韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 22권 제 4호. 2008. 11. 545-556

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 22 No 4, Nov. 2008. 545-556

지렛대 원리를 이용한 삼각형의 Gergonne 점과 딸림점에 대한 연구

한 인 기 (경상대학교)

삼각형은 가장 단순한 기하학적 도형이지만, 기하학 탐구에서 삼각형은 훌륭한 연구 대상이며 후속적인 기하학 연구의 중요한 도구라고 할 수 있다. 본 연구에서는 지렛대 원리를 이용하여 삼각형의 Gergonne 점과 Gergonne 점의 딸림점들의 존재성, Gergonne 점에 관련된 등식을 증명하였고, Gergonne 점의 딸림점들에 대한 새로운 등식을 증명하였다.

1. 서 론

삼각형은 가장 단순한 기하학적 도형이지만, 기하학 탐구에서 삼각형은 훌륭한 연구 대상이며 후속적인 기하학 연구의 중요한 도구라고 할 수 있다. Euclid는 13권의 원론을 통해 수학 지식의 체계적 정립을 시도하였는데, Euclid가 원론의 논리적 기술에서 첫 번째 명제로 삼은 것이 바로 삼각형에 관련된 것이었다(Euclid 원론의 첫 번째 명제는 정삼각형의 작도 문제임). 특히 삼각형의 성질 탐구와 관련하여, Myakishev(2002, p.3)는 '아름답고 놀라운 기하학적 구조의 보고(寶庫)인 삼각형은 무궁무진한 창고이다. 어떤 시도로도 삼각형 성질들의 다양함과 화려함을 완전하게 전달하지는 못할 것이다'라고 하면서, 삼각형의 탐구가 가지는 수학적인, 심미적인 중요성을 강조하였다.

외국에서는 Court N.A., Erdös, p., Thébault V., Myakishev A.G., Mitrinovic D.S. 등과 같은 많은 연구자들이 삼각형의 성질에 관심을 가지고 다양한 연구를 수행하였지만, 국내에서는 삼각형의 진지한 탐구에 관련된 연구가 활발하지는 않았다. 그러나 최근 들어 도종훈(2007), 최영기 · 홍갑주(2006), 한인기 · 신현용(2002), 한인기(2008), 김경선 · 한인기(2007) 등과 같은 연구를 통해 삼각형에 관련된 흥미로운 논의와 탐구가 이루어지고 있는 점은 주목할 만하다.

본 연구에서는 지렛대 원리를 이용하여 삼각형에서 선분들의 교점, 선분들의 비에 관한 성질을 탐구할 것이다. 지렛대 원리는 물리학의 역학분야에서 주로 연구되는 주제이지만, Balk M.B., Boltyanskii V.G. 등에 의해 수학 문제해결에서의 활용가능성이 폭넓게 연구되었으며, 국내에서도 이에 관련된 몇몇 연구들이 수행되었다(한인기 · 홍동화, 2006; 한인기, 2008). 이들 연구에서는 지렛대

* 2008년 10월 투고, 2008년 10월 심사완료
* ZDM 분류 : D53
* MSC2000 분류 : 97D50
* 주제어 : 삼각형, Gergonne 점, 딸림점, 지렛대 원리

원리를 통해, 기하학적 대상들이 대수적 언어로 번역될 수 있으며, 문제해결의 효율적인 도구가 될 수 있음을 보였다.

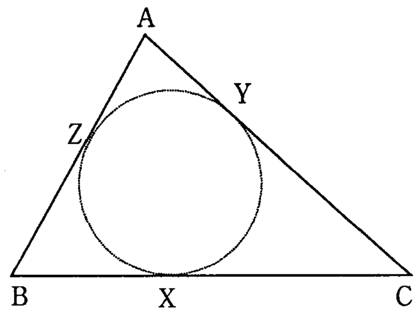
본 연구에서는 지렛대 원리를 이용하여 삼각형의 Gergonne 점과 Gergonne 점의 딸림점들의 존재성, Gergonne 점에 관련된 등식을 증명하고, 이를 바탕으로 Gergonne 점의 딸림점들에 대한 새로운 등식을 추측하고 증명할 것이다. 이를 통해, 지렛대 원리를 이용한 새로운 증명방법들, Gergonne 점의 딸림점들에 대한 새로운 성질들, Gergonne 점과 Gergonne 점의 딸림점들의 유사성을 알 수 있을 것으로 기대된다.

2. Gergonne 점과 딸림점들

내접원, 외접원, 방접원은 삼각형에 관련된 대표적인 원들이다. 특히 내접원과 방접원은 각의 이등분선에 공통으로 관련된다. 내접원의 중심은 삼각형의 세 내각의 이등분선들의 교점이며, 방접원의 중심은 한 내각과 두 외각의 이등분선들의 교점이다. 이러한 각의 이등분선에 관련된 공통점은 내접원과 방접원이 삼각형의 변들 또는 변들의 연장선에 접한다는 공통인 성질로 드러난다. 본 연구에서는 내접원과 방접원의 접점에 관련된 성질로, Gergonne 점과 딸림점에 대해 고찰할 것이다.

