Journal of the Society of Korea Industrial and Systems Engineering
Vol, 31, No. 4, pp.86-92, December 2008.

가상확률밀도함수를 사용하여 Max(N, T, D) 운용방침이 적용되는 조정가능한 M/G/1 대기모형의 busy period의 기대값 유도

이한교† · 오현승

한남대학교 산업경영공학과

Derivation of the Expected Busy Period Using its Pseudo Probability Density Function for a Controllable M/G/1 Queueing Model Operating Under the Max (N, T, D) Policy

Hahn-kyou Rhee† · Hyun-seung Oh

Department of Industrial and Management Engineering, Hannam University

The expected busy period for the controllable M/G/1 queueing model operating under the triadic Max (N, T, D) policy is derived by using a new concept so called "the pseudo probability density function." In order to justify the proposed approaches for the triadic policy, well-known expected busy periods for the dyadic policies are recovered from the obtained result as special cases.

Keywords : Expected Busy Period, Pseudo Probability Density Function, M/G/1

1. 서 론

서비스를 받기 위해 기다리는 고객이 없어도 앞으로 도착할 고객에게 즉시 서비스를 제공할 수 있도록 server가 항상 준비상태에 있어야 하는 일반적인 대기모형(ordinary queueing model)의 취약한 면은 server를 효과적으로 활용할 수 없다는 점이다. 이러한 문제를 해결하기 위해 제안된 방법은 시스템 내부에서 서비스를 기다리는 고객이 없을 때에는 서비스창구를 임시로 폐쇄하여 server를 다른 업무에 활용하고, 추후 시스템 상태의 변화에 따라 폐쇄된 서비스창구를 재개할 수 있도록 한 조정가능한 대기 모형(controllable queueing model)이다. 이러한 조정가능한 대기모형에서는 폐쇄된 서비스창구가 재개되기 위한 조건을 포함한 시스템 상태를 규정하는 운용방침(operating policy)의 역할이 매우 중요하기 때문에 다양한 형태의 운용방침이 제안되어 활용되고 있다(Teghem[14]). 일반적으로 이러한 운용방침들은 시스템상태를 나타내기 위해 도입된 입력변수의 개수에 따라 분류할 수 있는데, 한 개의 입력변수가 포함되어 있는 N, T 그리고 D 운용방침을 단순 운용방침(simple operating policy)이라고 한다. 여기에서 (i) N 운용방침은 Yadin and Naor[15]가 제안한 것으로, 만약 시스템 내부에 고객이 없으면 server는 서비스창구를 폐쇄하고 다른 업무를 수행하게 함으로서 server의 유휴시간을 활용하도록 한다. 따라서 창구가 폐쇄된 상태에서 시스템에 도착하는 고객은 즉시 서비스를 받을 수가 없다. 그

논문접수일 : 2008년 07월 17일 논문수정일 : 2008년 08월 12일 게재확정일 : 2008년 09월 08일
† 교신저자 hkrhee@hnu.ac.kr
※ 본 연구는 2008년 한남대학교 학술조성연구비 지원에 의하여 연구되었음.

러나 그 후 서비스를 받기 위해 기다리는 고객의 수가 $N(N \geq 1)$ 명이 되는 즉시 server는 수행중인 다른 업무를 중단하고 서비스창구를 재개하여 기다리는 고객을 상대로 순서대로 서비스를 제공하기 시작하여 또다시 시스템 내부에 고객이 없을 때까지 서비스 제공이 계속된다. (ii) T 운용방침은 Heyman[5] 등이 제안한 운용방침으로 시스템 내부에 기다리는 고객이 없으면 server는 창구를 폐쇄하고 다른 업무를 수행하게 한다. 창구가 폐쇄된 후 T 단위시간이 경과한 뒤, 만약 서비스를 기다리는 고객이 있을 경우 server는 수행중인 다른 업무를 중단하고 즉시 기다리는 고객에게 서비스를 제공하기 시작하여 다시 기다리는 고객이 없을 때까지 서비스 제공이 계속된다. 그러나 T 단위시간이 경과된 다음에도 기다리는 고객이 없을 경우 다시 T 단위시간 또 다른 T 단위시간 등 최소한 한 명의 고객이 있을 때까지 창구가 폐쇄된다. 마지막으로 (iii) D 운용방침은 Balachandran and Tijms[1]이 제안한 것으로 시스템 내부에 고객이 없으면 server는 창구를 폐쇄하고 다른 업무를 수행한다. 창구가 폐쇄된 후, 시스템 내부에서 기다리는 고객의 예상되는 서비스의 시간의 합이 처음으로 D 단위시간을 초과하는 순간부터 server는 수행중인 다른 업무를 중단하고 기다리는 고객에게 서비스제공을 재개하여 다시 고객이 없을 때까지 서비스를 제공한다.

