)의 f_1과 같으므로 노드 $(i,0)$와 $(i,7)$이 대응하는 큐브노드들의 첫 네 비트는 서로 짝꿍이다. 첫 네 비트를 제외한 나머지 비트들은 01혹은 11의 연속된 나열이다. 왜냐하면 $f_n(i,j,k)$, $k\ge 4$은 k가 홀수이면 항상 1이기 때문이다. 그런데 k가 짝수일 때 7 열에 대한 $f_n(i,7,k)$는 0 열의 해당 비트 $f_n(i,0,k)$의 보수이다. 따라서 처음 네 비트를 제외한 나머지 비트들도 서로 짝꿍이다. 따라서 노드 $(i,0)$와 $(i,7)$이 대응하는 큐브노드들은 서로 짝꿍이다. □

성질 4.2 함수 f_n, $n\ge 1$, 을 이용하여 크기 $2^n\times 8$인 메쉬를 교차큐브 Q_{2n+2}에 임베딩하면 각 메쉬 노드는 서로 다른 큐브노드에 대응한다.

[증명] $n=1$일 경우에 본 성질이 성립함은 (그림 5)로부터 쉽게 알 수 있다. $n\ge 2$일 경우에 서로 다른 두 노드 (i,j)와 (i',j')이 같은 큐브노드에 대응한다고 해보자. 그러면 모든 k에 대해서 $f_n(i,j,k)=f_n(i',j',k)$이다. 첫 네 비트, $k<4$, 가 같다는 것은 두 노드 (i,j)와 (i',j')이 같은 열에 속하면서, $j=j'$, 모두 상반부에 속하거나 모두 하반부에 속함을 의미한다. 그러나 같은 열의 상반부 (하반부) 에 속하는 서로 다른 두 노드는 같은 큐브노드에 대응할 수 없다. 왜냐하면 <표 4>로부터 알 수 있듯이 $i\ne i'$이면 짝수인 어떤 $k\ge 4$에 대해서 $f_n(i,j,k)$와 $f_n(i',j,k)$는 반드시 달라지기 때문이다. □

성질 4.3 함수 f_n, $n\ge 1$, 을 이용하여 크기 $2^n\times 8$인 메쉬를 교차큐브 Q_{2n+2}에 임베딩하면 인접한 메쉬 노드들은 인접한 큐브노드들에 대응한다.

[증명] $n=1$일 경우엔 (그림 5)에 의해서 본 성질이 성립함을 알 수 있다. 같은 열에서 인접한 두 노드 $(0,j)$와 $(1,j)$가 대응하는 큐브노드들은 2-차원 에지로 연결되어 있다. 같은 행에서 인접한 두 노드 (i,j)와 (i,j')가 대응하는 큐브노드들의 주소를 비교해 보면 ($j'=(j+1) \bmod 8$) j가 짝수일 경우엔 처음 세 비트는 같고 네 번째 비트만 다르다. 따라서 j가 짝수일 경우엔 3-차원 에지로 인접하다. j가 홀수일 경우엔 첫 두 비트 중 한 비트만 다르고 그 다음 두 비트는 서로 짝꿍이다. 따라서 j가 홀수일 경우엔 0-차원이나 1-차원 에지로 인접하다.

이제 $n\ge 2$일 경우를 증명하겠다. 먼저 같은 열에서 인접한 두 노드 (i,j)와 (i',j)를 고려해 보자 ($i'=(i+1) \bmod 2^n$). i와 i'를 n-비트 이진수로 표현했을 때 서로 다른 첫 비트의 위치를 $r_n(i,i')$이라고 하자. 예를 들어 3과 4을 네 비트의 이진수로 표현하면 0011과 0100이므로 서로 다른 제일 첫 비트의 위치는 1이다. 따라서 $r_4(3,4)=1$이다. 두 노드 (i,j)와 (i',j)가 대응하는 큐브노드들은 ($2\cdot r_n(i,i')+2$)-차원 에지로 인접하다.

