韓國數學教育學會誌 시리즈 E
<數學教育 論文集>
제 22권 제 4호. 2008. 11. 471-487

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 22 No 4, Nov. 2008. 471-487

대학교의 해석학 강좌에서 학생들의 수학적 발명에 관한 연구

이 병 수 (경성대학교)

본 연구에서는 해석학 강좌를 운영하는 과정에서 얻어진 학생들의 수학적 발명의 사례를 제시하고 분석하여, 수학적 발명과 관련된 구체적인 교수-학습 과정, 얻어진 수학적 산출물들, 이들의 수학적 의의를 기술하였다.

1. 서 론

창의적 사고, 창의적 문제해결 능력, 수학적 발명 등은 수학교육의 전 과정에서 강조되어야 하는 핵심 개념들이라 할 수 있다. 특히 Polya(1981, p.ix)는 '...대학의 교육과정에 적절한 수준에서의 창의적 사고를 위한 여지를 마련해야 한다'고 주장하였다. 즉 이들 개념에 대해 초등 및 중등학교 수준의 수학교육 뿐만 아니라, 대학교 수준의 수학교육에서도 많은 교수학적 관심과 연구가 이루어져야 함을 알 수 있다.

Hadamard(1975)나 Freudenthal(1991)은 창의적인 수학적 활동 및 그 산출물을 '발견(discovery)'이라는 개념보다는 '발명(invention)'이라는 개념과 관련지어 서술하였다. 이러한 접근은 우리의 어휘사용과도 일치하는데, 남영신(2003, p.895)은 '발견은 이미 있으나 대부분의 사람들이 모르던 것을 찾아내어 사람들에게 알리는 것이고, 발명은 세상에 아직 없던 것을 처음으로 고안해 내는 것을 가르킨다'고 설명하였다. 즉 수학적 사고활동을 통해 얻어진 창의적인 산출물은 '수학적 발명'이라고 하는 것이 바람직할 것이다. Polya(1990, p.v)는 '수학자들의 창조적인 작업의 결과는 논증적인 추론, 즉 하나의 증명이다'라고 하면서, 창의적인 수학활동(수학적 발명)에서 증명의 역할을 강조하였다.

수학적 발명에 관련된 연구들을 분석하면, 수학적 발명의 중요성, 과정, 방법에 관련된 연구들과 수학적 발명의 구체적인 사례들에 관련된 연구들로 나눌 수 있다. 수학적 발명의 중요성, 과정에 관련된 대표적인 연구들로는 Hadamard(1975), Polya(1990), Lakatos(1976), Freudenthal(1991) 등을 들 수 있으며, 수학적 발명의 구체적인 방법과 사례들에 대한 연구로는 한인기 · 에르든예프(2006), 권영인 · 서보억(2006), 조열제 · 류수정 · 유익승 · 김태호(2006) 등을 들 수 있다. 특히 수학적 발명의 구체적인 방법과 사례들에 대한 연구들은 수학 교수-학습 과정에서 구체적으로 활용할 수 있는 수준으로

---

* 2008년 9월 투고, 2008년 11월 심사완료
* ZDM 분류 : E65
* MSC2000 분류 : 97C30
* 주제어 : 수학적 발명, Moore의 교수법, 집적점, 완비성 공리, 유도집합, 가산무한집합

수학적 발명의 방법과 가능성을 제공하므로, 수학 교수-학습의 개선을 위해 큰 의미를 가진다고 할 수 있다. 그런데 이들 연구에서 다루는 수학적 발명은 그 소재들이 주로 중등학교 교과내용에 한정되어 있어서, 대학교 수준의 수학교육에서 수학적 발명의 구체적인 방법 및 자료를 찾기가 어렵다.

본 연구에서는 해석학 강좌를 운영하는 과정에서 얻어진 학생들의 수학적 발명의 사례를 제시하고 분석하여, 수학적 발명과 관련된 구체적인 교수-학습 과정, 얻어진 수학적 산출물들, 이들의 수학적 의의를 기술할 것이다. 이를 통해, 대학교 수준의 수학교육에서 수학적 발명, 창의적 산출물에 관련된 수학교수학적 연구의 기초자료를 제공할 것으로 기대된다.

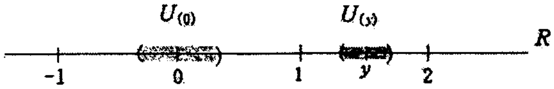
2. 정수집합의 유도집합(derived set)에 관련된 수학적 발명

정수집합 $\mathbb{Z}$의 유도집합이 공집합이라는 사실(the derived set for the set of integers $\mathbb{Z}$ is empty, that is, $\mathbb{Z}'=\varnothing$)은 실해석학 또는 초급위상수학에서 자주 취급하는 문제들 중의 하나로, 정수집합의 한 특징을 보여주는 흥미로운 문제라 할 수 있다. 정수집합 $\mathbb{Z}$의 유도집합은 집합 $\mathbb{Z}$의 집적점들의 집합을 말하는데, 집적점(accumulation point, cluster point, limit point)은 중등학교에서 함수의 연속성을 지도하기 위한 배경지식이 되는 개념이다. 예를 들어, 강미광 · 강신민 · 김성식 · 조열제(2008), Wade(1995), Bartle & Sherbert(2000) 등의 해석학 저술에서도 집적점 개념을 도입한 후에 극한 또는 연속의 개념을 전개하고 있다.

그런데 자연수집합의 유도집합은 공집합이다(Munkres, 1975, p.97; Lay, 2001, p.119; Bartle & Sherbert, 2000, p.98), 유리수집합의 유도집합은 실수전체의 집합이다(Munkres, 1975, p.97; 정동명 · 조승제, 2004, p.73; 강미광 · 강신민 · 김성식 · 조열제, 2008, p. 222) 또는 정수집합의 유도집합은 공집합이다(정동명 · 조승제, 2004, p.77; 강미광 · 강신민 · 김성식 · 조열제, 2008, p.452; 노영순, 2006, p.81) 라는 명제는 쉽게 찾아볼 수 있지만, 이 명제에 대한 상세한 증명을 기술한 책들은 찾기 어렵다. 본 연구에서는 정수집합의 유도집합은 공집합이라는 명제에 대한 증명이 기술된 책들을 찾으려 시도했지만 대부분 실패하였고, 노영순(2006, p.81)의 연구에 제시된 다음 증명 방법을 찾았다.

(1) 정수들의 집합 $\mathbb{Z}=\{\cdots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\cdots\}$는 극점이 없다. 왜냐하면 각 점 $x\in\mathbb{R}$에 대하여, $U_{(x)}\cap(\mathbb{Z}-\{x\})=\varnothing$을 만족하는 $U_{(x)}$가 존재하기 때문이다. 예를 들면, $0\in\mathbb{Z}$에 대하여 $U_{(0)}=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$이라 하면, $U_{(0)}\cap(\mathbb{Z}-\{0\})=\varnothing$가 되어 0은 $\mathbb{Z}$의 극점이 아닌 것이다.

