

시간 지연 연속 시간 퍼지 시스템에 대한 L_∞ -이득값 상태 궤환 제어

L_∞ -gained State Feedback Control for Continuous Fuzzy Systems with Time-Delay

이동환* · 주영훈** · 박진배*

Dong Hwan Lee*, Young Hoon Joo** and Jin Bae Park*

* 연세대학교 전기전자공학과

** 군산대학교 전자정보공학부

요 약

본 논문에서는 TS 퍼지 모델로 표현되는 시간 지연 비선형 시스템에 대한 L_∞ 이득 상태 궤환 퍼지 제어를 제안한다. 이 위해 먼저 TS 퍼지 모델을 이용하여 시간 지연 비선형 시스템을 모델링한다. 다음 이 퍼지 모델을 기본으로 L_∞ 이득을 얻기 위해 퍼지 상태 궤환 제어를 설계한다. 마지막으로 L_∞ 이득을 얻기 위한 충분조건을 유도한다. 충분조건은 선형 행렬 부등식의 형태로 공식화 한다. 마지막으로 몇 가지 예제를 통하여 제안된 제어기의 효율성을 증명한다.

키워드 : 시간 지연, L_∞ 이득, T-S 퍼지 모델, 비선형 시스템, 선형 행렬 부등식

Abstract

This paper introduces a L_∞ -gain state feedback fuzzy controller design for the time delay nonlinear system represented by Takagi-Sugeno(T-S) fuzzy model. First, the T-S fuzzy model is employed to represent the time delay nonlinear system. Next based on the fuzzy model, a fuzzy state feedback controller is developed to achieve L_∞ -gain performance. Finally, sufficient conditions are derived for L_∞ -gain performance. The sufficient conditions are formulated in the format of linear matrix inequalities (LMIs). The effectiveness of the proposed controller design methodology is finally demonstrated through numerical simulations.

Key Words : Time delay, L_∞ -gain, T-S fuzzy model, Nonlinear system, Linear matrix inequalities.

1. 서 론

산업현장에서 제어시스템의 응답 지연 현상과 지속적인 외란은 매우 빈번히 발생하는 현상이다. 특히 시간 지연 현상은 화학 공정 제어 시스템, 기압/수압 시스템, 응용 생물 시스템 및 인터넷 기반 가상실험 등의 문제에서는 반드시 고려하여야 할 사항이다. 따라서 이렇게 시간 지연과 지속적 외란이 발생하는 시스템의 안정성의 확보는 매우 중요한 문제이다.

먼저 지속적인 외란이 있는 비선형 시스템의 강인제어를 위하여 L_2 -이득값 (H_∞) 제어기 설계가 광범위하게 연구되었다 [1, 2, 3]. L_2 -이득값 제어는 외란의 에너지와 출력의 에너지의 비율을 최소화 한다. 이와 달리 L_∞ -이득값 (H_1)

제어는 외란의 상한과 출력의 상한의 비를 최소화 하는 것을 목적으로 한다. 최근에 L_∞ -이득값 제어기 설계 문제는 Takagi-Sugeno (T-S) 퍼지 모델 기반 L_∞ -이득값 제어기 설계로 확장 되었다[4]. 또한 시간 지연 시스템의 제어에 관한 연구는 현재까지 활발히 연구되고 있으며 선형 시스템을 대상으로한 광범위한 연구결과가 알려져 있다. Cao 등은 처음으로 시간 지연이 있는 비선형 시스템을 T-S 퍼지 모델로 표현하고 그에 대한 안정도 분석 방법을 제안하였다[5].

외란이 있는 시간 지연 시스템에 대한 강인제어 기법은 L_2 -이득값 제어기 설계의 관점에서 광범위하게 연구되었고 T-S 퍼지 모델 기반 설계기법으로 확장되었다 [6]. 하지만 아직까지 T-S 퍼지 모델 기반 L_∞ -이득값 제어기 설계가 시간 지연이 있는 비선형 시스템에 적용되어 있지 않다. 본 논문에서는 [4]에서 제시한 방법을 시간 지연이 있는 비선형 T-S 퍼지 시스템으로 확장하는 방법을 제안한다.

구체적으로, L_∞ -이득값 제어기를 설계하기 위하여 먼저 대상이 되는 시간 지연을 갖는 연속시간 비선형 시스템은 시간 지연을 갖는 연속시간 T-S 퍼지 모델로 표현 되어진다. 그 후, Lyapunov-Krasovskii 범함수 방법을 기반으로 페루프 T-S 퍼지 시스템의 L_∞ -이득값의 상한이 존재하는

접수일자 : 2008년 4월 7일

완료일자 : 2008년 6월 15일

본 연구는 2008년도 두뇌한국21사업과 산업자원부 전력 기반조성사업 센터의 고급인력양성사업을 통한 연세대학교 계통적용 신전력기기 연구센터의 지원으로 수행되었습니다.