이제 같은 행에서 인접한 두 노드 (i,j)와 (i,j')를 고려해 보자 ($j'=(j+1)\bmod 8$). 함수 f_n의 첫 네 비트는 f_1과 같다. 그러므로 두 노드 (i,j)와 (i,j')가 대응하는 큐브노드들의 마지막 $(2n-2)$ 비트가 서로 짝꿍이면 j가 짝수일 경우엔 3-차원 에지로 인접하고 j가 홀수일 경우엔 0-차원이나 1-차원 에지로 인접하다. 그런데 두 노드 (i,j)와 (i,j')가 대응하는 큐브노드들의 마지막 $(2n-2)$비트는 서로 짝꿍이다. 왜냐하면 $k\geq 4$가 홀수이면 $f_n(i,j,k)$은 항상 1이고 $k\geq 4$ 가 짝수이면 $f_n(i,j,k)\neq f_n(i,j',k)$이기 때문이다. □

성질 4.1과 성질 4.2와 성질 4.3으로부터 다음과 같은 소정리를 얻을 수 있다.

소정리 4.1 크기 $2^n\times 8$인 메쉬를 교차큐브 Q_{2n+2}에 조건 3.1을 만족하면서 임베딩할 수 있다 ($n\geq 1$).

소정리 4.1과 정리 3.1에 의해서 크기 $2^n\times 2^{q+3}$인 메쉬는 큐브 Q_{2n+q+2}에 임베딩될 수 있다 ($n\geq 1, q\geq 0$). 여기서 q를 $m-3$으로 치환하면 다음과 같은 정리 4.1를 얻을 수 있다.

정리 4.1 크기 $2^n\times 2^m$인 메쉬는 큐브 Q_{2n+m-1}에 임베딩된다 ($n\geq 1, m\geq 3$).

정리 4.1로부터 다음과 같은 따름정리들을 얻을 수 있다.

따름정리 4.1 크기 $2^n\times 2^m$인 메쉬는 연장율 1, 확장율 2^{n-1}로 교차큐브에 임베딩된다 ($n\geq 1, m\geq 3$).

따름정리 4.2 크기 2×2^m인 메쉬는 교차큐브에 연장율 1, 확장율 1로 임베딩된다($m\geq 3$).

따름정리 4.3 크기 4×2^m인 메쉬는 교차큐브에 연장율 1, 확장율 2로 임베딩된다($m\geq 3$).

따름정리 4.2와 따름정리 4.3은 Fan과 Jia에 의해서 이미 알려진 바 있다[10].

5. 결 론

본 논문에서는 크기 $2^n\times 2^m$인 메쉬를 연장율 1, 확장율 2^{n-1}로 교차큐브에 임베딩할 수 있음을 보인다 ($n\geq 1, m\geq 3$). 한편 크기 4×2^m인 메쉬의 복사본 두 개가 노드 중복 없이 교차큐브에 연장율 1, 확장율 1로 임베딩될 수 있음이 알려져 있다 [10, 5]. 또한 크기 8×2^m인 메쉬의 복사본 네 개가 노드 중복 없이 교차큐브에 연장율 1, 확장율 1로 임베딩될 수 있음도 알려져 있다 [5]. 그러나 양변의 길이가 모두 8 보다 큰 메쉬 다수 개가 교차큐브에 연장율 1, 확장율 1로 임베딩될 수 있는지는 알려진 바가 없다. 따라서 크기 $2^n\times 2^m$인 메쉬 2^{n-1}개를 교차큐브 Q_{2n+m-1}에 노드 중복없이 임베딩할 수 있는지를 밝히는 것은 향후 연구과제이다.

참 고 문 헌

[1] F. Berman and L. Snyder, “On mapping parallel algorithms into parallel architectures,” J. Parallel Distrib. Comput. Vol.4, pp.439-458, 1987.

[2] S.L. Bezrukov, J.D. Chavez, L.H. Harper M. Röttger, and U.-P. Schroeder, “The congestion of n-cube layout on a rectangular grid,” Discrete Math., Vol.213, No.1-3, pp. 13-19, Feb., 2000.

