韓國數學教育學會誌 시리즈 E
<數學教育 論文集>
제 22권 제 4호. 2008. 11. 489-503

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 22 No 4, Nov. 2008. 489-503

대학수학에서 바람직한 선다형문제 만들기

김 병 무 (충주대학교)

대학수학에서 배우는 여러 가지 수학적 개념을 이해하는데 좋은 문제를 통해 도움을 주고 평가에서 공정성을 확보하기 위해 문제풀이에서 개념을 이용하는 능력과 개념에 대한 이해를 조사하는 문제의 예를 미분적분학 문제로 세 가지 유형을 다루었다.
잘못 만들어진 단답형문제와 선다형문제의 예를 제시하고 또 증명문제의 경우를 포함하여 선다형문제를 잘 만드는 방법에 대해 알아보고 최선의 문제가 되도록 노력을 하고 개념의 이해를 도와주며 최선의 문제가 될 수 있도록 더 많은 연구가 이루어지고 학생들에 대한 조사를 시도하여 그 결과를 분석하고 더 정선된 문제를 얻도록 노력을 한다.

I. 서 론

대학수학에서 배우는 여러 가지 수학적 개념을 이해하는데 좋은 문제를 통해 도움을 주고 평가에서 공정성을 확보하기 위해 문제풀이에서 개념을 이용하는 능력과 개념에 대한 이해를 조사하는 문제의 예를 제시하려고 한다. 물론 주제의 이해를 조사하는 최선의 도구는 주관식 서술문제이지만 서술과정의 채점이 어렵고 공정성 확보가 쉽지 않은 경우 선다형문제를 통해 개념의 이해를 돕는 문제 만들기에 관심을 가지려고 한다. 그러나 주관식문제라도 과정이 채점에서 생략되는 단답형 문제의 경우 풀이과정에서 일어나는 실수를 간과하고 정답에 이르는 경우가 있을 수 있다. 이러한 예를 제시하고 바른 풀이와 정확한 개념의 이해를 같이 생각해 볼 기회를 갖는다. 그리고 선다형문제를 이용해야하는 많은 경우가 있다. 이 경우에 선다형문제를 구성하고 만드는 데 주의를 해야만 한다. 선다형문제로 시험을 보는데 따르는 많은 문제가 여러 문헌에서 논의되었다. 그 구체적인 내용에 대해서는 선다형문제의 부족한 점과 문제 만들기에 대하여 여러 문헌(Floyd L. Coppedge & Gerald S. Hanna, 1971/ Johnson B. R., 1991/ Hilton, P. 1993/ Eisner,M.1998/ Abraovitz ,B., Merezina M., and Berman, A., 2003/ 김병무, 2005/ Buma A., Miryan B. and Abraham B., 2005)에 언급되어 있다.

여기서는 잘못 만들어진 단답형문제와 선다형문제의 예를 제시하고 또 증명문제의 경우를 포함하여 선다형문제를 잘 만드는 방법에 대해 알아보려고 한다. 구체적으로 여러 개의 선다형문제의 예를

* 이 논문은 2008년도 충주대학교 교내 학술연구비의 지원을 받아 수행한 연구임.
* 2008년 11월 투고, 2008년 11월 심사완료
* ZDM 분류 : D35
* MSC2000 분류 : 97D70
* 주제어 : 문제 만들기, 단답형문제, 선다형문제, 증명문제, 대학수학.

제시하고 개념을 어떻게 이해하는지를 조사하고 선다형문제를 만들어가는 과정을 제시한다. 바람직한 선다형문제가 무엇인지 만들어 보고 수학적 개념과 함께 제시하며 선다형문제의 잘못된 예와 개념을 이해하는지를 알 수 없는 문제의 이유를 설명하고 끝에는 잘 만들어진 선다형문제를 제시하려고 한다. 한편 불가피하게 선다형문제를 만들어야 하는 경우도 있지만 정확한 개념의 이해를 주관식 문제처럼 제시할 수 있는 경우도 있다. 학생들의 수준에 따라 증명문제의 경우 어렵게 여기고 주관식 문제로 제시하는 것이 학생들에게 거부감을 주고 문제풀이를 포기하게 되는 경우가 많다. 이 경우 학생에게 도움을 주지 못하며 채점이 필요 없을 정도로 의미가 없으므로 이를 완화하고 개념과 정의를 확실히 이해하도록 도와주기 위해 선다형문제를 만들어 제시해본다.

II. 본 론

우선 주관식문제를 제시하였을 때, 풀이과정을 보지 않고 정답만 물어보는 단답형문제를 채점하는 경우 일어날 수 있는 잘못을 예시한다. 이를 극복하기 위해 풀이과정이 채점 대상이 되어야 함을 확인하고 잘못에 대한 분석이 새로운 개념의 이해와 창의적인 풀이과정을 이끌 수 있음을 알아본다.

편의상 수학주제나 개념, 단답형문제, 풀이과정 순서로 제시한다.