(1) Gergonne 점의 존재성

삼각형 ABC에 내접원을 작도하여, 삼각형의 변 AB, BC, AC와 내접원의 접점을 각각 Z, X, Y라 하자(그림 1). Court(1963, p.160)에 의하면, 직선 AX, BY, CZ의 교점을 삼각형 ABC의 Gergonne 점이라 부른다.



<그림 1>

Gergonne 점의 존재성은 일반적으로 체바의 정리를 이용하여 증명하지만, 본 연구에서는 지렛대 원리를 이용하여 살펴보자. Gergonne 점의 존재성을 증명하려면, 세 선분 AX, BY, CZ가 한 점에서 교차한다는 것을 보여야 한다. 한인기(2008)는 세 선분(직선) AX, BY, CZ가 한 점에서 교차하기 위

한 필요충분조건으로 '점 X, Y, Z가 선분 BC, AC, AB의 무게중심이 되도록 A, B, C에 적당한 질량을 놓을 수 있다'는 것을 보였다. 본 연구에서는 이것을 이용하여, 세 선분(직선)의 공점성을 증명할 것이다.

삼각형 ABC에서 둘레의 절반을 p, $AB=c$, $BC=a$, $AC=b$라 놓고, AZ, BZ, BX, CX, CY, AY의 길이를 구하자. 접선의 성질에 의해, $\mathrm{AZ}=\mathrm{AY}$, $\mathrm{BZ}=\mathrm{BX}$, $\mathrm{CX}=\mathrm{CY}$이며, $\mathrm{AZ}+\mathrm{BZ}+\mathrm{CX}=p$이다. 그리고 $\mathrm{AZ}+\mathrm{BZ}=c$이므로, $\mathrm{CX}=\mathrm{CY}=p-c$가 됨을 알 수 있다. 유사한 방법으로, $\mathrm{AZ}=\mathrm{AY}=p-a$, $\mathrm{BZ}=\mathrm{BX}=p-b$가 된다.

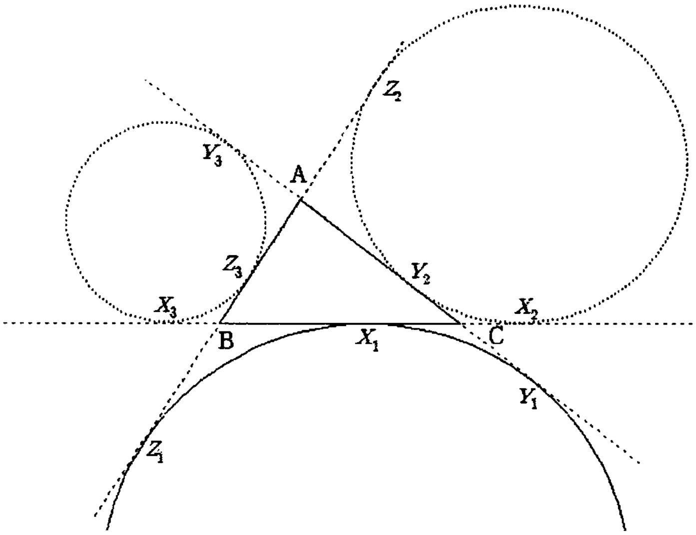
이제 삼각형 ABC의 각 꼭지점에 질량 m_1, m_2, m_3를 놓아, 세 질량점 (A, m_1), (B, m_2), (C, m_3)를 생각하자. $m_1=p-b$, $m_2=p-a$라 놓으면, 지렛대 원리에 의해 점 Z는 선분 AB의 무게중심이 된다. 한편 점 X가 선분 BC의 무게중심이 되려면, 지렛대 원리에 의해 등식 $\frac{m_2}{m_3}=\frac{\mathrm{XC}}{\mathrm{BX}}$가 성립해야 한다. $m_3=\frac{(p-b)(p-a)}{(p-c)}$라 놓으면, $\frac{m_2}{m_3}=\frac{(p-a)}{\frac{(p-b)(p-a)}{(p-c)}}=\frac{p-c}{p-b}=\frac{\mathrm{XC}}{\mathrm{BX}}$가 성립한다. 그러므로 점 X가 선분 BC의 무게중심이 된다. 이제 점 Y가 선분 AC의 무게중심이 되는지를 확인하자. $\frac{m_1}{m_3}=\frac{(p-b)}{\frac{(p-b)(p-a)}{(p-c)}}=\frac{p-c}{p-a}=\frac{\mathrm{YC}}{\mathrm{AY}}$가 성립하며, 점 Y는 선분 AC의 무게중심이다. 이로부터 선분 AX, BY, CZ이 한 점에서 교차한다는 것을 알 수 있으며, Gergonne 점의 존재성이 증명된다.