단순운용방침이 적용되는 조정가능한 대기모형은 일반적인 대기모형보다 시스템의 상황에 따라 server를 효과적으로 운용할 있는 장점이 있다. 그러나 단순히 한 가지 종류의 시스템 상태에 의해 폐쇄된 서비스창구가 재개되기 때문에 시스템 운용에 유연성이 부족하여 실제 상황에 적용하기에는 어려움이 따를 수 있다. 이러한 문제점을 보완하기 위해 시스템 내부의 다양한 조건에 따라 폐쇄된 서비스창구가 재개될 수 있도록 시스템 운용에 유연성이 부여된 이변수 운용방침(dyadic policy)이 Gakis, Rhee and Sivazlian[4]에 의해 제안되었다. 이변수 운용방침은 앞에서 정의된 세 종류의 단순 운용방침들 중에서 선정된 두 운용방침이 특수한 형태로 결합된 새로운 것으로 $Min(N, T)$, $Max(N, T)$, $Min(N, D)$, $Max(N, D)$, $Min(T, D)$ 그리고 $Max(T, D)$ 운용방침이 여기에 속한다. 그 중에서 $Min(N, D)$와 $Max(N, D)$ 운용방침은 다음과 같은 의미로 정의되며 다른 것들도 이와 유사한 의미를 갖는다(Gakis, Rhee and Sivazlian[4] 혹은 Rhee[9, 10]).

(i) $Min(N, D)$ 운용방침 : 시스템 내부에 서비스를 기다리는 고객이 없으면 server는 창구를 폐쇄하고 다른 업무를 수행한다. 그 후 서비스를 기다리는 고객의 수가 처음으로 N명이 되는 순간 혹은 서비스를 기다리는 고객의 예상되는 서비스시간의 합이 D 단위시간을 초과하는 순간, 즉 두 가지 조건 중에서 어느 것이나 먼저 만족될 때 server는 수행중인 다른 업무를 중단하고 기다리는 고객들에게 service를 제공하기 시작하여 다시 시스템 내부에 고객이 없을 때까지 계속된다. 만약 $D \to \infty$이면 $Min(N, D)$운용방침은 N 운용방침과 동일하며, 또한 만약 $N \to \infty$이면 $Min(N, D)$운용방침은 D 운용방침과 동일하게 된다.

(ii) $Max(N, D)$ 운용방침 : 시스템 내부에 서비스를 기다리는 고객이 없으면 server는 창구를 폐쇄하고 다른 업무를 수행한다. 그 후 처음으로 service를 기다리는 고객의 수가 N명 이상이 되고 또한 서비스를 기다리는 고객의 예상되는 서비스시간의 합이 D 단위시간을 처음으로 초과하는 순간, 즉 두 조건이 처음으로 모두 만족될 때 server는 수행중인 다른 업무를 중단하고 기다리는 고객들에게 service를 제공하기 시작하여 다시 시스템 내부에 고객이 없을 때까지 계속된다. 만약 $D \to 0$이면 $Max(N, D)$운용방침은 N 운용방침과 동일하며, 또한 만약 $N \to 0$이면 $Max(N, D)$운용방침은 D 운용방침과 동일하게 된다.

사실 이변수 운용방침은 통계의 샘플링뿐만 아니라 설비교체 관리분야에서도 이변수 모형이 사용되는데 Sivazlian and Iyer[13]의 이변수 설비교체 운용 정책이 좋은 예가 된다. 또한 대기이론 분야에서도 볼 수가 있는데 Rhee and Sivazlian[12], Kella[7], Brill and Harris[2], Kella and Yachiali[6] 등을 예로 들 수 있다. 그러나 이변수 운용방침은 단순 운용방침보다 포괄적이고 광범위하기 때문에 다양한 영역에서 적용 가능한 장점이 있는 반면, 고려하는 대기모형이 더 복잡해지는 관계로 특성치를 구하기 위해서는 많은 어려움이 수반되는 단점이 따르기 마련이다. 이와 같은 이유로 시스템 분석에 필요한 특성치를 보다 간편하게 그리고 쉽게 얻을 수 있는 방법 개발이 중요한 과제가 되고 있다. 보다 더 깊은 내용은 Gakis, Rhee, and Sivazlian[4] 혹은 Rhee[9, 10]의 연구를 참조하면 된다.