1. 단답형문제로 제시되어 잘못된 풀이가 정답으로 채점되는 경우

(예제1) 주제 : 부등식 문제 풀이

단답형문제 : x에 대한 부등식 $|x|+|x-1|<2$를 풀어라.

좌변의 항을 결합하여 $|2x-1|<2$를 풀어 $-\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{3}{2}$을 얻었다. 답은 실제로 정답이다. 이 요행수가 어떻게 분석되어야 하나?

그런데 $a,b,c(a \leqq b)$일 때 부등식 $|x-a|+|x-b|<c$와 $|2x-(a+b)|<c$는 해집합이 같다.

(예제2) 주제 : 지수부등식 풀이

단답형문제 : $e^{x-2}+e^{x+8}=e^{4-x}+e^{3x+2}$를 풀어라.

푸는데 등식 $e^a+e^b=e^{ab}$를 이용하여 $(x-2)(x+8)=(4-x)(3x+2)$에서 $0=x^2-x-6=(x-3)(x+2)$와 같이 풀어 $x=-2$, $x=3$을 얻었다. 바른 풀이는 아니지만 정답을 얻었다. 그 이유는?

방정식 $b^{f(x)}+b^{g(x)}=b^{u(x)}+b^{v(x)}$는 밑 $b(b\neq 0)$에 관계없이

$f(r)=u(r)$, $g(r)=v(r)$, $f(s)=v(s)$, $g(s)=u(s)$이면 $x=r$, $x=s$를 해로 갖는다.

r과 s가 또한 방정식 $f(x)g(x)=u(x)v(x)$를 만족시킨다.

또 지수부등식을 다음과 같이 풀었다.

$4^{x-1}=2^x$은 다음과 동치이다. $4(x-1)=2x \Leftrightarrow 4x-4=2x \Leftrightarrow 2x=4 \Leftrightarrow x=2$

일반으로 $a^c=b^d$, $ac=bd$이면, $b\log a=a\log b$ 또는$a^b=b^a$이다.

(예제3) 주제 : 인수분해와 분수식의 약분

단답형문제 : $\dfrac{bx(a^2x^2+2a^2y^2+b^2y^2)+ay(a^2x^2+2b^2x^2+b^2y^2)}{bx+ay}$을 간단히 하여라.

$$\frac{bx(a^2x^2+2a^2y^2+b^2y^2)+ay(a^2x^2+2b^2x^2+b^2y^2)}{bx+ay}=\frac{bx(ax+by)^2+ay(ax+by)^2}{bx+ay}$$

$$=\frac{(bx+ay)(ax+by)^2}{bx+ay}=(ax+by)^2$$

이 경우 풀이과정은 틀렸지만 정답을 얻었다. 다음 경우 지수의 3을 약분하여 $\dfrac{(a+b)^3+a^3}{(a+b)^3+b^3}=\dfrac{2a+b}{a+2b}$을 얻었다. 이들은 모두 정답이다.

(예제4) 주제 : 지수방정식의 풀이

단답형문제 :$e^{2x}-e^x-2=0$을 풀어라.

$\ln e^{2x}-\ln e^x-\ln 2=0 \Rightarrow 2x-x-\ln 2=0 \Rightarrow x=\ln 2$이다.

풀이과정은 틀렸지만 정답이다.

(예제5) 주제 :$(f(x))^{g(x)}$의 도함수 구하기

단답형문제 : $D(\sin x)^{\ln x}$를 구하여라.

$(\sin x)^{\ln x}$를 미분할 때 로그미분법을 이용하지 않고 대신 $\ln x$가 상수라면 답은 $(\ln x)(\sin x)^{\ln x-1}(\cos x)$이고 $\sin x$가 상수라면 $(\sin x)^{\ln x}\ln(\sin x)\cdot\dfrac{1}{x}$이다.

$\ln x$도 $\sin x$도 상수가 아니므로 두 공식을 이용하여

$$D(\sin x)^{\ln x}=(\ln x)(\sin x)^{\ln x-1}(\cos x)+(\sin x)^{\ln x}\ln(\sin x)\cdot\frac{1}{x}\text{이다.}$$

방법은 이상할지 모르나 답은 옳다. $D(f(x))^{g(x)}$의 도함수는 어떻게 구하나?

$(f(x))^{g(x)}$의 도함수를 각 함수를 교대로 상수로 보고 미분하여 얻은 두 도함수를 더하여 구할 수 있는 예를 더 들어보면 $(f(x),g(x))$가 $(\sin x,\ln x)$, (x,x)인 경우 가능하다.

(예제6) <u>주제</u> : 로피탈의 정리의 적용

<u>단답형문제</u> : $\int_1^{\infty}(x-1)e^{-x}dx$를 풀어라.

$\int_1^{\infty}(x-1)e^{-x}dx = \int_1^{\infty}\frac{x-1}{e^x}dx = \int_1^{\infty}\frac{1}{e^x}dx = \cdots = \frac{1}{e}$에서 두 번째-세 번째 등식에서 로피탈의 정리를 이용하였다.