한편 세 선분 AX, BY, CZ의 교점을 T라 하자. 점 X가 질량점 $(B, p-a)$, $\left(C, \frac{(p-b)(p-a)}{(p-c)}\right)$, 점 Y가 질량점 $(A, p-b)$, $\left(C, \frac{(p-b)(p-a)}{(p-c)}\right)$, 점 Z가 질량점 $(A, p-b)$, $(B, p-a)$의 무게중심이므로, T는 세 질량점 $(A, p-b)$, $(B, p-a)$, $\left(C, \frac{(p-b)(p-a)}{(p-c)}\right)$의 무게중심이 된다.

(2) Gergonne 점의 딸림점들의 존재성

Efremov(1902)는 Gergonne 점의 세 딸림점(adjoint point)을 정의하였다. 삼각형 ABC의 변들에 각각 접하는 세 방접원을 생각하자. 방접원과 변 BC의 접점을 X_1, 변 AB, AC의 연장선과의 접점 Z_1, Y_1라 하자. 한편 방접원과 변 AC, AB의 접점을 각각 Y_2, Z_3라 하고, 유사한 방법으로 X_2, Z_2, X_3, Y_3를 정의하자(그림 2). 그러면 직선 AX_1, BY_1, CZ_1은 한 점에서 교차하며, 직선 AX_2, BY_2, CZ_2, 직선 AX_3, BY_3, CZ_3도 각각 한 점에서 교차하게 된다. 이들 교점을 각각 T_1, T_2,

T_3라 하면, T_1, T_2, T_3를 삼각형 ABC에 대한 Gergonne 점의 딸림점이라 부른다.



<그림 2>

Efremov는 삼각형 ABC에 대한 Gergonne 점의 딸림점들의 존재성에 대한 증명, 즉 직선 AX_1, BY_1, CZ_1, 직선 AX_2, BY_2, CZ_2, 직선 AX_3, BY_3, CZ_3가 각각 T_1, T_2, T_3에서 교차한다는 것에 대한 증명을 제시하지 않았지만, 본 연구에서는 이를 지렛대 원리를 이용하여 증명할 것이다.

우선 T_1의 존재성을 보이자. 이를 위해, 점 X_1, Y_1, Z_1이 선분 BC, AC, AB의 무게중심이 되도록 A, B, C에 적당한 질량을 놓을 수 있다는 것을 보이면 된다. <그림 2>에서 점 Z_1이 선분 AB의 B방향의 연장선에 속하므로, 점 A에 음인 무게를[2], 점 B에 양인 질량을 놓으면, 점 Z_1이 무게중심이 되도록 할 수 있다. 질량점 (A, m_1), (B, m_2)을 결정하기 위해, 선분 AZ_1, BZ_1의 길이를 p, $AB=c$, $BC=a$, $AC=b$를 이용하여 나타내자. $BX_1=BZ_1$, $CX_1=CY_1$이며 $AZ_1=AY_1$이므로, $AZ_1=AY_1=p$가 된다. 이로부터 $BZ_1=p-c$가 얻어진다.

이제 $m_1=-(p-c)=c-p$, $m_2=p$라 놓으면, 점 Z_1이 질량점 (A, $c-p$), (B, p)의 무게중심이 된다는 것을 보이자. 이를 위해 $m_1\overrightarrow{Z_1A}+m_2\overrightarrow{Z_1B}=\vec{0}$, 즉 $(c-p)\overrightarrow{Z_1A}+p\overrightarrow{Z_1B}=\vec{0}$이 됨을 보이자. 식 $(c-p)\overrightarrow{Z_1A}+p\overrightarrow{Z_1B}$에 $\overrightarrow{Z_1A}=\overrightarrow{Z_1B}+\overrightarrow{BA}$를 대입하면, $c(\overrightarrow{Z_1B}+\overrightarrow{BA})-p\overrightarrow{BA}=c\overrightarrow{Z_1A}-p\overrightarrow{BA}$가 된다. 그런데 $\dfrac{AB}{AZ_1}=\dfrac{c}{p}$이므로, $c\overrightarrow{Z_1A}=p\overrightarrow{BA}$가 된다. 결국 $(c-p)\overrightarrow{Z_1A}+p\overrightarrow{Z_1B}=c\overrightarrow{Z_1A}-p\overrightarrow{BA}=\vec{0}$이 성립한다. 이로부터 점 Z_1은 질량점 (A, $c-p$), (B, p)의 무게중심이 된다

2) 음의 무게를 가진 질량점들에 대한 논의는 한인기(2008)에 제시되어 있음.

는 것을 알 수 있다.

<그림 2>에서 선분 BX_1과 X_1C의 길이를 구하여, 점 X_1이 선분 BC의 무게중심, 즉 질량점 (B, p), (C, m_3)의 무게중심이 되도록 m_3를 구하자. $BZ_1=p-c$이고, $BX_1=BZ_1$이므로, $BZ_1=p-c$이다. 그리고 $CX_1=CY_1$, $AY_1=p$이므로, $CX_1=p-b$이다. 지렛대 원리에 의해 $\frac{m_3}{p}=\frac{p-c}{p-b}$이므로, $m_3=\frac{p(p-c)}{p-b}$로 잡으면, 점 X_1이 선분 BC의 무게중심이 된다.