(2) 또 정수가 아닌 실수 $y\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}$에 대해서도, $U_{(y)}\cap(\mathbb{Z}-\{y\})=U_{(y)}\cap\mathbb{Z}=\varnothing$를 만족하는 $U_{(y)}$가 존재하므로 $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$의 모든 점도 $\mathbb{Z}$의 극점이 될 수 없다. 따라서 $\mathbb{Z}'=\varnothing$이다.



<그림 1>

기술한 증명 방법은 직접점의 정의를 바탕으로 하며, (1)에서는 정수가 집적점이 안 되는 것을 보이고, (2)에서는 정수를 제외한 나머지 실수가 집적점이 안 되는 것을 보여 정수집합의 집적점은 공집합임을 보였다. 그런데 (1)에서는 임의의 정수 x에 대해 $U(x)$와 $Z-\{x\}$의 교집합이 공집합이 되는 $U(x)$를 구체적으로 명시하지 않았으며, (2)에서는 정수가 아닌 임의의 실수 y를 취하고 역시 $Z-\{y\}$와의 교집합이 공집합인 y의 근방을 구체적으로 제시하지 않았다.

본 연구에서는 대학교 2학년 학생들을 대상으로 개설된 해석학 강좌를 운영하는 과정에서 한 학생에 의해 발명된 정수집합의 유도집합에 대한 새로운 증명을 살펴보도록 하자.

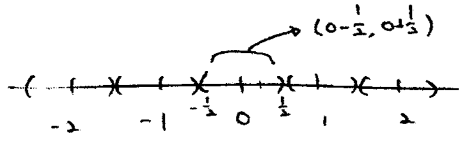
해석학 강좌에서는 정동명 · 조승제(2004)의 실해석학 개론과 Johnsonbaugh & Pfaffenberger(1981)의 Foundations of Mathematical Analysis를 주교재로 했으며, 매주 3시간씩 강의가 이루어졌다. 강의는 경직되지 않은 비교적 자유로운 분위기로 진행되었으며, 강의과정에서 학생들은 수줍어하지 않고 질문, 의사표현, 발표를 하였다.

직접점에 관련된 주제를 다룰 때에 본 강좌에서는 정동명 · 조승제(2004)의 실해석학 개론을 중심으로 강의를 진행했다. 이 책에는 정수집합의 유도집합에 관한 내용은 기술되어 있지 않았지만, 연구자는 학생들에게 정수집합의 유도집합을 언급하며, 학생들에게 정수집합의 유도집합에 대한 문제해결을 권유하였다. 다음은 해석학 강좌에서 학생과 나눈 대화의 일부이다(2007년 5월 14일 1-2교시).

> 연구자: 보통 책에는 정수집합의 유도집합에 대한 언급이 없지만 한번 다루어 볼 만한데... 혹시 누가 정수집합의 유도집합을 구할 수 있을까?
> 강○○: 완비성 공리를 사용해서 증명이 가능합니까?
> 연구자: 글쎄... 본 적이 없는데, 만일 그런 생각이 든다면, 일단 가능할 것이라는 확신을 가지고 시도를 한번 해보면 어떨까? 오늘 숙제로 낼 테니 한번 시도를 해보고 그 결과를 내일 꼭 알려 다오.
> 강○○: 예.

강○○ 학생은 이틀 뒤에 정수집합의 유도집합에 대한 다음과 같은 증명을 제시하였다.

$\mathbb{Z}' = \phi$



derived set : set of limit points.

$x \in A$.

$U(x)$: neighborhood of x.

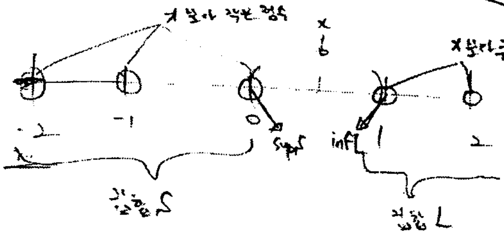
$U(x) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \phi \iff x$: accumulation point of A.

정수는 집적점이 아님. → $^{\forall}z \in \mathbb{Z}$

$\exists (z-\frac{1}{2}, z+\frac{1}{2})$: neighborhood of z

s.t $(z-\frac{1}{2}, z+\frac{1}{2}) \cap (\mathbb{Z} \setminus z) = \phi$

정수가 아닌 모든실수도 집적점 아님?



let $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

$S = \{z : x \geq z,\ z \in \mathbb{Z}\}$

$L = \{z : x \leq z,\ z \in \mathbb{Z}\}$

$\Rightarrow \exists\, \sup S, \inf L$

put $m = \sup S$, $M = \inf L$

take $U_{(x)} = (m, M) \Rightarrow U_{(x)} \cap (\mathbb{Z} \setminus \{x\}) = (m, M) \cap \mathbb{Z} = \phi$

정수집합의 도집합이 공집합임을 증명하는 문제에서

정수들은 정수집합의 집적점이 아님을 쉽게 증명할 수 있다

하지만 정수가 아닌 실수x에 대해서 집적점이 아님을 증명하기위해서는
정수집합에서 x를 뺀 차집합과 교집합이 공집합이 되는 x의 근방을 구하여야
한다. 처음까지 증명은 근방이 존재한다고 만 했을 뿐 구체적으로 언급 하지
않고 했다 정수가 아닌 실수는 정수와 정수 사이에 조밀하게 분포하고 있기 때문에
임의의 정수가 아닌 실수에 대하여 조건을 만족하는 근방을 잡기위해서는
공통된 성질을 끄어낼 필요가 있다. x보다 작고 가장 가까운 정수를 m으로 잡고
x보다 크고 가장 가까운 정수를 M으로 잡으면 주어진 조건을 만족하는
x의 근방 (m, M)가 만들어진다. m과 M의 존재성만 밝히면 되는데
상한과 하한 개념에서 착안하여 완비성 공리를 도입하였다.
x보다 작은 정수집합을 S라 하고, x보다 큰 정수집합을 L이라 하면
두 집합은 유계이며 공집합이 아니므로 완비성 공리에 의해 sup S와 inf L
이 존재하게 되고 sup S를 m으로 두고, inf L을 M으로 두면 증명이 완성된다.

강OO 학생의 증명 방법을 정리하여 체계적으로 기술하면 다음과 같다.