T-S 퍼지 모델 기반 제어기의 충분조건은 선형 행렬 부등식 형태로 표현된다. 제시된 조건은 수치적인 최적화 알고리즘을 이용하여 매우 효율적으로 풀 수 있음을 보인다.

2. T-S 퍼지 모델

다음과 같은 시간 지연을 갖는 연속시간 비선형 시스템을 생각하자.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), x(t-\tau(t)), u(t)), \\ y(t) = h(x(t)), \\ x(t) = \phi(t), \quad t \in [-\tau_0, 0] \end{cases} \quad (1)$$

여기서 $x(t) \in R^n$ 는 상태 변수 벡터이며, $u(t) \in R^m$ 는 제어 입력이며, $\phi(t), t \in [-\tau_0, 0]$ 는 초기값이며, $\tau(t)$ 는 시간 지연이며 t 에 대해서 연속적이고 미분가능한 함수이고 아래의 조건을 만족한다.

$$\dot{\tau}(t) \leq \beta < 1, \quad 0 < \tau(t) \leq \tau_0 \quad (2)$$

여기서 β 와 τ_0 는 음이아닌 스칼라이다.

시간 지연을 갖는 연속시간 비선형 시스템 (1)은 식 (3)과 같은 시간 지연을 갖는 연속시간 T-S 퍼지 모델로 표현 가능하다.

Plant Rule i :

$$\begin{aligned} \text{IF } z_1(t) \text{ is } \Gamma_1^i \text{ and } \dots \text{ and } z_p(t) \text{ is } \Gamma_p^i \\ \text{THEN } \dot{x}(t) = A_i x(t) + A_{\tau_i} x(t-\tau(t)) + B_{u_i} u(t) + B_{w_i} w(t) \\ x(t) = \phi(t), \quad t \in [-\tau_0, 0] \end{aligned} \quad (3)$$

이때 $x(t) \in R^n$ 는 상태 변수 벡터, $u(t) \in R^m$ 는 제어 입력 벡터, $w(t) \in R^q$ 는 외란 벡터, $z_1(t), z_2(t), \dots, z_p(t)$ 전건부 변수, p 는 전건부 변수의 수, 규칙 i 는 i 번째 퍼지 규칙, Γ_j^i 는 i 번째 규칙에서 j 번째 전건부 변수의 퍼지 집합, r 은 IF-THEN 규칙 수, $A_i \in R^{n \times n}, A_{\tau_i} \in R^{n \times n}, B_{u_i} \in R^{n \times m}, B_{w_i} \in R^{n \times q}$ 는 상수 행렬, $\phi(t), t \in [-\tau_0, 0]$ 은 초기값, $\tau(t)$ 는 시간 지연이고 연속적이고 미분가능한 함수이며 식 (2)의 조건을 만족한다. 중심값-평균 비퍼지화, 곱셈추론, 싱글톤 퍼지화를 사용하면 퍼지 제어 규칙 (3)의 전역 동특성은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) [A_i x(t) + A_{\tau_i} x(t-\tau(t)) + B_{u_i} u(t) + B_{w_i} w(t)] \\ x(t) = \phi(t), \quad t \in [-\tau_0, 0] \end{aligned} \quad (4)$$

$$\text{여기서 } \mu_i(z(t)) = \prod_{j=1}^p \Gamma_j^i(z_j(t)), \quad h_i(z(t)) = \frac{\mu_i(z(t))}{\sum_{i=1}^r \mu_i(z(t))} \text{ 이}$$

며 $\Gamma_j^i(z_j(t))$ 는 j 번째 전건부 변수 $z_j(t)$ 의 퍼지 집합 Γ_j^i 에 대한 소속도를 나타낸다. 또한 아래의 부등식이 성립한다.

$$\mu_i(z(t)) \geq 0, \quad (i = 1, 2, \dots, r), \quad \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) > 0 \quad (5)$$

$$h_i(z(t)) \geq 0, \quad (i = 1, 2, \dots, r), \quad \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) = 1 \quad (6)$$

T S 퍼지 시스템 (4)를 제어하기 위해, PDC 기법 [7]

을 사용한 T-S 퍼지 제어 규칙은 다음과 같다.

Controller Rule i :

$$\begin{aligned} \text{IF } z_1(t) \text{ is } \Gamma_1^i \text{ and } \dots \text{ and } z_p(t) \text{ is } \Gamma_p^i \\ \text{THEN } u(t) = K_i x(t), \quad (i = 1, 2, \dots, r) \end{aligned} \quad (7)$$

여기서 K_i 는 i 번째 T-S 퍼지 규칙의 제어 이득이다. 플랜트의 퍼지 제어 규칙과 같은 방법을 사용하면 T-S 퍼지 제어 규칙 (7)의 전역 동특성은 다음과 같다.

$$u(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) K_i x(t) \quad (8)$$

(4)와 (8)을 합친 시스템은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) [G_{ij} x(t) + A_{\tau_{ij}} x(t-\tau(t)) + B_{w_{ij}} w(t)] \\ x(t) = \phi(t), \quad t \in [-\tau_0, 0] \end{aligned} \quad (9)$$

여기서 $G_{ij} = A_i + B_{u_i} K_j$ 이다.