이제 점 Y_1이 선분 AC의 무게중심, 즉 질량점 (A, $c-p$), (C, m_3)의 무게중심임을 보이자(단, $m_3=\frac{p(p-c)}{p-b}$임). 이를 위해 $(c-p)\overrightarrow{Y_1A}+m_3\overrightarrow{Y_1C}=\vec{0}$, 즉 $(c-p)\overrightarrow{Y_1A}+\frac{p(p-c)}{p-b}\overrightarrow{Y_1C}=\vec{0}$임을 보이자. 등식 $\frac{CA}{Y_1A}=\frac{b}{p}$이 성립하므로, $\overrightarrow{Y_1A}=\frac{p}{b}\overrightarrow{CA}$이고, $(c-p)\overrightarrow{Y_1A}+\frac{p(p-c)}{p-b}\overrightarrow{Y_1C}$ $=\frac{p(c-p)}{b}\overrightarrow{CA}+\frac{p(p-c)}{p-b}\overrightarrow{Y_1C}$가 된다. 한편 $\frac{Y_1C}{CA}=\frac{p-b}{b}$이므로, $\overrightarrow{Y_1C}=\frac{(p-b)}{b}\overrightarrow{CA}$이다. 결국 $\frac{p(c-p)}{b}\overrightarrow{CA}+\frac{p(p-c)}{p-b}\overrightarrow{Y_1C}=\frac{p(c-p)}{b}\overrightarrow{CA}+\frac{p(p-c)}{p-b}\cdot\frac{(p-b)}{b}\overrightarrow{CA}=\frac{p(c-p)}{b}\overrightarrow{CA}$ $+\frac{p(p-c)}{b}\overrightarrow{CA}=\vec{0}$가 된다. 얻어진 등식 $m_1\overrightarrow{Y_1A}+m_3\overrightarrow{Y_1C}=\vec{0}$으로부터 점 Y_1이 질량점 (A, m_1), (C, m_3)의 무게중심임을 알 수 있다.

결국 점 X_1, Y_1, Z_1이 선분 BC, AC, AB의 무게중심이 되도록 A, B, C에 $m_1=c-p$, $m_2=p$, $m_3=\frac{p(p-c)}{p-b}$를 놓을 수 있으므로, 직선 AX_1, BY_1, CZ_1가 T_1에서 교차한다는 것을 알 수 있다. 한편 T_1은 세 질량점 $(A, c-p)$, (B, p), $\left(C, \frac{p(p-c)}{p-b}\right)$의 무게중심이 된다.

이제 삼각형 ABC에 대한 Gergonne 점의 다른 딸림점 T_2, T_3의 존재에 대해 살펴보자. 이를 위해, 직선 AX_2, BY_2, CZ_2이 점 T_2에서 교차하며, 직선 AX_3, BY_3, CZ_3이 점 T_3에서 교차한다는 것을 증명하면 된다. 이들 명제의 증명은 직선 AX_1, BY_1, CZ_1가 점 T_1에서 교차한다는 것과 유사한 방법으로 얻어질 수 있다. 딸림점 T_2, T_3의 존재성을 증명하는 과정에서 사용되는 질량점 (A, m_1), (B, m_2), (C, m_3)는 <표 1>과 같다.

	$(A,\ m_1)$	$(B,\ m_2)$	$(C,\ m_3)$
T_2	$\left(A, \frac{p(p-a)}{p-c}\right)$	$(B, a-p)$	(C, p)
T_3	(A, p)	$\left(B, \frac{p(p-b)}{p-a}\right)$	$(C, b-p)$

<표 1> 삼각형 ABC의 꼭지점에 놓인 질량점들

한편 딸림점 T_2는 질량점 $\left(A, \dfrac{p(p-a)}{p-c}\right)$, $(B, a-p)$, (C, p), T_3는 질량점 (A, p), $\left(B, \dfrac{p(p-b)}{p-a}\right)$, $(C, b-p)$의 무게중심이다. 살펴본 바와 같이, 본 연구에서는 삼각형에 대한 Gergonne 점, Gergonne 점의 딸림점 T_1, T_2, T_3의 존재성을 지렛대 원리를 이용하여 증명하였다.

3. Gergonne 점과 딸림점들의 성질

Gergonne 점 T에 관련된 선분들의 비의 곱에 관련된 등식 $\dfrac{AT}{XT}\cdot\dfrac{BT}{YT}\cdot\dfrac{CT}{ZT}=\dfrac{4R}{r}$이 알려져 있다. 본 연구에서는 이 등식을 지렛대 원리를 이용하여 새롭게 증명할 것이다. 그리고 등식 $\dfrac{AT}{XT}\cdot\dfrac{BT}{YT}\cdot\dfrac{CT}{ZT}=\dfrac{4R}{r}$을 Gergonne 점의 딸림점들에 대해 유추하여, $\dfrac{AT}{XT}\cdot\dfrac{BT}{YT}\cdot\dfrac{CT}{ZT}=\dfrac{4R}{r}$과 유사한 새로운 등식을 유도하고 이를 지렛대 원리를 이용하여 증명할 것이다.