(1) Let x be an arbitrary point of integers and take $U_{(x)} = \left(x - \frac{1}{2},\ x + \frac{1}{2}\right)$. Then $U_{(x)}$ is a neighborhood of x, and

$$(\mathrm{Z}-\{x\})\cap U_{(x)}=(\mathrm{Z}-\{x\})\cap\left(x-\frac{1}{2},\ x+\frac{1}{2}\right)$$
$$=\varnothing.$$

Thus x is not a limit point of Z.

(2) Let x be an arbitrary point of $\mathbb{R}-\mathrm{Z}$. And take sets S, T as

$$S=\{z: x\geq z,\ z\in \mathrm{Z}\}$$
$$T=\{z: x\leq z,\ z\in \mathrm{Z}\}.$$

Then S is bounded above and not empty. Also, T is bounded below and not empty. Thus by the completeness axiom, $\sup S$ and $\inf T$ exist. Put $m=\sup S$ and $M=\inf T$ and take $U_{(x)}=(m,M)$. Then

$$(\mathrm{Z}-\{x\})\cap(m,M)=\mathrm{Z}\cap(m,M)=\varnothing,$$

which shows that x is not a limit point of Z. ■

강○○ 학생은 노영순(2006)의 증명방법을 참고하지 않고(위상수학 강좌는 수학과 3학년에서 다루며, 강○○에게 노영순의 증명방법을 참고했는지를 확인했으나 참고하지 않았다고 함), 노영순의 방법보다 훨씬 구체적이고 정교한 증명방법을 발명하였다.

강○○ 학생의 증명 방법을 분석하면, (1)에서는 직접점의 정의를 사용하여 증명하였다. 즉 임의의 x에 대해, x의 근방 $U_{(x)}=\left(x-\frac{1}{2},x+\frac{1}{2}\right)$를 구체적으로 보였다. (2)에서는 완비성공리를 이용했다. 이것은 해석학 강좌를 통해 완비성공리의 중요성과 응용성을 많이 접해본 것과 관련이 있을 것으로 생각된다. 집적점의 개념은 실해석학이나 위상수학에서 다루는 내용이지만, 함수의 연속성과 관련하여 다루게 되므로 사실상 위상수학에서 선점하고 있는 내용이다. 이런 측면에서 집합 S와 T를 설정하여 완비성공리를 활용하여 정수집합의 유도집합에 대해 증명한 것은 의미있는 수학적 발명이라 할 수 있을 것이다.

3. 무한집합 N×N에 관련된 수학적 발명

해석학에 관련된 다양한 책에 자연수 N의 Cartesian 곱인 무한집합 N×N도 가산무한집합이라는 사실에 대한 몇 몇 증명 방법들이 제시되어 있다. 무한집합 N×N의 성질에 관련된 주제를 다루면서 본 강좌에서는 Johnsonbaugh & Pfaffenberger(1981)의 Foundations of Mathematical Analysis를 중심으로 강의를 진행하였다. Johnsonbaugh & Pfaffenberger(1981, p. 30)에서는 무한집합 N×N이 가산무한집합이라는 것을 보이기 위해, 가산무한집합 A_i의 합집합 $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$이 가산무한집합임을 보인 다음, 따름정리로 N×N이 가산무한집합임을 보였다. 구체적인 증명 방법은 다음과 같다.

Theorem. $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ is countable.

Proof. Suppose $A_1,\ A_2,\ \cdots$ are countably infinite sets. We may list the elements of A_n as $a_1^{(n)},\ a_2^{(n)},\ a_3^{(n)},\ \cdots$.

We now find that we may list the elements of $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$:

$$
\begin{array}{ccccccc}
a_1^{(1)} & \rightarrow & a_2^{(1)} & & a_3^{(1)} & \rightarrow & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \\
a_1^{(2)} & & a_2^{(2)} & & a_3^{(2)} & & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & \\
a_1^{(3)} & & a_2^{(3)} & & a_3^{(3)} & & \cdots \\
 & \swarrow & & & & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}
$$

<그림 2>

The arrows indicate that
$1 \rightarrow a_1^{(1)},\ 2 \rightarrow a_2^{(1)},\ 3 \rightarrow a_1^{(2)},\ \cdots$

We have described a function from N onto $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$; so $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ is countable. This result is often summarized by saying that a countable union of countable sets is countable.

Lemma. The set $\mathrm{N} \times \mathrm{N}$ is countable.

Proof. The function $f : \mathrm{N} \times \mathrm{N} \rightarrow \mathrm{N}$ defined by

$$f(n,m) = 2^n 3^m$$

is one to one, since factorization into primes is unique. Thus $\mathrm{N} \times \mathrm{N}$ is equivalent to a subset of N. Since any subset of N is countable, $\mathrm{N} \times \mathrm{N}$ is countable.

기술한 증명 방법을 학생들에게 제시하자, 한 학생이 증명 방법에 대한 불만을 토로하였다. 다음은 강의시간에 이루어진 연구자와 학생의 대화 중 일부이다(2005년 4월 11일 1-2교시).

학생 : 순 엉터리다.
연구자 : 방금 뭐라고 했지? 무엇? 엉터리라고...
학생 : 교수님, 그와 같은 증명은 마치 끼워 맞추는 것 같습니다.
연구자 : 왜 그렇게 생각을 하지?
학생 : N에서 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$으로의 전단사함수를 직접 만들어 보여야지 화살표를 그려 놓고 전단사라고 우기는 것과 같잖아요?

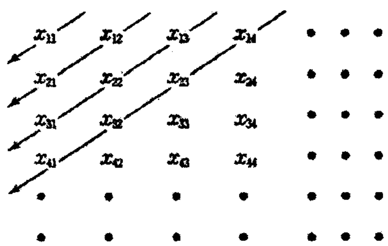
연구자 : 그럼 좋다. 내가 오랜 동안 이 분야를 강의하면서 약 10종류 정도의 국내외 도서를 가지고 강의를 했는데 구체적인 전단사함수를 본 적이 없다. 우리가 한번 구해보자.

실제로, 국내에서 출판되었거나 소개된 대부분의 책들에서 N에서 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$으로의 전단사함수는 실제로 제시되어 있지 않다. 예를 들어, 정동명 · 조승제(2004, pp.29-30)에서도 Johnsonbaugh & Pfaffenberger와 유사하게 서로소인 가산무한개의 가산무한 집합의 합집합이 가산무한집합임을 보인 후에, N X N이 가산무한집합임을 보였다. 서로소인 가산무한개의 가산무한 집합의 합집합이 가산무한집합임을 보이는 과정에서 N에서 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$으로의 전단사함수는 명료하게 제시되어 있지 않았으며, 직관적으로 다음과 같이 기술되어 있다.