L_∞ -이득값 성능을 만족하는 T-S 퍼지 제어기 설계 문제를 설명하기 이전에 몇 개의 정의가 필요하다.

정의 1 : T-S 퍼지 시스템 (4)가 주어지고 $x(t), w(t) \in L_\infty$ 일 때,

$$\|H\|_1 \equiv \sup_{t \in L} \frac{\|x(t)\|_\infty}{\|w(t)\|_\infty} \text{ 로 정의된다.}$$

여기서, $\|H\|_1$ 은 L_1 -놈 또는 L_∞ -이득 값이라 한다.

정의 2 : T-S 퍼지 시스템 (4)가 주어질 때 T-S 퍼지 제어 규칙 (7)에 의해 폐루프 T-S 퍼지 시스템 (9)가 주어질 외란 감쇄비 ρ , 주어진 η 와 초기값 $x(t) = \phi(t), t \in [-\tau_0, 0]$ 에 대하여 (10)을 만족하면 L_∞ -이득값 성능을 만족하는 제어기가 설계되었다고 한다.

$$\begin{aligned} \|x(t)\|_\infty \leq \eta \|x(0)\| + \lambda \sup_{t \in [-\tau_0, 0]} |\phi(t)| + \rho \|w(t)\|_\infty, \\ \forall w(t), \phi(t) \in L_\infty \end{aligned} \quad (10)$$

이때 ρ, λ 와 η 는 양의 실수이다.

참고 1 : 초기값 $x(t) = \phi(t) = 0, t \in [-\tau_0, 0]$ 를 가지거나 정상상태에서 식 (10) 식 (11) 또는 (12)가 된다.

$$\frac{\|x(t)\|_\infty}{\|w(t)\|_\infty} \leq \rho, \quad \forall w(t) \in L_\infty \quad (11)$$

$$\|x(t)\|_\infty \leq \rho \|w(t)\|_\infty, \quad \forall w(t) \in L_\infty \quad (12)$$

3. 시간 지연을 갖는 비선형 시스템의 L_∞ -이득값 퍼지 제어기 설계

본 절에서는 시간 지연이 있는 연속 시간 T-S 퍼지 시스템이 정의 2의 L_∞ -이득값 성능을 만족하도록 제어기를 설계할 것이다. 이때 제어기 설계의 충분 조건을 선형 행렬 부등식의 형태로 제시한다. 이러한 제어기 설계 조건을 유도하기 위하여 다음과 같은 보조 정리를 고려하자.

보조 정리 1 [9] : 만약 실수 스칼라 함수 $w(t)$ 가 다음의

미분 부등식 (a) 를 만족하면 (b) 가 성립한다.

$$(a) \dot{w}(t) \leq -\xi w(t) + \kappa v(t), \xi > 0, \kappa > 0, w(0) = w_0$$

$$(b) w(t) \leq e^{-\xi t} w(0) + \kappa \int_0^t e^{-\xi \tau} v(t-\tau) d\tau.$$

보조 정리 2 [8] : 주어진 적절한 차원의 상수 대칭 행렬 N, O , 와 적절한 차원의 행렬 L 이 주어질 때, 다음과 같은 두 개의 행렬 부등식은 상등이다.

$$(a) O > 0, N + L^T O L < 0,$$

$$(b) \begin{bmatrix} N & L^T \\ L & -O^{-1} \end{bmatrix} < 0 \text{ or } \begin{bmatrix} -O^{-1} L \\ L^T N \end{bmatrix} < 0$$

정리 1 : 선형 행렬 부등식 (16), (17), (18) 을 만족하는 양한정 대칭행렬 X, Y , 행렬 $M_i, X_{ij} (X_{ii}^T = X_{ii})$, ($i, j = 1, 2, \dots, r$), 양의 실수 c 와 실수 $\alpha > 1$ 가 존재하면, 연속 시간 T-S 퍼지 시스템 (4) 는 T-S 퍼지 제어기 (8) 을 통해서 $w(t) = 0$ 일 때 점근적으로 안정하며 $w(t) \neq 0$ 일 때 외란 감쇄비 ρ 로 식 (10) 에 주어진 L_∞ -이득값 성능을 만족한다. 여기서 $\rho = \sqrt{c/(\alpha \lambda_{\min}(P) + \beta \lambda_{\min}(S))}$ 이고 제어기 이득은 $K_i = M_i P$ 로 주어진다.

$$\Omega_{ii} < X_{ii} + X_{ii}^T, (i = j) \quad (16)$$

$$\Omega_{ij} + \Omega_{ji} < X_{ij} + X_{ij}^T, (i < j \leq r) \quad (17)$$

$$\begin{bmatrix} X_{11} & * & * & * \\ X_{21}^T & X_{22} & * & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ X_{r1}^T & X_{r2}^T & \dots & X_{rr} \end{bmatrix} < 0. \quad (18)$$

$$\Omega_{ij} = \begin{bmatrix} Herm(A_i X + B_{ui} M_i) + Y + \alpha X & * & * \\ X A_{ri}^T & -(1-\beta) Y & * \\ B_{wi}^T & 0 & -cI \end{bmatrix}. \quad (19)$$

여기서 $X = P^{-1}, Y = P^{-1} S P^{-1}, M_i = K_i P^{-1}$ 이다.