특히 최근에는 이변수 운용방침이 적용되는 경우보다 더 많은 시스템 운용의 유연성을 확보하기 위한 방법의 하나로 세 가지 단순 운용방침이 모두 결합된 $Min(N, T, D)$ 삼변수 운용방침(triadic operating policy)이 Rhee and Oh[11]에 의해 제안되었는데 이는 아래와 같이 정의된다.

$Min(N, T, D)$ 운용방침 : 시스템 내부에 고객이 없으면 server는 창구를 폐쇄하고 다른 업무를 수행한다. 그 후 서비스를 기다리는 고객의 수가 N명 이상이 되거나 혹은 $mT(m = 1, 2, 3, \cdots)$ 단위시간이 경과할 때 최소한

한 명의 고객이 도착하거나, 그리고 시스템 내부에서 기다리는 고객의 예상되는 서비스의 시간의 합이 처음으로 D 단위시간을 초과하는 순간, 즉 세 가지 조건 중 어느 것이나 먼저 만족이 되는 순간 server는 수행중인 다른 업무를 중단하고 기다리는 고객들에게 service를 제공하기 시작하여 다시 시스템 내부에 고객이 없을 때까지 계속된다. 만약 $D \rightarrow \infty$ 이면 $Min(N, T, D)$ 운용방침은 $Min(N, T)$ 운용방침과 동일하고, 또한 만약 $N \rightarrow \infty$ 이면 $Min(D, T)$ 운용방침과 동일하며 $T \rightarrow \infty$ 이면 $Min(N, D)$ 운용방침과 동일하게 된다. 따라서 $Min(N, T, D)$ 운용방침은 $Min(N, T)$, $Min(D, T)$ 그리고 $Min(N, D)$ 운용방침의 일반형으로 볼 수 있다.

조정가능한 대기모형의 분석 결과를 현장에서 직접 활용하기 위해서는 선정된 운용방침이 적용되었을 때 기대되는 총비용을 가장 적게 하는 입력변수의 최적해를 결정해야 할 필요가 있다. 이러한 과정에는 다양한 형태의 시스템 특성치의 유도가 필요하게 된다. 그 중에서도 유도하기 가장 어려운 특성치들 중 하나가 바로 busy period의 기대값이다. 여기에서 busy period는 서비스를 제공해 주는 server가 폐쇄되었던 서비스창구를 재개되어 처음으로 서비스 제공하기 시작한 순간부터 서비스를 기다리는 고객이 없어 서비스창구가 다시 폐쇄될 때까지의 시간간격을 말한다. 이러한 이유로 busy period는 확률변수로 표현된다. 일반적으로 확률변수의 기대값을 구하기 위해서는 그 확률변수에 따른 확률밀도함수를 사용하여야 한다. 그러나 조정가능한 대기모형에 관련된 busy period의 확률밀도함수는 유도과정이 매우 복잡하고 어렵기 때문에 그것을 사용하여 기대값을 구하기는 거의 불가능하다고 볼 수 있다. 특히 D 운용방침이 포함되어 있는 경우 더욱 더 그러하다. 이러한 문제를 해결하기 위해 Rhee[9]는 D 운용방침과 D 운용방침이 포함된 이변수 운용방침 즉 $Min(D, T)$, $Max(D, T)$, $Min(N, D)$ 그리고 $Max(N, D)$ 운용방침이 $M/G/1$ 대기모형에 적용되었을 때 가상확률밀도함수라는 새로운 개념을 사용하여 보다 쉽게 busy period의 기대값을 유도할 수 있는 방법을 개발하였다. 여기에서 가상확률밀도함수란 아래의 ***가상가정(pseudo assumption)***을 만족하는 확률밀도함수를 뜻한다. 그러나 이러한 가상확률밀도함수는 D 운용방침과 D 운용방침이 포함된 이변수 운용방침이 적용되는 $M/G/1$ 대기모형의 busy period의 실제 확률밀도함수와는 전혀 다른 형태로 표현되지만 일반적인 확률밀도함수와 동일하게 사용하여 정확한 busy period의 기대값을 보다 쉽게 얻을 수 있다(Rhee[9]).