각 A_n이 가산무한집합이므로,

$$A_n = \{x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots, x_{n_n}, \cdots\}$$

으로 나타낼 수 있다. 따라서 집합 $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$의 모든 원소들을 다음과 같이 나열할 수 있다.



<그림 3>

A의 원소들을 위의 표에서와 같이 화살표 방향으로 차례로 나열하면,

$$x_{11},\ x_{12},\ x_{21},\ x_{13},\ x_{22},\ x_{31},\ x_{14},\ x_{23},\ x_{32},\ x_{41},\ \cdots$$

가 된다. 이렇게 하여 나열한 원소들을 차례로 $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots$이라 하고 함수 $f: \mathrm{N} \to A$를 $f(n) = x_n$으로 정의하면 f는 전단사함수가 된다. 따라서 A는 가산무한집합이다.

N에서 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$으로의 전단사함수가 구체적으로 제시된 해석학 책으로는 Bartle & Sherbert(2000)의 Introduction to Real Analysis를 들 수 있다. 이 책에서도 본문에서는 Johnsonbaugh & Pfaffenberger(1981), 정동명 · 조승제(2004)와 같은 직관적인 증명방법이 제시되어 있다.

Bartle & Sherbert(2000, p.18)는 'As we have remarked, the construction of an explicit bijection between sets is often complicated'와 같이 언급하면서, 구체적으로 전단사함수를 구하는 것이 매우

복잡함을 인정하였다. Bartle & Sherbert(2000, p.344)에 제시된 전단사함수 $h: \mathrm{N} \times \mathrm{N} \to \mathrm{N}$을 구체적으로 살펴보자.

We will show that the function h defined as

$$h(m,n) = \psi(m+n-2) + m$$

for m, $n \in \mathrm{N}$ is a bijection, where $\psi(k) = \frac{1}{2}k(k+1)$.

(a) We first show that h is injective.

If $(m,n) \neq (m',n')$, then either (i) $m+n \neq m'+n'$, or (ii) $m+n = m'+n'$ and $m \neq m'$.

In case (i), we may suppose $m+n < m'+n'$. Then, using formula

$$\psi(k+1) = \psi(k) + (k+1) \text{ for } k \in \mathrm{N},$$

the fact that ψ is increasing, and $m' > 0$, we have

$$\begin{aligned} h(m,n) &= \psi(m+n-2) + m \leq \psi(m+n-2) + (m+n-1) \\ &= \psi(m+n-1) \leq \psi(m'+n'-2) \\ &< \psi(m'+n'-2) + m' = h(m',n'). \end{aligned}$$

In case (ii), if $m+n = m'+n'$ and $m \neq m'$, then

$$h(m,n) - m = \psi(m+n-2) = \psi(m'+n'-2) = h(m',n') - m',$$

whence $h(m,n) \neq h(m',n')$.

(b) Next we show that h is surjective.

Clearly $h(1,1) = 1$. If $p \in \mathrm{N}$ with $p \geq 2$, we will find a pair $(m_p,n_p) \in \mathrm{N} \times \mathrm{N}$ with $h(m_p,n_p) = p$. Since $p < \psi(p)$, then the set $E_p := \{k \in \mathrm{N} : p \leq \psi(k)\}$ is nonempty. Using the Well-Ordering Property, we let $k_p > 1$ be the least element in E_p. (This means that p lies in the k_pth diagonal.) Since $p \geq 2$, it follows from equation $\psi(k+1) = \psi(k) + (k+1)$ for $k \in \mathrm{N}$ that

$$\psi(k_p - 1) < p \leq \psi(k_p) = \psi(k_p - 1) + k_p.$$

Let $m_p := p - \psi(k_p - 1)$ so that $1 \leq m_p \leq k_p$, and let $n_p := k_p - m_p + 1$ so that $1 \leq n_p \leq k_p$ and $m_p + n_p - 1 = k_p$. Therefore,

$$h(m_p,n_p) = \psi(m_p + n_p - 2) + m_p = \psi(k_p - 1) + m_p = p.$$

Thus h is a bijection and $\mathrm{N} \times \mathrm{N}$ is denumerable.

본 해석학 강좌에서는 Johnsonbaugh & Pfaffenberger(1981)에 제시된 증명과정 일부의 직관적 도약에 대한 학생들의 문제제기로 부터 출발하여, N에서 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$으로의 전단사함수를 구성하기로 하였다. 이러한 수학탐구 활동의 수행을 위해, 연구자와 학생들은 다음과 같은 합의를 만들었다.

첫째, 누군가가 어떤 내용을 발표할 때에, 설령 관계가 없는 것 같은 내용을 이야기하더라도 반박하여 말문을 막거나 '아니잖아'라는 부정적인 판단을 내리지 말고, 끝까지 의견을 듣고 질문한다.

둘째, 전단사함수를 구하는데 기여를 했다고 판단이 되는 학생들에게는 A학점을 주겠다.

셋째, 이 문제가 해결될 때까지 다른 주제에 대한 설명을 하지 않겠다.

첫 번째 합의는 적극적이고 진지한 탐구활동의 수행을 위해 만들었으며, 이것은 Moore의 교수법에 관련된다고 할 수 있다. Moore는 학생의 수학적 탐구 및 발명 능력을 계발하는 교수법을 계발하였는데, 우정호(2000, p.196)에 의하면, 수업시간에 Moore는 '질문공세를 퍼붓는 것을 단호히 금하였는데... 그는 잘못된 추론이 제시되면 그것을 건설적으로 사용하였으며, 제시된 증명의 모든 오류를 들추어 낼 수 있는 비판적 감각이 개발되기를 학생들에게 기대하였다. 그러나 칠판에 기술한 학생의 증명에 결함이 나타날 때 모든 학생들은 그 학생이 증명을 수선하도록 끈기 있게 기다리도록 하였으며, 그것이 불가능할 때 그 학생은 자기 자리로 돌아와 앉았다. 그 다음 학생에게 시도해 보도록 요구하거나... 다음 시간까지 그 정리를 보류하고...'와 같은 방법을 사용하였다. 본 연구에서는 살펴본 Moore의 교수법과 유사한 방법으로 학생들의 자기주도적인 탐구활동을 격려하고, 수학적 발명 중심의 강의실 분위기를 조성하기 위해 노력하였다.

두 번째 합의는 전단사함수의 발명에 대한 학생들의 적극적인 동기유발을 위해 만들어졌다. 그리고 세 번째 합의는 전단사함수의 발명이 쉽지 않은 수학적 탐구활동이므로, 충분한 시간적 여유를 가지고 창의적으로 탐구할 수 있는 기회를 갖기 위해 만들어졌다.