(예제7) <u>주제</u> : 부정적분, 정적분 구하기

<u>단답형문제</u> : $\int\frac{x+2}{x^3}dx$, $\int e^{4x}dx$, $\int_0^2(2x-x^2)xdx$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\sin^2\theta-(1-\cos\theta)^2]d\theta$, $\int_{-1}^2 x^2 dx$, $\int_{-1}^2 (x+1)^2 dx$, $\int_1^2(3x^2+4x)dx$를 풀어라.

$$\int\frac{x+2}{x^3}dx = \int(x+2)dx\int x^{-3}dx = \frac{(x+2)^2}{2}\frac{x^{-2}}{-2}+C=-\frac{1}{4}(\frac{x+2}{x})^2+C$$

$$\int e^{4x}dx = \int(e^{2x})^2dx = (\int e^{2x}dx)^2 = (\frac{e^{2x}}{2})^2+C=\frac{1}{4}e^{4x}+C\text{이다.}$$

적분의 곱을 취함으로서 곱의 적분을 계산하는 예를 들었다.

복잡한 인수를 무시해도 적분값이 같은 예를 알아본다.

$$\int_0^2(2x-x^2)xdx = \int_0^2(2x-x^2)dx = \frac{4}{3},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\sin^2\theta-(1-\cos\theta)^2]d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}[\sin\theta-(1-\cos\theta)]d\theta = 2-\frac{\pi}{2},$$

$$\int_{-1}^2 x^2 dx = [x^2]_{-1}^2 = 3,\ \int_{-1}^2(x+1)^2dx = [(x+1)^2]_{-1}^2 = 9,$$

$$\int_1^2(3x^2+4x)dx = [3x^2+4x]_1^2 = 20-7 = 13\text{이다.}$$

피적분함수에 대한 원시함수를 구하지 않고 정확한 정적분값을 구하는 경우를 어떻게 설명해야 되는지 이유를 찾아보도록 한다.

(예제8) <u>주제</u> : 몫의 도함수 구하기

<u>단답형문제</u> : $f(x)=(1-\frac{3}{x})^{-3}$, $g(x)=-x^3$일 때 $\frac{f(x)}{g(x)}$의 도함수를 구하여라.

$f'(x) = -3(1-\frac{3}{x})^{-4}\frac{3}{x^2} = -9x^2(x-3)^{-4}$이고 $g'(x) = -3x^2$에서

$(\frac{f}{g})'(x) = \frac{f'(x)}{g'(x)} = 3(x-3)^{-4}$이다. 이 방법에 따라 올바른 답을 얻는 예를 들어보면

$(f(x), g(x)) = ((1-\frac{n}{x})^{-n}, x^n)$, $(e^{-\frac{x}{2}}, e^{-x})$와 $(1+\frac{1}{x}, \frac{1}{x})$이다.

(예제9) 주제 : 합의 곱과 곱의 합은 같다

단답형문제 : $\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{7})^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty}(-\frac{1}{5})^k$를 구하여라.

$\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{7})^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty}(-\frac{1}{5})^k = \sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{7} \cdot \frac{-1}{5})^k = \frac{35}{36}$이다.

물론 일반으로 $\sum a_k \cdot \sum b_k = \sum a_k b_k$는 아니다. $\sum a_k \cdot \sum b_k = \sum a_k \cdot b_k$인 수렴하는 급수 $\sum b_k$를 항상 찾을 수 있는가?

앞에서 제시된 예제들은 단답형문제로서 잘못된 풀이를 정답으로 인정할 수 있는 경우이다. 이를 극복하는 방법은 풀이과정이 채점에 이용되어야 하고 특별한 풀이에 의해 정답에 이른 경우 그 이유의 설명을 확인할 필요가 있다.

다음은 선다형문제로 제시해도 서술형문제와 같은 효과를 얻을 수 있는 경우를 알아본다.

2. 선다형문제의 구체적 제시

편의상 수학개념, 서술형문제, 선다형문제 순서로 제시하고 선다형문제의 여러 가지 부족한 점을 설명한다. 이들 부족한 점을 보완해가며 좋은 문제를 만드는 과정이 예제에서 제시될 것이다.

(예제1) 개념 : P, Q가 다항식일 때, $\lim_{n\to\infty}\sqrt{P(n)+Q(n)}$ 꼴의 극한 구하기.

서술형문제 : $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n+1}+\alpha n)$이 유한일 때, α의 값을 구하여라.

풀이) $\alpha \neq -1$이면 직접 계산하여 극한이 $\pm\infty$이다.

$\alpha = -1$이면 $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n+1}-n) = \frac{1}{2}$이다.

이 문제를 풀기위해 여러 경우를 생각해야 한다. $\alpha \neq -1$에 대해 일반 극한을 계산하고, $\alpha = -1$에 대해 극한을 구하기 위해 켤레를 곱해야 한다. 서술형문제와 같은 효과를 보기위해 다음과 같이

선다형문제를 만들어 본다.

<u>선다형문제1</u> : $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n+1}+\alpha n)$이 유한일 때, α의 값은?

ㄱ) -1, ㄴ) 0, ㄷ) 1, ㄹ) 2, ㅁ) 3.