- ***가상가정(Pseudo Assumption) :*** *조정가능한 $M/G/1$ 대기모형에 D 운용방침이 적용되면 busy period의 크기는 최소한 D 단위시간보다 크게 된다. 그러나 D 운용방침이 적용되어도 busy period가 시작되기 전에 도착한 고객들의 예상되는 서비스 시간에 부여되는 조건 D를 무시하여, N 혹은 T 운용방침이 적용되는 경우처럼, busy period가 시작되는 순간 시스템에 도착해 있는 고객수만을 고려하여 busy period를 규명한다. 이는 다시 말해 busy period가 시작되기 이전에 도착한 고객의 서비스 시간도 busy period가 시작된 이후에 도착한 고객의 서비스 시간과 동일하게 아무런 제약 조건이 없다고 가정한다.*

Rhee and Oh[11]는 위의 가상가정을 만족하는 가상확률밀도함수를 사용하여 단순 그리고 이변수 운용방침과 마찬가지로 삼변수 $Min(N, T, D)$ 운용방침의 경우에도 성공적으로 busy period의 기대값을 유도할 수 있음을 증명하였다.

2. 연구 목적

단순 운용방침과 이변수 운용방침은 시스템의 상황에 따라 폐쇄되었던 서비스창구를 재개함으로서 일반적인 대기모형보다 server를 효율적으로 활용할 수 있다. 그리고 보다 더 많은 시스템 운용의 유연성을 확보하기 위한 일환으로 단순 그리고 이변수 운용방침을 포함하는 $Min(N, T, D)$ 삼변수 운용방침(triadic policy)이 개발되었지만 다양한 형태의 운용방침은 시스템 운용에 많은 유연성을 제공할 수 있기 때문에 $Min(N, T, D)$ 운용방침에 대응되는 또 다른 형태의 삼변수 운용방침인 $Max(N, T, D)$ 운용방침의 개발을 제안하며 아래와 같은 의미로 정의한다.

$Max(N, T, D)$ 운용방침 : 단순 혹은 이변수 운용방침과 마찬가지로 시스템에 고객이 없으면 server는 창구를 폐쇄하고 다른 업무를 수행한다. 그 후, 서비스를 기다리는 고객수가 N명 이상이 되고 $mT(m=0,1,2,\cdots)$ 단위시간이 경과할 때 최소한 한명의 고객이 도착하며 또한 기다리는 모든 고객에게 예상되는 서비스 시간의 합이 최초로 규정된 값 D 단위시간 보다 큰 조건 모두를 처음으로 만족하는 순간 server는 수행중인 다른 업무를 중단하고 기다리는 고객들에게 서비스를 제공하기 시작하여 다시 고객이 없을 때까지 서비스 제공을 계속한다. 만약 $D \rightarrow 0$ 이면 $Max(N, T, D)$ 운용방침은 $Max(N, T)$ 운용방침과 동일하게 되며, 또한 $N \rightarrow 1$ 이면 $Max(T, D)$과 동일하게 되고, 그리고 $T \rightarrow 0$ 이면 $Max(N, D)$ 운용방침과 동일하게 됨을 알 수 있다.

$Min(N, T, D)$ 운용방침의 경우와 같이 $Max(N, T, D)$ 삼변수 운용방침이 적용되는 경우 $M/G/1$ 대기모형에서

busy period의 기대값은 확률밀도함수를 사용하여 유도하기가 매우 어렵고 복잡하다. 따라서 이러한 문제의 해결을 위해 본 연구의 목적을 조정 가능한 $M/G/1$ 대기모형에 $Max(N, T, D)$ 운용방침이 적용되었을 때의 busy period의 기대값을 단순 그리고 이변수 운용방침에 성공리에 적용되었던 새로운 개념의 가상확률밀도함수를 활용하여 유도하고자 한다. 유도된 결과의 검증은 유도된 결과로 부터 이미 알려져 있는 이변수 운용방침에 따른 busy period의 기대값을 입력변수에 특정한 값을 대입해 도출함으로서 그 과정을 대신하기로 한다.

3. 대기모형의 정의

본 연구의 대상은 안정상태(steady-state)에 있는 $M/G/1$ 대기모형이며 다음과 같은 관련된 사항을 가정한다.