실제로 학생들이 전단사함수를 추측하고 구체적으로 표현하고 증명하는 데는 약 6주 정도의 시간이 걸렸으며, 해석학 강좌의 다른 주제들에 대한 강의는 보충수업을 통해 이루어졌다. 결국 오랜 수학적 추측과 확인을 통해, 다양한 전단사함수를 찾는데 성공하였다. 학생들의 수학적 탐구를 문제해결을 위해 사용한 다음과 같은 순서쌍들의 배열을 중심으로 분류하여 살펴보자.

$$
\begin{array}{cccccc}
(1,1) & & (2,1) & & (3,1) & \\
\downarrow & \nearrow & & \nearrow & & \\
(1,2) & & (2,2) & & (3,2) & \\
 & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow \\
(1,3) & & (2,3) & & (3,3) & \\
 & \nearrow & & \nearrow & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{array}
$$

<그림 4>

$$
\begin{array}{ccccccccc}
(1,1) & & (2,1) & & (3,1) & & (4,1) & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
(1,2) & \leftarrow & (2,2) & & (3,2) & & (4,2) & \cdots \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & \\
(1,3) & \leftarrow & (2,3) & \leftarrow & (3,3) & & (4,3) & \cdots \\
 & & & & & & \downarrow & \\
(1,4) & \leftarrow & (2,4) & \leftarrow & (3,4) & \leftarrow & (4,4) & \cdots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{array}
$$

<그림 5>

$$\begin{array}{ccccccc}
(1,1) & \rightarrow & (2,1) & & (3,1) & \rightarrow & \cdots \\
& \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \\
(1,2) & & (2,2) & & (3,2) & & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & \\
(1,3) & & (2,3) & & (3,3) & & \cdots \\
& \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

<그림 6>

$$\begin{array}{ccccccc}
(1,1) & \rightarrow & (2,1) & & (3,1) & & \cdots \\
& \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\
(1,2) & & (2,2) & & (3,2) & & \cdots \\
& \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\
(1,3) & & (2,3) & & (3,3) & & \cdots \\
& \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

<그림 7>

$$\begin{array}{ccccccc}
(1,1) & & (2,1) & \rightarrow & (3,1) & & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & \\
(1,2) & & (2,2) & & (3,2) & & \cdots \\
& \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \\
(1,3) & & (2,3) & & (3,3) & & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

<그림 8>

$$\begin{array}{ccccccc}
(1,1) & & (2,1) & & (3,1) & & \cdots \\
& & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
(1,2) & \rightarrow & (2,2) & & (3,2) & & \cdots \\
& & & & \uparrow & & \uparrow \\
(1,3) & \rightarrow & (2,3) & \rightarrow & (3,3) & & \cdots \\
& & & & & & \uparrow \\
\vdots & \rightarrow & \vdots & \rightarrow & \vdots & \rightarrow & \cdots
\end{array}$$

<그림 9>

$$\begin{array}{ccccccc}
(1,1) & \rightarrow & (2,1) & & (3,1) & \rightarrow & \cdots \\
& & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow \\
(1,2) & \leftarrow & (2,2) & & (3,2) & & \cdots \\
\downarrow & & & & \uparrow & & \downarrow \\
(1,3) & \rightarrow & (2,3) & \rightarrow & (3,3) & & \cdots \\
& & & & & & \downarrow \\
\vdots & \leftarrow & \vdots & \leftarrow & \vdots & \leftarrow & \cdots
\end{array}$$

<그림 10>

$$\begin{array}{ccccccc}
(1,1) & & (2,1) & \rightarrow & (3,1) & & \cdots \\
\downarrow & & \uparrow & & \downarrow & & \uparrow \\
(1,2) & \rightarrow & (2,2) & & (3,2) & & \cdots \\
& & & & \downarrow & & \uparrow \\
(1,3) & \leftarrow & (2,3) & \leftarrow & (3,3) & & \cdots \\
\downarrow & & & & & & \uparrow \\
\vdots & \rightarrow & \vdots & \rightarrow & \vdots & \rightarrow & \cdots
\end{array}$$

<그림 11>

(1) <그림 4>에 관련된 전단사함수의 구성

<그림 4>와 같은 순서쌍의 배열의 특징은 첫째, $\mathrm{N}\times\mathrm{N}=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$이고, $A_i\cap A_j=\varnothing\ (i\neq j)$이며, 둘째 $\circ(A_n)=n$이고, 셋째 $\circ\left(\bigcup_{i=1}^{n-1}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n-1}i=\frac{n(n-1)}{2}=\frac{(p+q-1)(p+q-2)}{2}$라는 것이다. <그림 4>를 이용하여, 전단사함수 $f:\mathrm{N}\times\mathrm{N}\rightarrow\mathrm{N}$을 만든 학생들의 수학적 활동을 살펴보자.

먼저 한 학생이 일반항 집합 A_n을 구하기 위해, $A_1=\{(1,1)\}$, $A_2=\{(1,2),(2,1)\}$,

$A_3=\{(1,3),(2,2),(3,1)\}$, ⋯ 등을 구체적으로 구하였다. 그 다음에 자연수 n이 홀수일 때, 일반항 집합 $A_n=\left\{(1,n),(2,n-1),\cdots,\left(\frac{n+1}{2},\frac{n+1}{2}\right),\cdots,(n-1,2),(n,1)\right\}$, 자연수 n이 짝수일 때 일반항 집합 $A_n=\left\{(1,n),(2,n-1),\cdots,\left(\frac{n}{2},\frac{n}{2}+1\right),\left(\frac{n}{2}+1,\frac{n}{2}\right),\cdots,(n-1,2),(n,1)\right\}$을 구했다. 또 다른 학생은 집합족 $\{A_n : n\in\mathrm{N}\}$가 서로소임을 확인하고, $\mathrm{N}\times\mathrm{N}=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$임을 확인했다.

그런 다음, 학생들은 정의역 $\mathrm{N}\times\mathrm{N}$, 변역 N인 함수 $f:\mathrm{N}\times\mathrm{N}\to\mathrm{N}$을 정의하려고 시도했다. 결국 한 학생이 함수 $f(p,q)=\frac{(p+q-1)(p+q-2)}{2}+p$를 정의하여 함수 f가 잘 정의된(well-defined) 것을 확인하고, 또한 전사함수임을 체크했으나, 함수 $f(p,q)$가 단사임을 보이는 것이 쉽지 않았다.

결국 학생들 사이에서 정의역과 변역을 맞바꾸어 단사함수를 보이는 것이 쉬울 것 같다는 의견이 나오면서 바꾸어 시도해보자는 주장이 우세했다. 따라서 정의역과 변역을 바꾸어 함수 $f:\mathrm{N}\to\mathrm{N}\times\mathrm{N}$을 $f(k)=(p,q)$, $k=\frac{(p+q-1)(p+q-2)}{2}+p$로 정의하여, f가 잘 정의되었음을 보이고, 또한 전단사함수임을 보이는데 성공하였다.