증명 : 다음과 같은 Laypunov-Krasovskii 범함수를 고려하자.

$$V(x(t)) = x^T(t) P x(t) + \int_{t-\tau(t)}^t x^T(\alpha) S x(\alpha) d\alpha \quad (20)$$

여기서 $P > 0, S > 0$ 를 가정한다. 다음과 같은 부등식을 고려하자.

$$\dot{\mathcal{J}}(t) = \dot{V}(x(t)) + \alpha x^T(t) P x(t) - c w^T(t) w(t) < 0 \quad (21)$$

부등식 (21) 이 만족될 때, 외란 감쇄비 $\rho = \sqrt{c/(\alpha \lambda_{\min}(P) + \beta \lambda_{\min}(S))}$ 로 (10) 에 주어진 L_∞ -이득값 성능을 만족함을 보이자.

식 (21)에 초기조건과 식 (20)을 적용하면, 다음의 결과를 얻는다.

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{J}}(t) &\leq \dot{x}^T(t) P x(t) + x(t) P \dot{x}(t) + x^T(t) S x(t) \\ &\quad - (1-\beta) x^T(t-\tau(t)) S x(t-\tau(t)) \\ &\quad + \alpha x^T(t) P x(t) - c w^T(t) w(t) \\ &< 0 \end{aligned} \quad (22)$$

부등식 (22) 로부터 다음의 결과를 얻는다.

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} |P^{1/2} x(t)|^2 \\ &< \alpha |P^{1/2} x(t)|^2 + c |w(t)|^2 \\ &\quad + (1-\beta) |S^{1/2} x(t-\tau(t))|^2 - |S^{1/2} x(t)|^2 \end{aligned} \quad (23)$$

여기서 $|P^{1/2} x(t)|^2 = x^T(t) P x(t)$ 를 의미한다.

보조 정리1을 부등식 (23)에 적용하면 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$\begin{aligned} &|P^{1/2} x(t)|^2 \\ &< \exp(-\alpha t) |P^{1/2} x(0)|^2 \\ &\quad + c \int_0^t \exp(-\alpha \phi) |w(t-\phi)|^2 d\phi \\ &\quad + (1-\beta) \int_0^t \exp(-\alpha \phi) |S^{1/2} x(t-\phi-\tau(t-\phi))|^2 d\phi \\ &\quad - \int_0^t \exp(-\alpha \phi) |S^{1/2} x(t-\phi)|^2 d\phi \\ &\leq s u p_{\phi \in [0,t]} [\exp(-\alpha t) |P^{1/2} x(0)|^2 \\ &\quad + c |w(t-\phi)|^2 \int_0^t \exp(-\alpha \phi) d\phi \\ &\quad + (1-\beta) |S^{1/2} x(t-\phi-\tau(t-\phi))|^2 \int_0^t \exp(-\alpha \phi) d\phi \\ &\quad - |S^{1/2} x(t)|^2] \\ &\leq s u p_{\phi \in [0,t]} [\exp(-\alpha t) |P^{1/2} x(0)|^2 \\ &\quad + \frac{c}{\alpha} |w(t-\phi)|^2 (1 - \exp(-\alpha t)) \\ &\quad + \frac{(1-\beta)}{\alpha} |S^{1/2} x(t-\phi-\tau(t-\phi))|^2 (1 - \exp(-\alpha t))] \\ &\quad - \frac{1}{\alpha} |S^{1/2} x(t)|^2 \end{aligned}$$

위의 결과로부터 다음의 결과를 얻는다.

$$\begin{aligned} &\lambda_{\min}(P) |x(t)|^2 \\ &\leq s u p_{\phi \in [0,t]} [\exp(-\alpha t) |P^{1/2} x(0)|^2 \\ &\quad + \frac{c}{\alpha} |w(t-\phi)|^2 (1 - \exp(-\alpha t)) \\ &\quad + \frac{(1-\beta)}{\alpha} |S^{1/2} x(t-\phi-\tau(t-\phi))|^2 (1 - \exp(-\alpha t))] \\ &\quad - \frac{1}{\alpha} |S^{1/2} x(t)|^2 \end{aligned} \quad (24)$$

부등식 (24)의 양변에 $s u p_{t \in [0,\infty)}$ 를 취하면, 다음의 결과를 얻는다.