(1) Gergonne 점의 성질

Efremov(1902)는 등식 $\dfrac{AT}{XT}\cdot\dfrac{BT}{YT}\cdot\dfrac{CT}{ZT}=\dfrac{4R}{r}$을 제시하고, 이를 Menelaus 정리를 이용하여 증명하였다. 본 연구에서는 등식 $\dfrac{AT}{XT}\cdot\dfrac{BT}{YT}\cdot\dfrac{CT}{ZT}=\dfrac{4R}{r}$을 지렛대 원리를 이용하여 증명할 것이다.

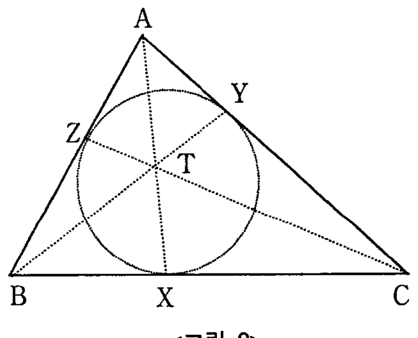
성질 1. 삼각형 ABC에 대한 Gergonne 점을 T, 삼각형 ABC의 내접원의 반지름을 r, 외접원의 반지름을 R, 내접원과 변 AB, BC, AC의 접점을 Z, X, Y라 하자(그림 3). 그러면 다음 등식이 성립한다.

$$\frac{AT}{XT}\cdot\frac{BT}{YT}\cdot\frac{CT}{ZT}=\frac{4R}{r}$$

증명. Gergonne 점의 증명과정에서 T는 질량점 $(A, p-b)$, $(B, p-a)$, $\left(C, \dfrac{(p-b)(p-a)}{(p-c)}\right)$의 무게중심이 된다는 것을 알았다. 그리고 점 X는 $(B, p-a)$, $\left(C, \dfrac{(p-b)(p-a)}{(p-c)}\right)$의 무게중심이므로, 점 T는 $(A, p-b)$, $\left(X, (p-a)+\dfrac{(p-b)(p-a)}{(p-c)}\right)$의 무게중심이다(그림 3). 그러므로 지렛대 원리에 의해, 다음 등식이 성립한다.

$$\frac{AT}{XT}=\frac{(p-a)+\frac{(p-b)(p-a)}{(p-c)}}{(p-b)}=\frac{(p-a)(p-c)+(p-b)(p-a)}{(p-b)(p-c)}=\frac{a(p-a)}{(p-b)(p-c)}$$

한편 유사한 방법으로 $\frac{BT}{YT}=\frac{(p-b)+\frac{(p-b)(p-a)}{(p-c)}}{(p-a)}=\frac{(p-b)(p-c)+(p-b)(p-a)}{(p-a)(p-c)}$ $=\frac{b(p-b)}{(p-a)(p-c)}$, $\frac{CT}{ZT}=\frac{(p-b)+(p-a)}{\frac{(p-b)(p-a)}{(p-c)}}=\frac{(p-c)((p-b)+(p-a))}{(p-b)(p-a)}=\frac{c(p-c)}{(p-a)(p-b)}$가 성립함을 알 수 있다. 이제 $\frac{AT}{XT}\cdot\frac{BT}{YT}\cdot\frac{CT}{ZT}$에 얻어진 등식들을 대입하면, $\frac{AT}{XT}\cdot\frac{BT}{YT}\cdot\frac{CT}{ZT}$ $=\frac{abc}{(p-a)(p-b)(p-c)}$가 된다. 그런데 삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면, $S=\frac{abc}{4R}$, 즉 $abc=4RS$이 성립하며, Heron 공식에 의해 $(p-a)(p-b)(p-c)=\frac{S^2}{p}$이 얻어진다. 이로부터 $\frac{abc}{(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{4RS}{\frac{S^2}{p}}=\frac{4Rp}{S}$가 된다. 그런데 $S=pr$이므로, $\frac{AT}{XT}\cdot\frac{BT}{YT}\cdot\frac{CT}{ZT}$ $=\frac{abc}{(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{4R}{r}$이 증명된다. □



<그림 3>

살펴본 증명과정에서는 선분 AX, BY, CZ의 내분점 T에 대해 지렛대 원리를 이용하여, 비 $\frac{AT}{XT}$, $\frac{BT}{YT}$, $\frac{CT}{ZT}$을 각각 구하고, 이들을 곱하여 증명하려는 등식을 얻었다.