모든 음이 아닌 값(0, 1, 2, 3)에 대해 극한은 어떤 계산 없이도 ∞임을 안다. 이것은 지워가면서 선택하게 되면 -1만 남게 된다.

조금 더 발전된 문항은

<u>선다형문제2</u> : $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n+1}+\alpha n)$이 유한일 때, α의 값은?

ㄱ) -2, ㄴ) -1, ㄷ) 0, ㄹ) 1, ㅁ) 2.

여기서 -2가 해가 아니라는 것은 분명하지 않고 ㄱ)과 ㄴ)에 대해 극한을 계산해야 한다. 그러나 표시한 답에서 모든 다른 가능성을 알아보았는지 알 수 없다. 이 문제를 극복하기 위해 다음과 같이 문제를 제시한다.

<u>선다형문제3</u> : $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n+1}+\alpha n)$이 유한일 때, 극한값은?

ㄱ) -1, ㄴ) $-\frac{1}{2}$, ㄷ) 0, ㄹ) $\frac{1}{2}$, ㅁ) 1.

여기서 어려움은 $\alpha=-1$이고 극한값이 $\frac{1}{2}$이라고 계산했는데 실수로 ㄱ)을 표시한 것을 구별하는 것이다. 따라서 마지막 제시될 문항은 다음과 같다.

<u>선다형문제4</u> : $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n+1}+\alpha n)$이 유한일 때, 극한값은?

ㄱ) $-\frac{1}{2}$, ㄴ) 0, ㄷ) $\frac{1}{2}$, ㄹ) 1, ㅁ) $\frac{3}{2}$.

<u>선다형문제5</u> : $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n+1}+\alpha n)$이 유한일 때, 극한값을 β라 하면 $\alpha+\beta$는?

ㄱ) 0, ㄴ) $\frac{1}{2}$, ㄷ) 1, ㄹ) $-\frac{1}{2}$, ㅁ) -1.

(예제2) <u>개념</u> : 무한구간에서 특이 적분을 정의에 의해 계산할 수 있는지 알아보기.

<u>서술형문제</u> : 어떤 값 α에 대해 $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$는 수렴하는가? 그리고 수렴값을 구하여라.

풀이) $\alpha>1$에 대해 수렴하고 $\alpha\le 1$에 대해 발산한다는 것은 잘 알고 있다. 적분값은 $\frac{1}{\alpha-1}$에 수렴한다.

다음과 같이 선다형문제를 만들어 본다.

선다형문제1 : 어떤 값 α에 대해 $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$는 수렴하는가?

ㄱ) $-\frac{1}{3}$, ㄴ) 0, ㄷ) $\frac{1}{3}$, ㄹ) $\frac{5}{3}$, ㅁ) $-\frac{5}{3}$.

문제를 분석할 필요없이 $\alpha > 1$에 대해 수렴한다는 것을 알고 있으면 답을 쉽게 고를 수 있고 또, $\alpha = -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{5}{3}$를 대입하여 적분을 계산하여 알아볼 수 있다.

더 좋은 문항을 두 개 제시해본다.

선다형문제2 : 어떤 값 α에 대해 $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$가 수렴한다면 적분값은?

ㄱ) α, ㄴ) $\frac{2}{\alpha}$, ㄷ) α^2, ㄹ) α에 관계없다, ㅁ) $\frac{1}{\alpha-1}$.

선다형문제3 : 어떤 값 α에 대해 $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$가 수렴한다면 α가 속하는 구간은?

ㄱ) [0,2], ㄴ) (0,1), ㄷ) (0,1], ㄹ) (1,2), ㅁ) [1,2].

선다형문제2와 선다형문제3에서 문제를 분석하고 서술형문제처럼 풀어야 한다. 특히 선다형문제3은 적분값은 구하지 않고 α의 범위만 구할 수 있다.

(예제3) 개념 : 주어진 기하학적 조건에서 주어진 곡면에 접하는 접평면을 구하기.

서술형문제 : 두 점 M(0,0,2), N(0,3,0)을 포함하는 평면으로 곡면 $x^2+2y^2+3z^2=6$에 접하는 모든 평면을 구하여라.

풀이) 접점을 (x_0, y_0, z_0)라 하면 접평면은 $x_0x+2y_0y+3z_0z=6$이고, $x_0^2+2y_0^2+3z_0^2=6$이다. M과 N은 평면위에 있으므로 $6z_0=6$, $6y_0=6$.

따라서 $y_0=z_0=1$이고, $x_0^2=1$이다. 접평면은 두 개 있다.

$x+2y+3z-6=0$과 $-x+2y+3z-6=0$이다.

선다형문제1 : 두 점 M(0,0,2), N(0,3,0)을 포함하는 평면으로 곡면 $x^2+2y^2+3z^2=6$에 접하는 평면을 $Ax+By+Cz+D=0$이라 하면 다음에서 맞는 것은?