$$\begin{aligned} &s u p_{t \in [0,\infty)} \lambda_{\min}(P) |x(t)|^2 \\ &\leq |P^{1/2} x(0)|^2 \\ &\quad + \frac{c}{\alpha} s u p_{t \in [0,\infty)} |w(t)|^2 \\ &\quad + \frac{(1-\beta)}{\alpha} s u p_{t \in [0,\infty)} |S^{1/2} x(t-\tau(t))|^2 \\ &\quad - \frac{1}{\alpha} s u p_{t \in [0,\infty)} |S^{1/2} x(t)|^2 \end{aligned} \quad (25)$$

초기조건과 식 (3)에 의해 다음의 결과를 얻는다.

$$\begin{aligned} & \sup_{t \in [0, \infty)} |S^{1/2}x(t-\tau(t))|^2 \\ & \leq \sup_{t \in [0, \infty)} |S^{1/2}x(t)|^2 + \sup_{t \in [-\tau_0, 0)} |S^{1/2}\phi(t)|^2 \end{aligned} \quad (26)$$

식 (26)을 식 (25)에 적용하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \lambda_{\min}(P) \|x(t)\|_\infty^2 \\ & \leq \lambda_{\max}(P) |x(0)|^2 + \frac{c}{\alpha} \|w(t)\|_\infty^2 \\ & \quad - \frac{\beta}{\alpha} \lambda_{\min}(S) \|x(t)\|_\infty^2 \\ & \quad + \left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right) \lambda_{\max}(S) \sup_{t \in [-\tau_0, 0)} |\phi(t)|^2 \\ \|x(t)\|_\infty^2 & \leq \left[\frac{\alpha \lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P) + \beta \lambda_{\min}(S)} \right] |x(0)|^2 \\ & \quad + \left[\frac{(1-\beta) \lambda_{\max}(S)}{\alpha \lambda_{\min}(P) + \beta \lambda_{\min}(S)} \right] \sup_{t \in [-\tau_0, 0)} |\phi(t)|^2 \\ & \quad + \left[\frac{c}{\alpha \lambda_{\min}(P) + \beta \lambda_{\min}(S)} \right] \|w(t)\|_\infty^2 \end{aligned}$$

간단한 조작을 통해 모든 $w(t), \phi(t) \in L_\infty$ 에 대하여 부등식 (27)이 성립한다.

$$\begin{aligned} \|x(t)\|_\infty & \leq \sqrt{\frac{\alpha \lambda_{\max}(P)}{\alpha \lambda_{\min}(P) + \beta \lambda_{\min}(S)} |x(0)|^2} \\ & \quad + \sqrt{\frac{(1-\beta) \lambda_{\max}(S)}{\alpha \lambda_{\min}(P) + \beta \lambda_{\min}(S)} \sup_{t \in [-\tau_0, 0)} |\phi(t)|^2} \\ & \quad + \sqrt{\frac{c}{\alpha \lambda_{\min}(P) + \beta \lambda_{\min}(S)} \|w(t)\|_\infty^2} \end{aligned} \quad (27)$$

따라서 식 (10)에 주어진 L_∞ -이득값 성능을 만족한다.

다음으로 페루프 T-S 퍼지 시스템 (9)와 Laypunov-Krasovskii 범함수 (20), 어떤 실수 $\alpha > 1$ 와 양의 실수 c 가 식 (22)를 만족하는 충분조건이 식 (16)-(18) 이라는 것을 보인다.

식 (8)을 식 (22)에 대입하고 간단한 계산을 통하여 다음의 결과를 얻는다.

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) \xi(t)^T \Psi_{ij} \xi(t) < 0. \quad (28)$$

여기서, $\xi(t) = [x(t) \ x(t-\tau(t)) \ w(t)]^T$,

$$\Psi_{ij} = \begin{bmatrix} \text{Herm}(PA_i + PB_{ui}K_j) & * & * \\ +S + \alpha P & & \\ A_{ri}^T P & -(1-\beta)S & * \\ B_{wi}^T P & 0 & -cI \end{bmatrix} \text{이다.}$$

따라서,

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) \Psi_{ij} < 0. \quad (29)$$

이 성립하며 행렬 부등식 (29)의 양변에 $\Theta = \text{diag}[P^{-1} \ P^{-1} \ I]$ 를 곱하고 $X = P^{-1}$, $Y = P^{-1}SP^{-1}$, $M_i = K_i P^{-1}$ 로 변수 치환을 하면 선형 행렬 부등식 (30)을 얻는다.

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) \Omega_{ij} < 0. \quad (30)$$

식 (30)이 성립하기 위한 완화된 충분조건은 [6]에 의해서 식 (16)-(18)과 같다.