(i) 고객들은 포아송 과정(Poisson process)에 따라 시스템에 도착하며, 연속된 두 고객의 도착 평균 시간 간격은 $1/\lambda$이다. 즉 t 단위시간 동안 시스템에 도착하는 고객의 수를 나타내는 확률변수를 $N(t)$라고 하면, $n=0,1,2,\cdots$에 대해 다음이 성립한다.

$$P[N(t)=n]=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!} \tag{1}$$

또한 식 (1)을 사용하여 다음을 정의한다.

$$H_n(T)=P[N(t)\ge n]=\sum_{j=n}^{\infty}\frac{e^{-\lambda T}(\lambda T)^j}{j!} \tag{2}$$

(ii) i번째 고객에게 소요되는 서비스 시간을 나타내는 확률변수를 S_i라고 정의하며 S_i는 평균이 $1/\mu$인 상호 독립이며 동일한 분포라고 가정한다. S_i의 공통 확률밀도함수를 $f_S(\cdot)$로 표시한다. 또한 다음을 정의한다.

$$G^{(n)}(D)=\int_0^D [f_S(t)]^{*(n)}dt \tag{3}$$

여기에서 $[f_S(t)]^{*(n)}$은 $f_S(\cdot)$의 n차 중첩(n-fold convolution)을 뜻한다.

(iii) 기타 언급되지 않은 사항은 일반적인 $M/G/1$ 대기모형의 가정에 따른다.

(iv) B_o : 일반적인 $M/G/1$ 대기모형의 busy period를 나타내는 확률변수로 정의한다. B_o의 기대값을 $E[B_o]$로 나타내면 다음과 같이 주어진다(Kleinrock[8], Conolly[3]).

$$E[B_o]=\frac{1}{\mu(1-\lambda/\mu)} \tag{4}$$

Gakis, Rhee, and Sivazlian[4]의 결과에 따르면, 만약 단순 N 운용방침, T 운용방침 그리고 D 운용방침이 $M/G/1$ 대기모형에 적용되었을 때 busy period를 나타내는 확률변수를 각각 B_N, B_T 그리고 B_D라 하고, 또 이들의 기대값을 $E[B_N]$, $E[B_T]$ 그리고 $E[B_D]$라고 정의하면 다음과 같이 주어진다.

$$E[B_N]=NE[B_o] \tag{5}$$

$$E[B_T]=\frac{\lambda T\ E[B_o]}{1-e^{-\lambda T}} \tag{6}$$

$$E[B_D]=E[B_o]\sum_{j=0}^{\infty}G^{(n)}(D) \tag{7}$$

또한 이변수 운용방침들 중에서 $Max(N, T)$, $Max(T, D)$ 그리고 $Max(N, D)$ 운용방침이 $M/G/1$ 대기모형에 적용되었을 때 busy period를 나타내는 확률변수를 각각 $B_{Max(N,T)}$, $B_{Max(T,D)}$ 그리고 $B_{Max(N,D)}$라 하고, 또한 이들의 기대값을 $E[B_{Max(N,T)}]$, $E[B_{Max(T,D)}]$ 그리고 $E[B_{Max(N,D)}]$로 정의하면 다음과 같이 주어진다(Rhee[9]).

$$E[B_{Max(N,T)}]=N\ E[B_o]+\frac{\lambda TE[B_o]}{1-e^{-\lambda T}}-\frac{E[B_o]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{n=1}^{N}H_n(T) \tag{8}$$

$$E[B_{Max(N,D)}]=E[B_o]\left\{N+\sum_{n=N}^{\infty}G^{(n)}(D)\right\} \tag{9}$$

$$E[B_{Max(T,D)}]=\frac{E[B_o]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{n=1}^{\infty}[H_n(T)+\{H_1(T)-H_{n+1}(T)\}G^{(n)}(D)] \tag{10}$$

여기에서 $E[B_o]$는 일반적인 M/G/1 대기모형의 busy period의 기대값을 나타내며 식 (4)에 표현되어 있고 $H_n(T)$와 $G^{(n)}(D)$는 식 (2)과 식 (3)에 각각 정의되어 있다. D 단순 운용방침과 다양한 이변수 운용방침이 적용되는 조정 가능한 $M/G/1$ 대기모형의 busy period의 기대값 또한 Gakis, Rhee and Sivazlian[4] 혹은 Rhee[9]의 결과로 확인할 수 있다.