ㄱ) A+B+C+D=-2, ㄴ) A+B+C+D=-4 , ㄷ) A+B+C+D=0 ,

ㄹ) A+B+C+D=4 , ㅁ) 접평면은 없다.

방정식 $Ax+By+Cz+D=0$에 0이 아닌 임의의 상수가 곱해질 수 있으므로 질문은 분명히 잘못 정의된 것이고 처음 네 개는 모두 맞다.

선다형문제2 : 두 점 M(0,0,2), N(0,3,0)을 포함하는 평면으로 곡면 $x^2+2y^2+3z^2=6$에

접하는 평면을 $Ax+By+Cz+D=0$이라 하고 B=2라면 다음에서 맞는 것은?

ㄱ) A+B+C+D=-2, ㄴ) A+B+C+D=-4 , ㄷ) A+B+C+D=0 ,

ㄹ) A+B+C+D=4 , ㅁ) 접평면은 없다.

여기서는 ㄱ)과 ㄷ)이 맞다.

<u>선다형문제3</u> : 두 점 M(0,0,2), N(0,3,0)을 포함하는 평면으로 곡면 $x^2+2y^2+3z^2=6$에 접하는 평면을 $Ax+By+Cz+D=0$이라 하고 B=2라면 다음에서 맞는 것은?

ㄱ) A+B+C+D=-1, ㄴ) A+B+C+D=0 , ㄷ) A+B+C+D=1 ,

ㄹ) A+B+C+D=2 , ㅁ) 접평면은 없다.

여기서는 ㄴ)이 맞다. 더 완전한 형태의 문제는 다음과 같다.

<u>선다형문제4</u> : 두 점 M(0,0,2), N(0,3,0)을 포함하는 평면으로 곡면$x^2+2y^2+3z^2=6$에 접하는 평면을 $Ax+By+Cz+D=0$이라 하면 $\frac{C+D}{B}$는?

ㄱ) $-\frac{1}{2}$, ㄴ) $-\frac{3}{2}$, ㄷ) $-\frac{5}{2}$, ㄹ) -3, ㅁ) $-\frac{7}{2}$.

그러나 실제로 두 접평면이 있다는 사실을 간과하게 된다. 다음의 경우는 이것을 보완한 것이다.

<u>선다형문제5</u> : 두 점 M(0,0,2), N(0,3,0)을 포함하는 평면으로 곡면 $x^2+2y^2+3z^2=6$에 접하는 평면을 $Ax+By+Cz+D=0$이라 하면 (해의 수) × $\frac{C+D}{B}$는?

ㄱ) -3, ㄴ) -1, ㄷ) 0, ㄹ) 2, ㅁ) 3.

(예제4) <u>개념</u> : 편도함수의 정의를 어떻게 이용하는지 알아보기.

다음 문제는 다변수함수를 가르칠 때 자주 접하는 문제이다.

<u>서술형문제</u> :$(x,y)\neq(0,0)$일 때 $f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$이고, $(x,y)=(0,0)$일 때, $f(x,y)=0$이다. $f'_x(0,0)$을 구하여라.

풀이) 분명히 $f'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0$이다.

<u>선다형문제1</u> : $(x,y)\neq(0,0)$일 때 $f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$이고, $(x,y)=(0,0)$일 때, $f(x,y)=0$이다. $f'_x(0,0)$을 구하면?.

ㄱ) 0, ㄴ) 1, ㄷ) 2, ㄹ) 3, ㅁ) 존재하지 않는다.

이 문제는 잘못된 이유로, 이를테면 $\frac{d}{dt}(0)=0$이므로 정답으로 0을 택할 가능성이 있다. 따라서 도함수가 0이 안되는 함수로 바꾸어야 한다. 다음 문제에서 도함수는 1이다.

선다형문제2 : $(x,y) \neq (0,0)$일 때 $f(x,y) = \dfrac{xy+x^3}{x^2+y^2}$이고, $(x,y)=(0,0)$일 때 $f(x,y)=0$이다. $f'_x(0,0)$을 구하면?.

ㄱ) 0, ㄴ) 1, ㄷ) 2, ㄹ) 3, ㅁ) 존재하지 않는다.

(예제5) 주요개념 : 정리를 이용하기. 부수개념 : 극대값과 극소값을 계산하기.

함수 f가 연속이면 $\dfrac{d}{dx}\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt\right) = f(b(x))b'(x) - f(a(x))a'(x)$이다.

서술형문제 : $g(x) = \int_0^{x^3-3x^2} e^{t^2} dt$의 극값을 갖는 x를 구하여라.

풀이) $g'(x) = e^{(x^3-3x^2)^2}(3x^2-6x) = 0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$이고, $x=0$에서 극대값을 갖고 $x=2$에서 극소값을 갖는다.

선다형문제1 : $g(x) = \int_0^{x^3-3x^2} e^{t^2} dt$일 때, 다음에서 맞는 것은?

ㄱ) g(x)는 x=3에서 극소값을 갖는다. ㄴ) g(x)는 x=2에서 극대값을 갖는다.
ㄷ) g(x)는 x=0에서 극대값을 갖는다. ㄹ) g(x)는 x=-2에서 극소값을 갖는다.
ㅁ) g(x)는 극값을 갖지 않는다.