다음으로 Laypunov-Krasovskii 이론 [10]에 의해서 $w(t)=0$ 일 때 시간지연 T-S 퍼지 시스템 (9)의 점근 안정성을 증명할 것이다. 식 (31)를 만족하는 양의 상수 σ_1, σ_2 가 반드시 존재한다.

$$\sigma_1 \|x(t)\|^2 \leq V(x(t)) \leq \sigma_2 \|x(t)\|^2 \quad (31)$$

예를들면 $\sigma_1 = \lambda_{\min}(P)$, $\sigma_2 = \lambda_{\max}(P) + (\tau_0/(1-\beta))$ 로 선택할 수 있다. 식 (20)의 시간에 대한 미분은 식 (22)가 성립할 때 식 (32)가 성립한다.

$$\dot{V}(x(t)) < -\alpha x^T(t) P x(t) < 0 \quad (32)$$

Laypunov-Krasovskii 이론에 의해서 시간지연 T-S 퍼지 시스템 (9)는 점근적으로 안정하다. ■

참고 2 : 페루프 T-S 퍼지 시스템 (9)는 정상상태에서 부등식 (33)을 만족한다.

$$\frac{\|x(t)\|_\infty}{\|w(t)\|_\infty} \leq \sqrt{\frac{c}{\alpha \lambda_{\min}(P) + \beta \lambda_{\min}(S)}} \quad (33)$$

4. 컴퓨터 시뮬레이션

본 절에서는 모의실험을 통하여 제안된 제어기 설계 기법의 실효성을 입증한다. 시변 지연을 포함하는 비선형 단일 링크 유연 로봇 시스템의 시스템 동역학 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{cases} I\ddot{\theta}_1(t) + Mgl \sin(\theta_1(t)) + k(\theta_1(t) - \theta_2(t)) = 0 \\ J\ddot{\theta}_2(t) - k(\theta_1(t) - \theta_2(t)) = u(t) \end{cases} \quad (34)$$

여기서, $\theta_1(t)$ 는 수직 축에 따른 링크의 각도, $\theta_2(t)$ 는 장치 손잡이의 각도, I 는 회전축에 대한 회전 관성, J 는 구동부 축의 관성, M 은 링크의 질량, l 은 회전축의 무게 중심으로부터 관절까지의 거리, g 는 중력상수이다.

상태 벡터 $x(t)$ 를 $[\theta_1(t) \ \dot{\theta}_1(t) \ \theta_2(t) \ \dot{\theta}_2(t)]^T$ 로 선택하고 시간 지연과 외란을 고려하여 다음의 상태 공간 방정식 표현을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} & = \begin{bmatrix} x_2(t) + x_1(t-\tau(t)) \\ -\frac{Mgl}{I} \sin(x_1(t)) - \frac{k}{I}(x_1(t) - x_3(t)) \\ +x_2(t-\tau(t)) \\ x_4(t) + x_3(t-\tau(t)) \\ \frac{k}{J}(x_1(t) - x_3(t)) + x_4(t-\tau(t)) \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ J \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.2 \\ 0.2 \\ 0.2 \end{bmatrix} w(t). \end{aligned} \quad (35)$$

시스템 (35)을 시간 지연이 포함된 T-S 퍼지 모델로 구성하면 다음과 같이 표현 가능하다.

Plant Rule 1:

IF $x_1(t)$ is about M_1

THEN $\dot{x}(t) = A_1x(t) + A_{r1}x(t-\tau(t)) + B_{u1}u(t) + B_{w1}w(t)$

Plant Rule 2:

IF $x_1(t)$ is about M_2

THEN $\dot{x}(t) = A_2x(t) + A_{r2}x(t-\tau(t)) + B_{u2}u(t) + B_{w2}w(t)$

$x(t) = \phi(t), t \in [-\tau_0, 0]$

여기서, 시스템 행렬은 다음과 같다.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{Mgl}{I} - \frac{k}{I} & 0 & \frac{k}{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{J} & 0 & -\frac{k}{J} & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\gamma Mgl}{I} - \frac{k}{I} & 0 & \frac{k}{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{J} & 0 & -\frac{k}{J} & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_{r1} = A_{r2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B_{u1} = B_{u2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ k \end{bmatrix}, B_{w1} = B_{w2} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.2 \\ 0.2 \\ 0.2 \end{bmatrix}.$$

실제 시스템의 매개변수는 각각 다음과 같다.

$$M = 0.2678(kg), k = 31(Nm/rad), l = 1(m), a = 0.1$$

$$I = 0.03(kgm^2), J = 0.004(kgm^2), g = 9.8(m/sec)$$

T-S 퍼지 시스템의 소속 함수는 다음과 같다.

$$\begin{cases} \Gamma_1^1(x_1(t)) = \frac{\sin(x_1(t)) - \gamma x_1(t)}{(1-\gamma)x_1(t)}, & x_1(t) \neq 0 \\ \Gamma_1^1(x_1(t)) = 1, & x_1(t) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma_1^2(x_1(t)) = \frac{x_1(t) - \sin(x_1(t))}{(1-\gamma)x_1(t)}, & x_1(t) \neq 0 \\ \Gamma_1^2(x_1(t)) = 0, & x_1(t) = 0 \end{cases}$$

여기서, 모든 $x_1(t) \in [M_1, M_2]$ 대해 $\Gamma_1^1(x_1(t)), \Gamma_1^2(x_1(t))$ 는 양수이다.