[3] C.-P. Chang, T.-Y. Sung, and L.-H. Hsu, “Edge congestion and topological properties of crossed cubes,” IEEE Trans. Parallel and Distributed Systems, Vol.11, No.1, pp.64-80, Jan., 2000.

[4] V. Chaudhary and J.K. Aggarwal, “Generalized mapping of parallel algorithms onto parallel architectures,” Proc. Int'l Conf. Parallel Processing, pp.137-141, Aug., 1990.

[5] Q. Dong, X. Yang, J. Zhao and Y.Y. Tang, “Embedding a family of disjoint 3D meshes into a crossed cube,” Information Sciences, Vol.178, Issue 11, pp.2396-2405, June, 2008.

[6] K. Efe, “A variation on the hypercube with lower diameter,” IEEE Trans. Computers, Vol.40, No.11, pp.1312-1316, Nov., 1991.

[7] K. Efe, “The crossed cube architecture for parallel computing,” IEEE Trans. Parallel and Distributed Systems, Vol.3, No.5, pp.513-524, Sept.-Oct., 1992.

[8] K. Efe, P.K. Blachwell, W. Slough, and T. Shiau, “Topological properties of the crossed cube architecture,” Parallel Computing, Vol.20, pp.1763-1775, 1994.

[9] J. Fan, “Diagnosability of crossed cubes under the comparison diagnosis model,” IEEE Trans. Parallel and Distributed Systems, Vol.13, No.10, pp.1099-1104, Oct., 2002.

[10] J. Fan, and X. Jia, “Embedding meshes into crossed cubes,” Information Sciences Vol.177, Issue 15, pp.3151-3160, 2007.

[11] J. Fan and X. Lin, “The t/k-diagnosability of the BC graphs,” IEEE Trans. Computers, Vol.53, No.2, pp.176-184, Feb., 2005.

[12] W.-T. Huang, Y.-C. Chuang, J.M. Tan, and L.-H. Hsu, “On the fault-tolerant hamiltonicity of faulty crossed cubes,” IEICE Trans. Fundamentals, Vol.E85-A, No.6, pp.1359-1370, Jun., 2002.

[13] P. Kulasinghe, “Connectivity of the crossed cube,” Information Processing Letters, Vol.61, pp.221-226, Jul., 1997.

[14] P. Kulasinghe and S. Bettayeb, “Embedding binary trees into crossed cubes,” IEEE Trans. Computers, Vol.44, No.7, pp.923-929, Jul., 1995.
[15] A. Matsubayashi, “VLSI layout of trees into grids of minimum width,” IEICE Trans. Fundamentals, Vol.E87-A, No.5, pp.1059-1069, May., 2004.
[16] B. Monien and H. Sudborough. “Embedding one interconnection network in another,” pp.257-282, Springer-Verlag/Wien, 1990. Computing Supplementum 7: Computational Graph Theory.
[17] A. Patel, A. Kusalik, and C. McCrosky, “Area-efficient VLSI layouts for binary hypercubes,” IEEE Trans. Computers, Vol.49, No.2, pp.160-169, Feb., 2000.
[18] A. Rosenberg. “Issues in the study of graph embeddings,” Lecture Notes in Computer Science, Springer-Verlag, New York, Vol.100, pp.150-176, 1981.
[19] M.-C. Yang, T.-K. Li, J.J.M. Tan, and L.-H. Hsu, “Fault-tolerant cycle-embedding of crossed cubes,” Information Processing Letters, Vol.88, No.4, pp.149-154, Nov., 2003.

김 숙 연

e-mail : sookyeon@hknu.ac.kr
1991년 연세대학교 전산과학과(학사)
1993년 한국과학기술원(KAIST) 전산학과(공학석사)
1998년 한국과학기술원(KAIST) 전산학과(공학박사)
1998년 3월~2004년 2월 한국전자통신연구원(ETRI) 선임연구원
2004년 3월~현 재 한경대학교 컴퓨터공학과 교수
관심분야 : 병렬처리, 그래프 임베딩, 상호연결망, 네트워크 등