이 문제는 잘못된 해를 답할 때, 학생이 적분의 미분에서 또는 극값을 결정하는 과정에서 어느 경우에 실수를 하는지 분명하지가 않다. 다음 문제는 부수개념을 제외한 것이다.

선다형문제2 : $g(x) = \int_0^{x^3-3x^2} e^{t^2} dt$일 때, g'(1)은?

ㄱ) 0, ㄴ) -2, ㄷ) 1, ㄹ) $-3e^4$, ㅁ) $4e^3$.

분명히 정답은 ㄹ)이다.

또, 다음과 같이 만들어 볼 수 있다.

선다형문제3 : $g(x) = \int_0^{x^3-3x^2} e^{t^2} dt$일 때, 극대값을 x=a에서, 극소값을 x=b에서 갖는다. 이때 a+b는?

ㄱ) -2, ㄴ) -1, ㄷ) 0, ㄹ) 1, ㅁ) 2.

3. 증명문제의 선다형문제 만들기

대학 교양수학 과정에서 수학적 명제를 증명하는 과정은 중요하다. 선행 연구들은 주관식 증명문

제의 시험이 어려워 증명문제를 피하고 더 나아가 포기하게 만든다고 한다(Berezina M., and Berman, A., 2000). 여기서는 대학 교양수학 과정에서 필요하고 중요한 기본 개념이나 정리를 선정하여 선다형문제로 개발하고 학생들에게 이를 통해 증명문제의 두려움을 조금이라도 줄여주고 기본개념의 확실한 이해를 위해 도움을 제공하려고 한다.

예제 1, 2에서 정리와 증명이 주어지고 정리와 정의가 따라 나온다. 각 증명은 몇 단계를 거치고 각 단계에서 사용된 정리 또는 정의를 지적하도록 요구받는다. 답은 한 개가 아니고 여러 개일 수 있다.

(예제 1)

(정리) 함수 f(x)는 구간 (a,b)에서 연속이고 $c\in(a,b)$일 때, g(x) $=\int_c^x f(t)dt$ $(x\in(a,b))$로 정의된 함수 g(x)는 f의 원시함수이다. (즉, g′(x)=f(x))

(증명) $x+\Delta x\in(a,b)$라 하자. g의 정의에 의해,

$$g(x+\Delta x)-g(x)=\int_c^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_c^x f(t)dt$$

Step 1. $$=\int_c^x f(t)dt+\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_c^x f(t)dt=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

Step 2. $=$f(d) Δx, (d는 x와 $x+\Delta x$ 사이에 있다.)

이것은 $$g'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0} f(d)$$

Step 3. $$=\lim_{d\to x} f(d)$$

Step 4. $$=f(x)$$

* 다음 정리와 정의 어느 것이 증명과정(Step 1-Step 4)에서 이용되었는지 주어진 표에 O표 하여라.

T1. 함수 f(x)가 구간 $[a,b]$에서 연속이고 구간 (a,b)에서 미분가능하면, $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 인 c가 구간 (a,b)에 존재한다.

T2. 함수 f(x)가 구간 $[a,b]$에서 연속이면, $\int_a^b f(x)dx=f(c)(b-a)$인 c가 구간 $[a,b]$에 존재한다.

T3. 함수 f(x)가 구간 $[a,b]$에서 적분가능하면, 모든 실수 k에 대해 함수 kf(x)는 구간 $[a,b]$에서

적분가능하고 $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$이다.

T4. 함수 f(x)가 구간 $[a,b]$, $[b,c]$에서 적분가능하면, 함수 f(x)가 구간 $[a,c]$에서 적분가능하고 $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$이다.

T5. 함수 f(x), g(x), h(x)가 x_0의 근방에서 정의되고 근방의 모든 점 x에 대해 f(x)≦g(x)≦h(x)이고 $\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = L$이면, $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$이다.

D6. 함수 f(x)가 x_0에서 연속이면, $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$이다.

T7. $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$이고 g가 y_0에서 연속이면, $\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = \lim_{y\to y_0} g(y)$이다.

	T1	T2	T3	T4	T5	D6	T7
Step 1							
Step 2							
Step 3							
Step 4							

(예제 2)

(정리) 함수 f(x)가 구간 $[a,b]$에서 연속이고 구간 (a,b)에서 미분가능하면

$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$인 c가 구간 (a,b)에 존재한다.

(증명) 함수 g(x)를 다음과 같이 정의한다.

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

Step 1. 함수 g(x)는 구간 $[a,b]$에서 연속이다.

Step 2. 함수 g(x)는 구간 $[a,b]$에서 미분가능하고 g(a)=g(b)=0이다.

Step 3. g′(c)=0인 c가 구간 (a,b)에 존재한다.

Step 4. $g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

따라서, $g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$이고, $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$이다.

* 다음 정리와 정의 어느 것이 증명과정(Step 1-Step 4)에서 이용되었는지 주어진 표에 O표하여라.