단일 링크 유연 로봇의 T-S 퍼지 모델 기반 제어기 구조는 다음과 같다.

Controller Rule 1 : IF $x_1(t)$ is about M_1
THEN $u(t) = K_1x(t)$

Controller Rule 2 : IF $x_1(t)$ is about M_2
THEN $u(t) = K_2x(t)$

모의 실험에서, $[M_1, M_2]$ 는 $[-2.58 \ 2.58]$ 이고, 모든 t 에 대해 $\Gamma_1^1(x_1(t)), \Gamma_1^2(x_1(t))$ 가 양수가 되도록 γ 는 0.1로 선택되었다. 양의상수 $\alpha = 50, c = 3$ 로, 시간 지연의 미분의 상한은 $\beta = 0.2$ 로, 시간 지연의 상한값은 $\tau_0 = 1$ 로 결정하였고 모의 실험에서의 시간 지연, 외란, 외란 감쇄비는 다음과 같이 정하였다.

$$\tau(t) = \frac{\tau_0}{2} + \frac{\tau_0}{2} \sin\left(\left(\frac{2}{\tau_0}\right)\beta t\right).$$

$$w_i(t) = \begin{cases} 2, & t \in [0+k, 0.5+k] \\ -2, & t \in [0.5+k, 1+k] \end{cases}, i = 1, 2, 3, 4, k = 1, 2, \dots$$

$$\rho = \sqrt{c/(\alpha\lambda_{\min}(P) + \beta\lambda_{\min}(S))} = 0.5165.$$

정리 1로부터 양한정 대칭행렬 X, Y , 행렬 M_i 는 다음과 같이 구해진다.

$$X = \begin{bmatrix} 0.005 & -0.0139 & 0.0006 & -0.0042 \\ -0.0139 & 0.6051 & -0.0311 & 0.5481 \\ 0.0006 & -0.0311 & 0.0018 & -0.0551 \\ -0.0042 & 0.5481 & -0.0551 & 4.3903 \end{bmatrix},$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0.0023 & -0.0325 & 0.0014 & -0.0040 \\ -0.0325 & 1.7631 & -0.0831 & 0.4882 \\ 0.0014 & -0.0831 & 0.0102 & -0.0477 \\ -0.0040 & 0.4882 & -0.0477 & 5.8388 \end{bmatrix},$$

$$M_1 = [\ 0.0042 \ -0.4376 \ 0.0302 \ -2.0436],$$

$$M_2 = [\ 0.0042 \ -0.4366 \ 0.0302 \ -2.0435].$$

이로부터 페루프 T-S 퍼지 시스템의 안정성을 보장하는 양한정 대칭 행렬 P 와 S , 그리고 T-S 퍼지 모델 제어 이득 행렬은 다음과 같이 구해진다.

$$P = 10^4 \times \begin{bmatrix} 0.8059 & 0.0335 & 0.2979 & 0.0003 \\ 0.0335 & 0.0080 & 0.1549 & 0.0010 \\ 0.2979 & 0.1549 & 3.2738 & 0.0221 \\ 0.003 & 0.0010 & 0.0221 & 0.0002 \end{bmatrix},$$

$$S = 10^6 \times \begin{bmatrix} 0.1650 & 0.0325 & 0.6275 & 0.0040 \\ 0.0335 & 0.0151 & 0.3174 & 0.0021 \\ 0.6275 & 0.3174 & 6.7027 & 0.0453 \\ 0.0040 & 0.0021 & 0.0453 & 0.0003 \end{bmatrix}.$$

$$K_1 = [-29.5101 \ -6.8430 \ -128.1197 \ -1.2485],$$

$$K_2 = [-29.1837 \ -6.7705 \ -126.7269 \ -1.2398].$$

Figure 1, 2 는 모의 실험 결과를 나타낸다. 제어의 결과를 효과적으로 비교하기 위하여 시각 $t=1$ 초부터 제어 입력을 인가하였다. 제어 입력을 인가하기 전, figure 2에서 보는바와 같이 시스템의 상태 벡터의 높음 외란의 높보다 크며 $t=1$ 초 이후, 제어 입력을 인가한 이후, 정상상태에 도달하고 정상상태로 판단한 $t=2$ 이후의 상태 벡터의 높음 $\|x(t)\|_{\infty} \leq 0.3313 \|w(t)\|_{\infty}$ 로 $\|x(t)\|_{\infty} \leq \rho \|w(t)\|_{\infty}$ 를 만족함을 알 수 있다. 모의 실험 결과로부터 본 논문에서 제안한 T-S 퍼지 모델 기반 L_{∞} -이득값 성능을 만족하는 제어기는 입력 지연이 존재하는 T-S 퍼지 시스템을 효과적으로 제어 할 수 있음을 알 수 있다.