(2) Gergonne 점의 딸림점들의 성질

Gergonne 점의 딸림점들 T_1, T_2, T_3에 대해서는 존재성을 제외하고는 아직 알려진 것이 거의 없다. 본 연구에서는 성질 1과 유사한 등식을 T_1, T_2, T_3에 대해 추측하고, 이를 지렛대 원리를 이

용하여 증명할 것이다.

삼각형 ABC에 대한 Gergonne 점의 딸림점 T_1, T_2, T_3는 각각 질량점 $(A, c-p)$, (B, p), $\left(C, \frac{p(p-c)}{p-b}\right)$, 질량점 $\left(A, \frac{p(p-a)}{p-c}\right)$, $(B, a-p)$, (C, p), 질량점 (A, p), $\left(B, \frac{p(p-b)}{p-a}\right)$, $(C, b-p)$의 무게중심이므로, 지렛대 원리를 이용하면 성질 2를 얻을 수 있다.

성질 2. 삼각형 ABC에 대한 Gergonne 점의 딸림점 T_1에 대해, 다음 등식이 성립한다.

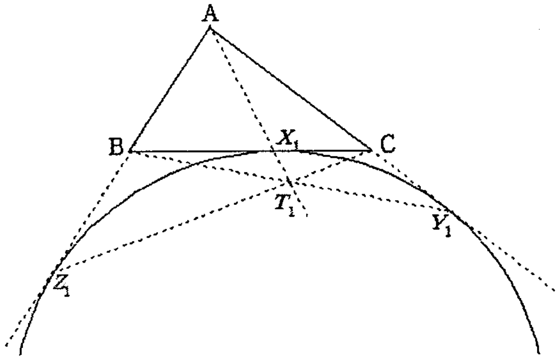
$$\frac{AT_1}{T_1X_1}\cdot\frac{BT_1}{T_1Y_1}\cdot\frac{CT_1}{T_1Z_1}=\frac{abc}{p(p-b)(c-p)}$$

증명. 삼각형 ABC에 대한 Gergonne 점의 딸림점 T_1은 질량점 $(A, c-p)$, (B, p), $\left(C, \frac{p(p-c)}{p-b}\right)$의 무게중심이다(그림 4). 그리고 X_1은 질량점 (B, p), $\left(C, \frac{p(p-c)}{p-b}\right)$의 무게중심이므로, 지렛대 원리에 의해 $\frac{AT_1}{T_1X_1}=\frac{p+\frac{p(p-c)}{p-b}}{c-p}=\frac{ap}{(c-p)(p-b)}$이다. 한편 Y_1, Z_1은 각각 질량점 $(A, c-p)$, $\left(C, \frac{p(p-c)}{p-b}\right)$, 질량점 $(A, c-p)$, (B, p)의 무게중심이므로, $\frac{BT_1}{T_1Y_1}=\frac{(c-p)+\frac{p(p-c)}{p-b}}{p}=\frac{b(p-c)}{p(p-b)}$, $\frac{CT_1}{T_1Z_1}=\frac{c}{\frac{p(p-c)}{p-b}}=\frac{c(p-b)}{p(p-c)}$가 됨을 알 수 있다. 이들을 구하는 식에 대입하면,

$$\frac{AT_1}{T_1X_1}\cdot\frac{BT_1}{T_1Y_1}\cdot\frac{CT_1}{T_1Z_1}=\frac{ap}{(c-p)(p-b)}\cdot\frac{b(p-c)}{p(p-b)}\cdot\frac{c(p-b)}{p(p-c)}=\frac{abc}{p(p-b)(c-p)}$$

가 증명된다. □

성질 2의 등식 $\frac{AT_1}{T_1X_1}\cdot\frac{BT_1}{T_1Y_1}\cdot\frac{CT_1}{T_1Z_1}=\frac{abc}{p(p-b)(c-p)}$에서 한 가지 주목할 것은 $c-p<0$이므로 $\frac{AT_1}{T_1X_1}\cdot\frac{BT_1}{T_1Y_1}\cdot\frac{CT_1}{T_1Z_1}<0$이 된다는 것이다. 이것은 <그림 4>에서 T_1이 선분 BY_1, CZ_1의 내분점이지만, 선분 AX_1에 대해서는 외분점이라는 것으로부터 기인한다.

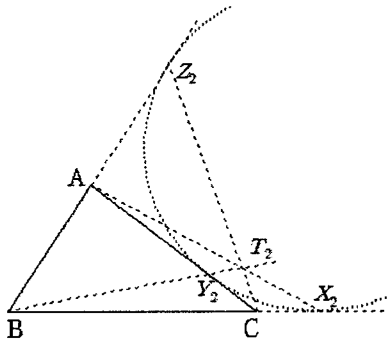


<그림 4>

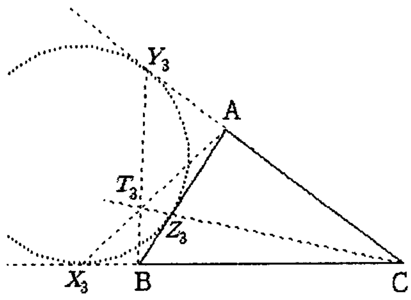
Gergonne 점의 딸림점 T_2, T_3에 대해 성질 2와 유사한 등식들을 생각할 수 있다. <그림 5>는 T_2에 관련된 것이고, <그림 6>은 T_3에 대한 것이다. <표 1>을 이용하면, 성질 2와 유사한 T_2, T_3에 대한 등식들 <표 2>를 얻을 수 있으며, 이들의 증명은 성질 2의 증명과 유사하다.