이런 결과를 바탕으로 학생들은 앞에서 $f(p,q)=\frac{(p+q-1)(p+q-2)}{2}+p$로 정의한 함수 $f:\mathrm{N}\times\mathrm{N}\to\mathrm{N}$가 잘 정의되었으며, 전단사함수가 됨을 보이는 것을 재시도하여 결국에는 함수 $f:\mathrm{N}\times\mathrm{N}\to\mathrm{N}$가 단사가 됨을 보였다.

이제 김ㅇㅇ 학생이 제시한 함수 $f(k)=(p,q)$, $k=\frac{(p+q-1)(p+q-2)}{2}+p$가 전단사함수임을 증명한 다음의 증명방법을 살펴보자.

In fact, for an arbitrary natural number k, let n be the positive integer such that

$$\frac{-1+\sqrt{1+8k}}{2}\le n<\frac{1+\sqrt{1+8k}}{2}$$

i.e., $\frac{n(n-1)}{2}<k\le\frac{n(n+1)}{2}$. Then n is uniquely determined.

Assume that $\frac{m(m-1)}{2}<k\le\frac{m(m+1)}{2}$ and $\frac{n(n-1)}{2}<k\le\frac{n(n+1)}{2}$ for $m\ne n$.

In case $m>n$,

$$\frac{n(n-1)}{2}<k\le\frac{n(n+1)}{2}\le\frac{m(m-1)}{2}<k\le\frac{m(m+1)}{2},$$

which is a contradiction.

If we put $p=k-\frac{n(n-1)}{2}$ and $q=n+1-p$, then, $f(k)=(p,q)$. For each $k\in\mathrm{N}$, since p and

q are uniquely determined, f is well-defined.

Next, we show that f is injective. If $(p,q)=(r,s)$, then $p=r$ and $q=s$, and thus

$$\frac{(p+q-1)(p+q-2)}{2}+p=\frac{(r+s-1)(r+s-2)}{2}+r.$$

To show that f is surjective, let (p,q) be an arbitrary element of $\mathrm{N}\times\mathrm{N}$.

Since $(p+q-1)(p+q-2)$ is an even number, $\frac{(p+q-1)(p+q-2)}{2}+p$ is a natural number and hence $f\left(\frac{(p+q-1)(p+q-2)}{2}+p\right)=(p,q)$. Thus $\mathrm{N}\times\mathrm{N}$ is equipotent with N.

김○○ 학생의 증명은, 첫째 함수 f의 정의역을 N, 공변역을 $\mathrm{N}\times\mathrm{N}$으로 두고 N의 임의 원소 k의 상 $f(k)$가 단 하나의 쌍 (p,q)가 되도록 하기 위해 먼저 부등식 $\frac{-1+\sqrt{1+8k}}{2}\le n<\frac{1+\sqrt{1+8k}}{2}$을 만족하는 자연수 n을 추적했다(<그림 12>).

~~for k, let~~

for $k\in N$, let n be s.t.

$\frac{-1+\sqrt{1+8k}}{2} \le n < \frac{1+\sqrt{1+8k}}{2}$

(즉, $\frac{n(n-1)}{2} < k \le \frac{n(n+1)}{2}$)

$p = k-\frac{n(n-1)}{2}$, $q = n+1-p$

$k=1$, $\frac{-1+\sqrt{9}}{2} \le n < \frac{1+\sqrt{9}}{2} = 2$

1

$n=1$

$\therefore p = 1-\frac{1(1-1)}{2} = 1$, $q = 1+1-1 = 1$

$k=2$, $\frac{-1+\sqrt{17}}{2} \le n < \frac{1+\sqrt{17}}{2} \fallingdotseq 2.\square$

$1.\square$

$n=2$

$\therefore p = 2-\frac{2(2-1)}{2} = 1$, $q = 2+1-1 = 2$

$k=3$, $\frac{-1+\sqrt{25}}{2} \le n < \frac{1+\sqrt{25}}{2} = 3$

2

$n=2$ $\quad \therefore p = 3-\frac{2(2-1)}{2} = 2$

$q = 2+1-2 = 1$

$k=4$, $\frac{-1+\sqrt{33}}{2} \le n < \frac{1+\sqrt{33}}{2} \fallingdotseq 3.\square$

$2.\alpha$

$n=3$

$\therefore p = k-\frac{n(n-1)}{2} = 4-\frac{3(3-1)}{2} = 4-3 = 1$

$q = n+1-p = 3+1-1 = 3$

$k=5$, $\frac{-1+\sqrt{41}}{2} \le n < \frac{1+\sqrt{41}}{2} = 3.\alpha$

$2.\beta$ $\quad \therefore n=3$

$p = k-\frac{n(n-1)}{2} = 5-\frac{3(3-1)}{2} = 5-3 = 2$

$q = n+1-p = 3+1-2 = 2$

$k=6$, $\frac{-1+\sqrt{49}}{2} \le n < \frac{1+\sqrt{49}}{2} = 4$

3 $\quad n=3$

$\therefore p = 6-\frac{3(3-1)}{2} = 3$ $\quad q = 3+1-3 = 1$

<그림 12>

둘째, $p=k-\dfrac{n(n-1)}{2}$, $q=n+1-p$로 두어, $k=1$일 때, $n=1$이 되어 $p=1$, $q=1$임을 확인했고, $k=2$일 때, $n=2$이 되어 $p=1$, $q=2$임을 확인했고, $k=3$일 때, $n=2$이 되어 $p=2$, $q=1$임을 확인했고, $k=4$일 때, $n=3$이 되어 $p=1$, $q=3$임을 확인했고, $k=5$일 때, $n=3$이 되어 $p=2$, $q=2$임을 확인했고, $k=6$일 때, $n=3$이 되어 $p=3$, $q=1$임을 확인했다.

결국, 이와 같은 방법으로

$$\begin{array}{ll} 1 \rightarrow (1,1) & 2 \rightarrow (1,2) \\ 3 \rightarrow (2,1) & 4 \rightarrow (1,3) \\ 5 \rightarrow (2,2) & 6 \rightarrow (3,1) \\ \cdots & \cdots \end{array}$$

와 같이 일대일대응이 됨을 우선 추적했다.

그런 다음, f가 잘 정의되었다는 것, f가 단사함수라는 것, f가 전사함수라는 것을 보였다.

이제, 함수 $f: \mathrm{N}\times\mathrm{N}\rightarrow\mathrm{N}$을 $f(p,q)=\dfrac{(p+q-1)(p+q-2)}{2}+p$로 정의하면, 함수 $f(p,q)$가 잘 정의되었으며, 전단사함수가 된다는 것에 대한 최○○ 학생의 다음의 탐구 결과를 살펴보자.