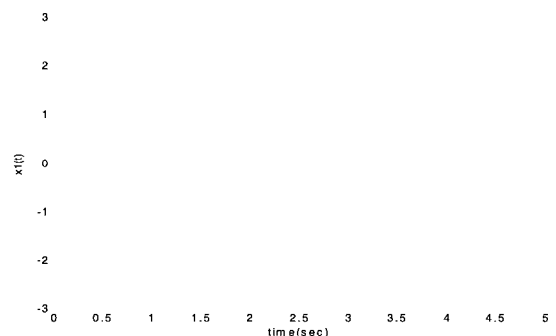


그림 1. 시스템 상태 응답 $x_1(t)$ (solid line), 지연된 상태 응답 $x_1(t-\tau(t))$ (dotted line), 외란 (dashed line).

Fig 1. System response $x_1(t)$, delayed state response $x_1(t-\tau(t))$, disturbance

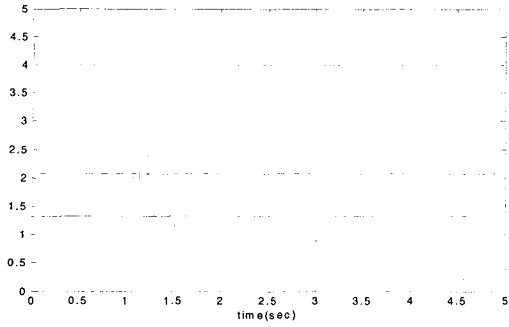


그림 2. 시스템 상태의 놈 $|x(t)|$ (dashed line), 외란의 놈 $|w(t)|$ (dash-dot line), $\rho \|w(t)\|_\infty$ (dotted line), 정상상태에서의 $\|x(t)\|_\infty$ (solid line).

Fig 2. Norm of system state, Norm of disturbance, $\rho \|w(t)\|_\infty$, $\|x(t)\|_\infty$ in steady state

5. 결 론

본 논문에서는 시간 지연을 포함하는 TS 퍼지 시스템의 L_∞ -이득값 제어기 설계를 제안하였다. L_∞ -이득값 제어 목적을 달성할 수 있는 제어기 설계 충분조건을 선형 행렬 부등식의 형태로 제시하였다. 이렇게 설계된 TS 퍼지 제어기를 통해 페루프 T-S 퍼지 시스템은 유계된 지속적인 외란에 대하여 일정한 비율로 출력이 유계된다. 제안된 제어기 설계 기법의 효용성을 검증하기 위하여 모의 실험을 제시하였으며, 모의 실험 결과 그 제어 성능의 실효성을 확인할 수 있었다.

참 고 문 헌

[1] J. C. Lo and M. L. Lin, "Robust H_∞ nonlinear control via fuzzy static output feedback," *IEEE Trans. Circuits Syst., I*, vol. 50, no. 11, pp. 1494-1502, 2003.

[2] M. Vidyasagar, "Further results on the optimal rejection of persistent bounded disturbances," *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 36, no. 6, pp. 642-652, Jun 1991.

[3] M. A. Dahleh, J. B. Pearson Jr., " L_1 -optimal compensators for continuous-time systems," *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 25, pp. 1826-1828, Dec 1986.

[4] C. S. Tseng, and C. K. Hwang, "Fuzzy observer-based fuzzy control design for nonlinear systems with persistent bounded disturbances," *Fuzzy Sets Syst.*, vol. 158, no 2, pp. 164-179, 2007.

[5] Y. Y. Cao and P. M. Frank, "Analysis and synthesis of nonlinear time-delay systems via fuzzy control approach," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 8, no. 2, pp. 200-211, 2000.

[6] C. Lin, Q. G. Wang, T. H. Lee, and Y. He, "Design of observer-based H_∞ control for fuzzy

time-delay systems," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 16, no. 2, pp. 534-543, Apr. 2008.

[7] T. Tanaka, T. Ikeda and H. O. Wang, "Fuzzy control system design via LMIs," *ACC '97, Proceedings of the American Control Conference*, Albuquerque, New Mexico, pp. 2861-2873, 1997.

[8] S. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, "*Linear matrix inequalities in system and control theory*", Philadelphia, PA: *SIAM*, 1994.

[9] H. Khalil, *Nonlinear systems: Third edition*, Prentice Hall, USA, 2002.

[10] J. Hale, *Theory of functional differential equations*. New York: Springer-Verlag, 1977

저 자 소 개



이동환(Dong Hwan Lee)

2008년: 건국대학교 전기전자과 졸업
2008년~현재: 연세대학교 전기전자공학과 석사과정

관심분야 : TS 퍼지 시스템, 퍼지 강인 제어기 설계.
Phone : 02-2123-2773
Fax : 02-362-4539
E-main : hope2010@yonsei.ac.kr



주영훈(Young Hoon Joo)

제18권 5호(2008년 10월호) 참조



박진배(Jin Bae Park)

제18권 5호(2008년 10월호) 참조