딸림점	등식
T_2	$\frac{AT_2}{T_2X_2}\cdot\frac{BT_2}{T_2Y_2}\cdot\frac{CT_2}{T_2Z_2}=\frac{abc}{p(a-p)(p-c)}$
T_3	$\frac{AT_3}{T_3X_3}\cdot\frac{BT_3}{T_3Y_3}\cdot\frac{CT_3}{T_3Z_3}=\frac{abc}{p(b-p)(p-a)}$

<표 2> 딸림점 T_2, T_3에 대한 등식들



<그림 5>



<그림 6>

성질 3. 삼각형 ABC에 대한 Gergonne 점의 딸림점 T_1, 외접원의 반지름 R, 변 BC에 접하는 방접원의 반지름 r_a에 대해, 다음 등식이 성립한다.

$$\frac{AT_1}{T_1X_1}\cdot\frac{BT_1}{T_1Y_1}\cdot\frac{CT_1}{T_1Z_1}=-\frac{4R}{r_a}$$

증명. 등식 $\frac{AT_1}{T_1X_1} \cdot \frac{BT_1}{T_1Y_1} \cdot \frac{CT_1}{T_1Z_1} = \frac{abc}{p(p-b)(c-p)}$에 $S = \frac{abc}{4R}$와 Heron 공식을 사용하면, 다음을 얻을 수 있다.

$$\frac{AT_1}{T_1X_1} \cdot \frac{BT_1}{T_1Y_1} \cdot \frac{CT_1}{T_1Z_1} = \frac{abc}{p(p-b)(c-p)} = -\frac{4RS(p-a)}{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$
$$= -\frac{4RS(p-a)}{S^2} = -\frac{4R(p-a)}{S}$$

그런데 $S = r_a(p-a)$이므로3), $p-a = \frac{S}{r_a}$가 된다. 이것을 위의 등식에 대입하면, 구하는 등식 $\frac{AT_1}{T_1X_1} \cdot \frac{BT_1}{T_1Y_1} \cdot \frac{CT_1}{T_1Z_1} = -\frac{4R}{r_a}$이 증명된다. □

성질 3의 증명과정에서 사용한 등식 $S = r_a(p-a)$을 변 AC, AB에 접하는 방접원의 반지름 r_b, r_c에 대해, $S = r_b(p-b)$, $S = r_c(p-c)$와 같이 쓸 수 있다. 이제 <표 2>를 이용하면, 딸림점 T_2, T_3에 대해 성질 3과 유사한 등식을 <표 3>과 같이 얻을 수 있다. 이들의 증명은 성질 3의 증명과 유사하다.

딸림점	등식
T_2	$\frac{AT_2}{T_2X_2} \cdot \frac{BT_2}{T_2Y_2} \cdot \frac{CT_2}{T_2Z_2} = -\frac{4R}{r_b}$
T_3	$\frac{AT_3}{T_3X_3} \cdot \frac{BT_3}{T_3Y_3} \cdot \frac{CT_3}{T_3Z_3} = -\frac{4R}{r_c}$

<표 3> 딸림점 T_2, T_3에 대한 등식들

4. 결 론

본 연구에서는 지렛대 원리를 이용하여 삼각형의 Gergonne 점과 딸림점들의 존재성, Gergonne 점에 관련된 등식을 증명하고, 이를 바탕으로 Gergonne 점의 딸림점들에 대한 새로운 등식을 추측하고 증명하였다.

삼각형 ABC의 변 AB, BC, AC와 내접원의 접점 Z, X, Y에 대해 직선 AX, BY, CZ의 교점이 삼각형 ABC의 Gergonne 점이다. 본 연구에서는 Gergonne 점의 존재성을 보이기 위해, 세 선분(직선) AX, BY, CZ가 한 점에서 교차하기 위한 충분조건인 '점 X, Y, Z가 선분 BC, AC, AB의 무게중심이

3) 이 등식에 대한 증명은 김경선 · 한인기(2007)에 제시되어 있음.

되도록 A, B, C에 적당한 질량을 놓을 수 있다'는 것을 이용하였다. 삼각형 ABC의 꼭지점에 질량점 $(A, p-b)$, $(B, p-a)$, $\left(C, \frac{(p-b)(p-a)}{(p-c)}\right)$을 놓으면, 점 X, Y, Z가 선분 BC, AC, AB의 무게중심이 된다는 것을 보였고, 이로부터 Gergonne 점 T의 존재성을 증명하였다.