함수 $f(p,q)$가 잘 정의되었다는 것은 자명하다. 이제 $f(p,q)$가 단사함수임을 증명하자. 만일 $(p,q)\neq(r,s)\in\mathrm{N}\times\mathrm{N}$이면, (i) $p<r$이고 $q<s$인 경우; (ii) $p<r$이고 $q=s$인 경우; (iii) $p<r$이고 $q>s$인 경우에 대해, $f(p,q)\neq f(r,s)$가 됨을 알 수 있다. 따라서 $f(p,q)$는 단사함수이다.

이제 $f(p,q)$가 전사함수임을 보이자. $\dfrac{(p+q-1)(p+q-2)}{2}+p=k$라 하면,

$$\frac{-1+\sqrt{1+8k}}{2}\leq n\leq\frac{1+\sqrt{1+8k}}{2}$$

$$p=k-\frac{n(n-1)}{2},\ q=n+1-p$$

일 때, $f(p,q)=k$를 만족하는 자연수의 쌍 (p,q)가 존재한다. 따라서 $f(p,q)$는 전사함수이다.

위의 증명은 정의역을 $\mathrm{N}\times\mathrm{N}$, 변역을 N으로 하는 $f(p,q)=\dfrac{(p+q-1)(p+q-2)}{2}+p$로 정의된 함수가 단사가 됨을 쉽게 보였다. 처음 여러 학생들이 이 함수가 단사가 됨을 보이는 것이 힘들어 포기했으나, 앞에서 김○○ 학생이 $f: \mathrm{N}\rightarrow\mathrm{N}\times\mathrm{N}$가 전단사함수가 됨을 보인 후, 이에 고무된 최○○ 학생이 함수 $f: \mathrm{N}\times\mathrm{N}\rightarrow\mathrm{N}$에 대해, 임의의 서로 다른 원소 (p,q)와 (r,s)을 (i) $p<r$, $q<s$인 경우, (ii) $p<r$, $q=s$인 경우, (iii) $p<r$, $q>s$인 경우로 나누어 시도하여 비교적 무난하게 $f(p,q)\neq f(r,s)$임을 보였다.

(2) <그림 5>에 관련된 전단사함수의 구성

<그림 5>에 관련된 증명은 한 학생이 집합 A_n을 함수의 상(image of function)으로 생각할 수 있는가에 대한 질문을 하여, "집합도 상이 될 수 있다. 집합이 상(像)인 함수를 집합가함수(集合價函數, set-valued function)라고 한다"고 대답하면서, 증명의 탐구가 시작되었다. 결국 함수 F: $\mathrm{N} \to \mathrm{N} \times \mathrm{N}$에서 $\mathrm{N} = \bigcup_{n=1}^{\infty} n$, $\mathrm{N} \times \mathrm{N} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$임을 생각한 후에, $F(n) = A_n$을 정의하여 F가 전단사함수임을 증명하였다.

구체적으로 살펴보면, 임의의 $n \in \mathrm{N}$에 대해,

$$A_n = \{(n,1),(n,2),\cdots,(n,n-1),(n,n),(n-1,n),\cdots,(2,n),(1,n)\}$$

이므로 이 경우에 $\{A_n : n \in \mathrm{N}\}$은 $\mathrm{N} \times \mathrm{N}$의 한 분할이 됨을 보였다. 즉 $\mathrm{N} \times \mathrm{N} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$이고 $A_i \cap A_j = \varnothing \ (i \neq j)$이며, $\circ(A_n) = 2n-1$이며, $\circ\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) = n^2$이다.

집합족 $\{A_n : n \in \mathrm{N}\}$의 각 집합을 하나의 원소로 간주하여 함수

$$\begin{array}{cccc} F: & \mathrm{N} & \to & \mathrm{N} \times \mathrm{N} \\ & \| & & \| \\ & \bigcup_{n=1}^{\infty} n & \to & \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \end{array}$$

을 $F(n) = A_n$으로 정의하면 F는 잘 정의된 집합가함수로 전단사함수가 된다.

한편 학생들은 <그림 4>, <그림 6-11>에 대해서도 위에서 살펴본 것과 같은 방법으로 유사한 증명을 얻을 수 있음을 확인하였다.

<그림 6>에 관련하여서는 자연수 n이 홀수이면,

$$A_n = \left\{(1,n),(2,n-1),\cdots,\left(\frac{n+1}{2},\frac{n+1}{2}\right),\cdots,(n-1,2),(n,1)\right\}$$

자연수 n이 짝수이면,

$$A_n = \left\{(n,1),(n-1,2),\cdots,\left(\frac{n}{2}+1,\frac{n}{2}\right),\left(\frac{n}{2},\frac{n}{2}+1\right),\cdots,(2,n-1),(1,n)\right\}$$

와 같이 정의하면, <그림 5>에서와 같이 함수를 정의하여 유사한 증명을 얻을 수 있다.

한편, <그림 7-11>에 대해 다루는 경우에, 자연수 n이 홀수인 경우와 짝수인 경우의 A_n을 정의하면, 다음 <표 1>과 같다. 이때 각각의 A_n에 대해 <그림 5>에서와 같은 방법으로 전단사함수를 얻을 수 있다.

<표 1>

그림 번호	n	A_n
<그림 7>	n이 홀수	$A_n=\left\{(n,1),(n-1,2),\cdots,\left(\frac{n+1}{2},\frac{n+1}{2}\right),\cdots,(2,n-1),(1,n)\right\}$
	n이 짝수	$A_n=\left\{(n,1),(n-1,2),\cdots,\left(\frac{n}{2}+1,\frac{n}{2}\right),\left(\frac{n}{2},\frac{n}{2}+1\right),\cdots,(2,n-1),(1,n)\right\}$
<그림 8>	n이 홀수	$A_n=\left\{(n,1),(n-1,2),\cdots,\left(\frac{n+1}{2},\frac{n+1}{2}\right),\cdots,(2,n-1),(1,n)\right\}$
	n이 짝수	$A_n=\left\{(1,n),(2,n-1),\cdots,\left(\frac{n}{2},\frac{n}{2}+1\right),\left(\frac{n}{2}+1,\frac{n}{2}\right),\cdots,(n-1,2),(n,1)\right\}$
<그림 9>	임의의 n	$A_n=\{(1,n),(2,n),\cdots,(n-1,n),(n,n),(n,n-1),\cdots,(n,2),(n,1)\}$
<그림 10>	n이 홀수	$A_n=\{(1,n),(2,n),\cdots,(n-1,n),(n,n),(n,n-1),\cdots,(n,2),(n,1)\}$
	n이 짝수	$A_n=\{(n,1),(n,2),\cdots,(n,n-1),(n,n),(n-1,n),\cdots,(2,n),(1,n)\}$
<그림 11>	n이 홀수	$A_n=\{(n,1),(n,2),\cdots,(n,n-1),(n,n),(n-1,n),\cdots,(2,n),(1,n)\}$
	n이 짝수	$A_n=\{(1,n),(2,n),\cdots,(n-1,n),(n,n),(n,n-1),\cdots,(n,2),(n,1)\}$

4. 결 론

본 연구에서는 해석학 강좌를 운영하는 과정에서 얻어진 학생들의 수학적 발명의 사례를 제시하고 분석하여, 수학적 발명과 관련된 구체적인 교수-학습 과정, 얻어진 수학적 산출물들, 이들의 수학적 의의를 기술하였다.