4. *Max(N, T, D)* 운용방침에 따른 busy period의 기대값 유도

조정가능한 $M/G/1$ 대기모형에 적용되는 $Max(N, T, D)$ 운용방침의 분석을 위해, 이전의 busy period가 끝난 뒤

첫 $mT(m=0,1,2,\cdots)$ 단위시간이 경과할 때까지 고객이 한명도 시스템에 도착하지 않았으며, 다음의 T 단위시간 내에 최소한 한명의 고객이 도착했다고 가정하자. 이전의 busy period가 끝난 후, (i) N번째 고객이 $(m+1)T$ 단위시간이 경과한 후 도착하고 N번째 고객이 도착하기 전에 이미 앞서 도착한 모든 고객에게 예상되는 서비스시간의 합이 D 단위시간보다 큰 경우, (ii) $(m+1)T$ 단위시간이 경과하기 전에 도착하여 서비스를 기다리는 고객의 수가 N명 보다 많고, 이들에게 예상되는 서비스 시간의 합이 D 단위시간보다 클 경우, (iii) 도착한 고객의 수가 N명 이상이며 도착한 모든 고객에게 예상되는 서비스시간의 합이 $(m+1)T$ 단위시간이 경과하기 후 처음으로 D 단위시간보다 클 경우, 새로운 busy period가 시작된다. 다시 말해, 새로운 busy period가 N번째 고객이 시스템에 도착하는 순간 시작되기 위해서는 이미 도착된 모든 고객에게 예샹되는 서비스시간의 합이 D 단위시간 보다 크고 $(m+1)T$ 단위시간이 경과한 후 N번째 고객이 시스템에 도착하는 순간 시작된다. 또한, 이전의 busy period가 끝난 후 $(m+1)T$ 단위시간이 경과되기 이전에 도착한 고객의 수가 N명 보다 많고 이들에게 필요한 서비스 시간의 합이 D 보다 클 때에는 T 운용방침에 따라 $(m+1)T$ 단위시간이 경과되는 순간 새로운 busy period가 시작된다. 마지막으로, D 운용방침에 따라 새로운 busy period가 시작되는 시점은 이전의 busy period가 끝난 후 $(m+1)T$ 단위시간을 경과한 후 도착한 고객의 수가 N명보다 많고 이들에게 필요한 서비스 시간의 합이 D 단위시간 보다 처음으로 크게 되는 순간이다. 이러한 여러 상황을 수식으로 표현하기 위해 아래의 확률을 정의한다.

(i) $P[TDN]$: 이전의 busy period가 끝난 후, $(m+1)T$ 단위시간이 경과된 뒤에 도착한 모든 고객에게 소요되는 서비스 시간의 합이 처음으로 D 단위시간 보다 커진 다음 N번째 고객이 도착할 확률,
(ii) $P[DTN]$: 이전의 busy period가 끝난 후, $(m+1)T$ 단위시간이 경과되기 전에 도착한 모든 고객에게 소요되는 서비스 시간의 합이 처음으로 D 단위시간 보다 커진 뒤 N번째 고객이 $(m+1)T$ 단위시간이 경과된 후 도착할 확률,
(iii) $P[NDT]$: 이전의 busy period가 끝난 후, N번째 고객이 도착한 다음, 모든 도착 고객에게 소요되는 서비스 시간의 합이 처음으로 D 단위시간 보다 커진 뒤 $(m+1)T$ 단위시간이 경과될 확률,
(iv) $P[DNT]$: 이전의 busy period가 끝난 후, 모든 도착 고객에게 소요되는 서비스 시간의 합이 처음으로 D 단위시간 보다 커진 뒤, N번째 고객이 시스템에 도착하고, 그 후 $(m+1)T$ 단위시간이 경과될 확률,
(v) $P[NTD]$: 이전의 busy period가 끝난 후, $(m+1)T$ 단위시간이 경과하기 전에 N번째 고객이 도착하고, $(m+1)T$ 단위시간이 경과된 후 모든 도착고객에게 소요되는 서비스 시간의 합이 처음으로 D 단위시간 보다 커질 확률,
(vi) $P[TND]$: 이전의 busy period가 끝난 후, $(m+1)T$ 단위시간이 경과한 후, N번째 고객이 도착하고, 그 후 모든 도착 고객에게 소요되는 서비스 시간의 합이 처음으로 D 단위시간 보다 커질 확률.

그러면, $N \geq 1$인 경우 아래의 관계가 성립함을 알 수 있다.

$$\begin{aligned}P[TDN] &= \sum_{n=1}^{N}[H_n(T)-H_{n+1}(T)]\sum_{j=n+1}^{N+1}[G^{(j-1)}(D)-G^{(j)}(D)] \\ &\quad -\sum_{n=1}^{N}[H_n(T)-H_{n+1}(T)]\sum_{j=N}^{N+1}[G^{(j-1)}(D)-G^{(j)}(D)] \\ &\quad +[H_N(T)-H_{N+1}(T)][G^{(N-1)}(D)-G^{(N)}(D)] \qquad (11)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P[DTN] &= \sum_{n=1}^{N}[H_n(T)-H_{n+1}(T)]\sum_{j=1}^{n}[G^{(j-1)}(D)-G^{(j)}(D)] \\ &\quad -[H_N(T)-H_{N+1}(T)][G^{(N-1)}(D)-G^{(N)}(D)] \qquad (12)\end{aligned}$$