T1. 함수 f(x)가 x_0에서 연속이면, 모든 실수 k에 대해 함수 kf(x)는 x_0에서 연속이다.

T2. 함수 f(x)가 x_0에서 미분가능하면, 모든 실수 k에 대해 함수 kf(x)는 x_0에서 미분가능하고

$(kf(x))' = kf'(x)$이다.

T3. 함수 f(x), g(x)가 x_0에서 연속이면, 함수 f(x)+g(x)는 x_0에서 연속이다.

T4. 함수 f(x), g(x)가 x_0에서 미분가능하면, 함수 f(x)+g(x)는 x_0에서 미분가능하고 $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$이다.

T5. 함수 g(x)가 x_0에서 미분가능하고 f(x)가 $g(x_0)$에서 미분가능하면, $g(f(x))$는 x_0에서 미분가능하다.

T6. 함수 f(x)와 g(x)가 우함수이면, $(f+g)(x)$도 우함수이다.

T7. 함수 f(x)가 구간 $[a,b]$에서 연속이고, 구간 (a,b)에서 미분가능하고, $f(a)=f(b)$이면 $f'(c)=0$인 c가 구간 (a,b)에 존재한다.

T8. 함수 $f(x)$가 구간 $[a,b]$에서 연속이고, $f(a)f(b)<0$이면 $f(c)=0$인 c가 구간 (a,b)에 존재.

	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8
Step 1								
Step 2								
Step 3								
Step 4								

* 다음 예제3은 앞의 것과 다르다. 어느 단계(Step 1-Step 4)에서 연속성이 이용되었는가? ( )

(예제 3)

(정리) 함수 f(x), g(x)가 x_0에서 미분가능하면, 함수 f(x)g(x)는 x_0에서 미분가능하고

$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이다.

(증명) $h(x)=f(x)g(x)$라 하자.

도함수의 정의에 의해 $h'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{h(x_0)+\Delta x)-h(x_0)}{\Delta x}$이다.

Step 1. $=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)g(x_0+\Delta x)-f(x_0)g(x_0)}{\Delta x}$

Step 2.

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)g(x_0+\Delta x)-f(x_0+\Delta x)g(x_0)+f(x_0+\Delta x)g(x_0)-f(x_0)g(x_0)}{\Delta x}$$

Step 3. $=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)[g(x_0+\Delta x)-g(x_0)]}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{g(x_0)[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]}{\Delta x}$

Step 4. $=f(x_0)g'(x_0)+f'(x_0)g(x_0)$

* 다음 예제4는 참인 명제이다. 주어진 명제를 증명하는데 이용된 문장을 (a-d)에서 골라라.

(예제 4) 수열 $[(1+\frac{1}{n})^n]_{n=1}^{\infty}$의 수렴은 다음 어느 것으로부터 나오는가?

(a) 수열은 감소하고 2에 의해 아래로 유계이다.
(b) 수열은 증가하고 3에 의해 위로 유계이다.
(c) 수열은 증가하고 2에 의해 아래로 유계이다.
(d) 수열은 감소하고 3에 의해 위로 유계이다.

이와 같은 제시가 바람직한 방법인가의 논의는 학생들의 수준에 따라 다를 수 있으나 수학학습 능력이 부족하거나 낮은 학생의 경우 서술형문제보다 쉽게 여기며 증명에 대한 두려움을 약화시키는 것은 학생들에 대한 조사에서 확인 할 수 있었다.

III. 결 론

여기서 제시된 예제는 대학수학의 미분적분학 문제로 세 가지 유형을 다루었다. 학생들과 인터뷰를 통한 반응, 시험문제 출제, 수업 경험과 참고문헌을 통해 도움 받아야 할 내용은 다음과 같다. 첫째, 단답형문제로 제시하여 정답으로 채점하는 경우 일어나는 잘못을 극복하기 위해 이런 유형의 문제를 피하는 대신 다른 방법을 강구하여야 하고 잘못이 일어나는 이유를 분석하여 학습에 참고하는 것이다. 둘째, 선다형문제로 제시해도 서술형문제와 같은 비중을 갖도록 문제를 만드는 경우 시간이 많이 걸리며 개념의 이해에 선다형문제나 단답형문제를 만드는데 여러 가지 어려움이 있다. 이러한 어려움을 극복하고 문제를 만들려면 많은 노력이 필요하다. 셋째 증명문제의 어려움을 피하기 위해 서술형문제를 피하고 다른 형태의 문제(단답형, O,X문제, 선다형문제)를 만드는 경우 여기서는 선다형문제 만들기를 알아보았다. 이들을 만들기 위해 다음을 조사할 필요가 있다. (1) 알아보아야 할 모든 가능성이 조사될 수 없다. (2) 정답이 쉽게 추측될 수 있다. (3) 정답이 잘못된 방법으로 얻어질 수 있다. (4) 잘못된 해에 표시하는데 그 이유가 분명하지 않다. 예를 들면 같은 문제에서 여러 가지 개념을 결합하려고 할 때 일어난다. (5) 문제가 한 개 이상의 해를 갖는다. (6) 계산이 불필요하게 길어진다. (7) 단답형의 경우 잘못된 풀이로 정답에 이른 경우 풀이과정의 중요성이 간과된다. (8) 어렵다고 여기는 증명문제의 여러 가지 어려움을 보완하는 문제제시를 통한 학생들의 다양한 문제에 대한 선호도를 알아본다.