수학적 발명의 첫 번째 사례는 정수집합의 유도집합이 공집합이라는 문제와 관련된다. 해석학의 강의 과정에서 한 학생이 이 문제를 완비성공리를 사용해서 증명할 수 있는가에 대한 질문을 하였고, 이로부터 수학적 탐구의 과정이 시작되었다. 결국 학생은 자신의 힘으로 수학적 발명에 도달하였고, 완비성공리를 이용하여 얻은 증명방법은 이 문제에 대한 새로운 탐구방향을 개척한 의미로운 발명이라 할 수 있으며, 위상수학 도서에 제시된 기존의 증명방법을 개선할 수 있는 가치로운 증명방법이라 할 수 있다.

수학적 발명의 두 번째 사례는 무한집합 N×N이 가산무한집합이라는 정리와 관련된다. 학생들은 교재에 제시된 이 정리의 증명방법이 지나치게 직관적이라는 것에 문제를 제기하였고, 오랜 탐구의 과정을 거쳐 다양한 증명방법을 발명하였다. 특히 함수 $f: \mathrm{N}\times\mathrm{N}\rightarrow\mathrm{N}$을 다양하게 정의하고, 이 함수가 잘 정의되었음, 전사함수임, 단사함수임을 다양하게 증명하였다. 이를 통해 무한집합 N×N이 가산무한집합이라는 것에 대한 다양한 새로운 증명방법을 얻을 수 있었다.

본 연구를 통해 얻어진 결과는 대학교 수준의 수학교육에서 수학적 발명, 창의적 산출물에 관련된 수학교수학적 연구의 기초자료를 제공할 것으로 기대된다.

참 고 문 헌

강미광 · 강신민 · 김성식 · 조열제 (2008). 기초해석학, 서울: 교우사.

권영인 · 서보억 (2006). 종이학을 접고 펼친 흔적을 통한 수학 탐구활동, 한국수학교육학회 시리즈 E <수학교육 논문집> **20(3)**, pp.469-482.

남영신 (2003). 국어대사전, 서울: 성안당.

노영순 (2006). 위상수학 기본, 서울: 교우사.

우정호 (2000). 수학 학습-지도 원리와 방법, 서울: 서울대출판부.

정동명 · 조승제 (2004). 실해석학 개론, 서울: 경문사.

조열제 · 류수정 · 유익승 · 김태호 (2006). 라카토스의 보조정리 합체법을 적용한 교수-학습 자료 개발, 한국수학교육학회 시리즈 E <수학교육 논문집> **20(3)**, pp.361-372.

한인기 · 에르든예프 (2006). 유추를 통한 수학탐구, 서울: 승산.

Bartle, R. G. & Sherbert D. R. (2000). *Introduction to Real Analysis.* 3rd Ed., New York: John Wiley & Sons Inc..

Freudenthal, H. (1991). Revisiting Mathematics Education: The China Lectures. Dortrecht: Kluwer.

Hadamard J. (1975). *Essai sur la Psychologie de L'invention dans le Domaine Mathematique.* 정계섭 역(1990). 수학 분야에서의 발명의 심리학, 서울: (주)범양사출판부.

Johnsonbaugh, R. & Pfaffenberger, W. E. (1981). *Foundations of Mathematical Analysis*, New York: Marcel Dekker, Inc..

Lakatos, I. (1976). *Proofs and Refutations*, Cambridge: Cambridge University Press.

Lay, S. L. (2001). *Analysis with an Introduction to Proof*, New Jersey: Prentice-Hall, Inc..

Munkres, J. R. (1975). *Topology*, A First Course, New Jersey: Prentice-Hall, Inc..

Polya G. (1990). *Mathematics and Plausible Reasoning.* 이만근 외 4인 역(2003). 수학과 개연추론, 서울: 교우사.

Polya G. (1981). *Mathematical Discovery.* 우정호 외 6인 역(2005). 수학적 발견(I), 서울: 교우사.

Wade, W. R. (1995). *An Introduction to Analysis*, New Jersey: Prentice-Hall, Inc..

*** 본 연구를 위해, 바쁜 시간을 내어 정성을 다해 지도해 주신 경상대학교 수학교육과의 한인기 교수님에게 감사의 말씀을 드립니다.

A research on Mathematical Invention via Real Analysis Course in University

Byung-Soo Lee
Department of Mathematics, Kyungsung University, Busan 608-736, Korea
E-mail : bslee@ks.ac.kr

Inventive mathematical thinking, original mathematical problem solving ability, mathematical invention and so on are core concepts, which must be emphasized in all branches of mathematical education. In particular, Polya(1981) insisted that inventive thinking must be emphasized in a suitable level of university mathematical courses.

In this paper, the author considered two cases of inventive problem solving ability shown by his many students via real analysis courses.

The first case is about the proof of the problem "what is the derived set of the integers Z?" Nearly all books on mathematical analysis sent the question without the proof but some books said that the answer is "empty". Only one book written by Noh, Y. S.(2006) showed the proof by using the definition of accumulation points.

But the proof process has some mistakes. But our student Kang, D. S. showed the perfect proof by using The Completeness Axiom, which is very useful in mathematical analysis.

The second case is to show the infinite countability of NxN, which is shown by informal proof in many mathematical analysis books with formal proofs. Some students who argued the informal proof as an unreasonable proof were asked to join with us in finding the one-to-one correspondences between NxN and N. Many students worked hard and find two singled-valued mappings and one set-valued mapping covering eight diagrams in the paper.

The problems are not easy and the proofs are a little complicated. All the proofs shown in this paper are original and right, so the proofs are deserving of inventive mathematical thoughts, original mathematical problem solving abilities and mathematical inventions.

From the inventive proofs of his students, the author confirmed that any students can develope their mathematical abilities by their professors' encouragements.

* ZDM classification : E65
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C30
* Key Words : Mathematical invention, Moore method, completeness axiom, accumulation point, derived set, countable infinite set.