$$P[NDT]=\sum_{n=N}^{\infty}[H_n(T)-H_{n+1}(T)]\sum_{j=N}^{n}[G^{(j-1)}(D)-G^{(j)}(D)] \qquad (13)$$

$$P[DNT]=H_N(T)[G^{(0)}(D)-G^{(N-1)}(D)] \qquad (14)$$

$$P[NTD]=\sum_{n=N}^{\infty}[H_n(T)-H_{n+1}(T)]G^{(n)}(D) \qquad (15)$$

$$P[TND]=[H_1(T)-H_N(T)]G^{(N-1)}(D) \qquad (16)$$

$Max(N,T,D)$ 운용방침이 적용될 때, 새로운 busy period가 N 운용방침, T 운용방침 그리고 D 운용방침에 의해 시작될 확률을 각각 $P[N]$, $P[T]$ 그리고 $P[D]$으로 나타낸다고 가정하면, 위 식 (11) 부터 식 (16)까지 주어진 확률을 사용하면 $P[N]$, $P[T]$ 그리고 $P[D]$는 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$P[N]=P[TDN]+P[DTN] \qquad (17)$$
$$P[T]=P[NDT]+P[DNT] \qquad (18)$$
$$P[D]=P[NTD]+P[TND] \qquad (19)$$

또한 위의 식 (17), 식 (18) 그리고 식 (19)를 사용하면 아래의 관계식이 성립함을 알 수 있다.

$$P[N]+P[T]+P[D]=P[N(T)\geq 1]\ =1-e^{-\lambda T}$$

$Max(N,T,D)$ 운용방침이 적용되는 대기모형의 busy period를 나타내는 확률변수를 $B_{Max(N,T,D)}$, 그리고 $B_{Max(N,T,D)}$의 가상확률밀도함수를 $ff_B(t)$라 정의하면, $ff_B(t)$는 $Max(N,T,D)$ 운용방침의 정의와 위의 식 (17), 식 (18) 그리고 식 (19)에서 주어진 $P[N]$, $P[T]$ 그리고 $P[D]$를 함께 사용하면 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{aligned} ff_B(t) = \sum_{m=0}^{\infty} e^{-m\lambda T}\Big\{ & f_{B_o}^{*(N)}(t)[H_1(T)-H_N(T)]\cdot \\ & [G^{(0)}(D)-G^{(N-1)}(D)] \\ & +\sum_{n=N}^{\infty} f_{B_o}^{*(n)}(t)[H_n(T)-H_{n+1}(T)][G^{0}(D)-G^{(n)}(D)] \\ & +\sum_{n=N}^{\infty}[H_n(T)-H_{n+1}(T)]\sum_{j=1}^{\infty} f_{B_o}^{*(n+j)}(t)\cdot \\ & [G^{(n+j+1)}(D)-G^{(n+j)}(D)] \\ & +[H_1(T)-H_N(T)]\sum_{n=N}^{\infty} f_{B_o}^{*(N)}(t)\left[G^{(n-1)}(D)-G^{(n)}(D)\right]\Big\} \end{aligned} \quad (20)$$

여기에서 함수 $f_{B_o}(t)$는 일반적인 $M/G/1$ 대기모형의 busy period, 즉 확률변수 B_o 확률밀도함수를 나타내며 $f_{B_o}^{*(n)}(t)$는 $f_{B_o}(t)$의 n차 중첩(n-fold convolution)을 나타낸다. 위 식 (20)에 포함된 확률밀도함수 $ff_B(t)$와 $f_{B_o}(t)$의 Laplace 변환을 각각 $\overline{ff_B}(s)$와 $\overline{f_{B_o}}(s)$라고 하자. 즉

$$\overline{ff_B}(s)=\int_0^{\infty} e^{-st} ff_B(t)\,dt$$

$$\overline{f_{B_o}}(s)=\int_0^{\infty} e^{-st} f_{B_o}(t)dt$$

식 (20)의 좌우변에 Laplace 변환을 취하면 아래와 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \overline{ff_{B_5}}(s) = & \\ & \frac{1}{1-e^{-\lambda T}}\Big\{[\overline{f_{B_o}}(s)]^N[H_1(T)-H_{N+1}(T)][G^{0}(D)-G^{(N)}(D)] \\ & +\sum_{n=N}^{\infty}[\overline{f_{B_0}}(s)]^n[H_n(T)-H_{n+1}(T)][G^{(0)}(D)-G^{(n)}(D)] \\ & +\sum_{n=N}^{\infty}[H_n(T)-H_{n+1}(T)]\sum_{j=1}^{\infty}[\overline{f_{B_0}}(s)]^{n+j}\cdot \\ & [G^{(n+j+1)}(D)-G^{(n+j)}(D)] \\ & +[H_1(T)-H_N(T)]\sum_{n=N}^{\infty}[\overline{f_{B_0}}(s)]^n[G^{(n-1)}(D)-G^{(n)}(D)]\Big\} \end{aligned} \quad (21)$$