Gergonne 점의 딸림점들에 대해서도 Gergonne 점의 존재성 증명과 유사하게, 지렛대 원리를 이용하여 증명하였다. 직선 AX_1, BY_1, CZ_1이 한 점 T_1에서 교차한다는 것을 보이기 위해, 즉 딸림점 T_1의 존재를 보이기 위해 질량점 $(A, c-p)$, (B, p), $\left(C, \frac{p(p-c)}{p-b}\right)$을 이용하였으며, 딸림점 T_2는 질량점 $\left(A, \frac{p(p-a)}{p-c}\right)$, $(B, a-p)$, (C, p)를, 딸림점 T_3는 질량점 (A, p), $\left(B, \frac{p(p-b)}{p-a}\right)$, $(C, b-p)$를 이용하여 증명하였다.

한편 Gergonne 점 T에 대해 등식 $\frac{AT}{XT} \cdot \frac{BT}{YT} \cdot \frac{CT}{ZT} = \frac{4R}{r}$이 알려져 있다. 본 연구에서는 이 등식을 지렛대 원리를 이용한 새로운 증명을 찾았다. 그리고 Gergonne 점의 딸림점 T_1에 대해 등식 $\frac{AT_1}{T_1X_1} \cdot \frac{BT_1}{T_1Y_1} \cdot \frac{CT_1}{T_1Z_1} = \frac{abc}{p(p-b)(c-p)}$, $\frac{AT_1}{T_1X_1} \cdot \frac{BT_1}{T_1Y_1} \cdot \frac{CT_1}{T_1Z_1} = -\frac{4R}{r_a}$을 증명하였다. 딸림점 T_2에 대해서는 $\frac{AT_2}{T_2X_2} \cdot \frac{BT_2}{T_2Y_2} \cdot \frac{CT_2}{T_2Z_2} = \frac{abc}{p(a-p)(p-c)}$, $\frac{AT_2}{T_2X_2} \cdot \frac{BT_2}{T_2Y_2} \cdot \frac{CT_2}{T_2Z_2} = -\frac{4R}{r_b}$, 딸림점 T_3에 대해서는 $\frac{AT_3}{T_3X_3} \cdot \frac{BT_3}{T_3Y_3} \cdot \frac{CT_3}{T_3Z_3} = \frac{abc}{p(b-p)(p-a)}$, $\frac{AT_3}{T_3X_3} \cdot \frac{BT_3}{T_3Y_3} \cdot \frac{CT_3}{T_3Z_3} = -\frac{4R}{r_c}$를 증명하였다.

본 연구의 결과를 통해, 지렛대 원리를 이용한 새로운 증명방법들, Gergonne 점의 딸림점들에 대한 새로운 성질들, Gergonne 점과 Gergonne 점의 딸림점들의 유사성을 인식할 수 있을 것으로 기대된다.

참고문헌

김경선 · 한인기 (2007). 삼각형의 방접원 및 사면체의 방접구에 관련된 다양한 성질 탐구, 한국수학교육학회 시리즈 E <수학교육 논문집> **21(3)**, pp.385-406.

도종훈 (2007). 평면도형 탐구의 기본 요소로서 삼각형의 재조명, 한국수학교육학회 시리즈 A <수학교육> **46(4)**, pp.493-502.

최영기 · 홍갑주 (2006). 유클리드 기하의 고유한 성질로서의 삼각형 넓이 공식에 대한 재음미, 한국수학교육학회 시리즈 A <수학교육> **45(3)**, pp.367-373.

한인기(2008). 지렛대 원리를 이용한 삼각형의 각의 이등분선, 수선, 외심의 성질 탐구, 한국수학교육학회 시리즈 E <수학교육 논문집> **22(1)**, pp.27-39.

한인기・홍동화 (2006). 지렛대 원리를 활용한 선분의 비에 관련된 도형 문제의 해결에 대한 연구, 한국수학교육학회 시리즈 E <수학교육 논문집> **20(4)**, pp.621-634.

한인기・신현용 (2002). 삼각형의 접기 활동과 논증의 연계 가능성에 관한 연구, 한국수학교육학회 시리즈 A <수학교육> **96(1)**, pp.79-90.

Court(1963). *College Geometry*, NY: Barnes & Noble.

Efremov(1902). *Novaya Geometriya Treurolnika*, Odessa: Shpentsera.

Myakishev(2002). *Elementy Geometrii Treugolika*, Moscow: MTsNMO.

A Study on Gergonne's Point and Its Adjoint Points of Triangle Using the Principle of the Lever

Han Inki
Gyeongsang National University, 660-701, Korea
inkiski@gsnu.ac.kr

In this paper we study Gergonne's point and its adjoint points of triangle using the principle of the lever. We prove existence of Gergonne's point and its adjoint points, suggest new proof method of a equality related with Gergonne's point. We find new equalities related with adjoint points of Gergonne's points, and prove these using the principle of the lever.

* ZDM Classification : D53
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D50
* Key Words : triangle, Gergonne's point, adjoint point, the principle of the lever