언급된 여러 가지 제안을 명심하고 만들어 본 다양한 문제들이 이들 어려움을 극복했는지 확인해 보는 노력이 필요하다. 바람직한 단답형문제나 선다형문제를 또 증명문제의 어려움을 극복해 주는 문제 만들기는 쉬운 일은 아니다. 채점이 수월하고, 공정하고, 객관적이며, 단시간에 많은 양의 채점이 가능하고, 쉽다는 장점을 활용하여 수학적 개념 이해를 바르게 하고 시험불안감을 덜어주며 좋은 점수를 받을 수 있다는 또 다른 인식을 심어주는 선다형문제 개발과 단답형문제의 잘못으로 정답

에 이른 경우, 바람직한 채점과 문제제시에 대해 관심과 연구가 필요하다. 한편, 증명문제의 어려움을 선다형문제로 제시하는 것이 학습수준이 상대적으로 낮은 학생들에게 도움을 준다는 연구 결과(김병무, 2004)를 참고할 필요가 있다. 여기서 제시된 예제들이 좋은 문제가 될 수가 없다면 최선의 문제가 되도록 노력을 하고 개념의 이해를 도와주며 최선의 문제가 될 수 있도록 더 많은 연구가 이루어지고 학생들에 대한 조사를 시도하여 그 결과를 분석하고 더 정선된 문제를 얻도록 노력을 한다. 개념의 이해를 도와주고 성적향상에도 기여하는 문제를 만들어 제시하는 것도 대학수학 학습에 학생들의 참여를 긍정적으로 이끄는 역할을 할 것이다. 끝으로 문제은행을 만드는데 여기서 언급되지 않은 문제 만들기와 개념의 이해에 대한 다른 어려움이나 접근 방법을 지적하여 다양한 대학수학 문제를 만드는데 관심 있는 대학수학 지도교수의 도움이 필요하다.

참 고 문 헌

김병무 (2004). 대학수학에서 증명문제의 다양한 평가, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> **18(2)**, pp.125-132.

김병무 (2005). 대학수학에서 실수를 이용한 학습지도, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> **19(1)**, pp.45-55.

Abraovitz, B., Berezina M., and Berman, A. (2002). Incorrect but Instructive, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, **33**, pp.465-475.

Abraovitz, B., Merezina M., and Berman, A. (2003). Useful Mistakes, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, **34**, pp.756-764.

Berezina M., and Berman, A. (2000). 'Proof Reading' and Multiple Choice Tests, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, **31**, pp.613-419.

Buma A., Miryan B. and Abraham B. (2005). How not to formulate multiple choice problems, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, **Vol. 36, No. 2**, pp.428-437.

Eisner, M. (1998). The Probability of Passing a Multiple Choice Test, *College Mathematics Journal*, **29**, pp.421-426.

Floyd L. Coppedge & Gerald S. Hanna (1971). Coparison of Teacher-Written and Emprically Derived Distractors to Multiple Choice Test Questions, *Journal for Research in Mathematics Education*, **Vol. 2, No. 4**, pp.299-303.

Hilton, P. (1993). The Tyranny of Tests, *American Mathematical Monthly*, **100**, pp.365-369.

Johnson B, R. (1991). A New Scheme for Multiple-choice Tests in Lower Division Mathematics, *American Mathematical Monthly*, **98**, pp.427-429.

Making Good Multiple Choice Problems at College Mathematics Classes

Kim, Byung Moo
School of General Arts, Chungju National University, Chungju-Shi, Chungbuk, 380-702, Korea
E-mail : bmkim6@hanmail.net

It is not an easy matter to develop problems which help students understand mathematical concepts correctly and precisely. The aim of this paper is to review the merits and demerits of three problem types (i.e. one answer problems, multiple choice problems and proof problems) and to suggest some points that should be taken into consideration in problem making. First, we presented the merits and demerits of three types of problems by examining actual examples. Second, we discussed some examples of misleading problems and the ways to make desirable ones. Finally, on the basis of our examination and discussion, we suggested some points that should be kept in mind in problem making. The major suggestions are as follows; i) In making one answer problems, we should consider the possibility of getting a solution by wrong processes, ii) In formulating multiple choice tests which are favored for their easiness of grading, we should take into account the importance of checking whether the students are fully understanding the concepts, iii) We may depend on the previous research result that multiple choice tests for proof problems can be helpful for the students who have insufficient math background. Besides those suggestions, we made an overall proposal that we should endeavor to find ways to implement the demerits of each problem type and to develop instructive problems that can help students understanding of math.

* ZDM classification : D35
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D70
* Key Words : Making problems, open problem, multiple choice problem, proof problem, College Mathematics