확률밀도함수의 Laplace 변환에는 다음의 $\frac{d}{ds}\overline{f_{B_o}}(s)|_{s=0} = -E[B_o]$가 성립하기 때문에 $B_{Max(N,T,D)}$의 기대값 $E[B_{Max(N,T,D)}]$는 식 (21)을 사용하여 다음과 같이 유도된다.

$$E[B_{Max(N,T,D)}] = -\frac{d}{ds}\overline{ff_{B_o}}(s)|_{s=0} = nE[B_0]+ \frac{E[B_o]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{n=N}^{\infty}\{[H_1(T)-H_n(T)]G^{(N)}(D)+H_{n+1}(T)\} \quad (22)$$

여기에서 $E[B_o]$는 일반적인 M/G/1 대기모형의 busy period의 기대값을 나타내며 식 (4)에 표현되어 있고 $H_n(T)$와 $G^{(n)}(D)$는 식 (2)과 식 (3)에 각각 정의되어 있다. 또한 식 (22)을 사용하면 다음의 관계식이 성립함을 쉽게 증명할 수 있다.

$$\lim_{D\to 0} E[B_{Max(N,T,D)}] = E[B_{Max(N,T)}]$$
$$\lim_{N\to 1} E[B_{Max(N,T,D)}] = E[B_{Max(T,D)}]$$
$$\lim_{T\to 0} E[B_{Max(N,T,D)}] = E[B_{Max(N,D)}]$$

여기에서 $E[B_{Max(N,T)}]$, $E[B_{Max(T,D)}]$ 그리고 $E[B_{Max(N,D)}]$는 $Max(N,T)$, $Max(T,D)$ 그리고 $Max(N,D)$ 운용방침이 적용될 때 $M/G/1$ 대기모형의 busy period의 기대값을 뜻하며 식 (8), 식 (9), 그리고 식 (10)에 주어져 있으며, 또한 이들을 이용하면 N 운용방침, T 운용방침 그리고 D 운용방침이 $M/G/1$ 대기모형에 적용되었을 때의 busy period의 기대값, 즉 $E[B_N]$, $E[B_T]$ 그리고 $E[B_D]$을 식 (5), 식 (6), 그리고 식 (7)과 동일하게 유도할 수 있다. 이는 유도된 삼변수 $Max(N,T,D)$ 운용방침이 적용될 때의 busy period의 기대값이 정확하게 유도되었음을 의미한다. 다시 말해, 가상확률밀도함수를 $Max(N,T,D)$ 삼변수 운용방침에 적용하더라도 busy period의 기대값을 유도할 수 있음을 확인하였으며, 또한 삼변수 운용방침은 단순 그리고+ 이변수 운용방침들의 일반적인 형태이기 때문에 보다 광범위한 영역에 적용할 수 있음을 확인하였다.

5. 결 론

본 연구 결과의 활용방안 및 기대효과는 다음 관점에서 살펴볼 수 있다. 첫째, 조정 가능한 대기모형에 다양한 다변수 운용방침, 특히 D 운용방침이 포함되어 있는 경우, 가상확률밀도함수를 활용하면 쉽게 busy period의 기대값이 유도됨을 확인하였다. 둘째, 이와 유사한 방법이 개발되면 다양한 조정가능한 대기모형의 중요한 특성치를 쉽게 유도할 수 있는 가능성을 제시하였으며, 마지막으로 또 다른 형태의 삼변수운용방침의 분석에도 활용할 수 있음을 확인하였다. 예를 들면

$Med(N,T,D)$ 운용방침 : 시스템에 고객이 없으면 server는 창구를 폐쇄하고 다른 업무를 수행한다. 그 후, 서

비스를 기다리는 고객수가 N명이 되어야 서비스가 재개되는 N 운용방침의 조건, $mT(m=0,1,2,\cdots)$ 단위시간이 경과할 때 최소한 한명의 고객이 있어야 서비스가 재개되는 T 운용방침의 조건, 그리고 기다리는 모든 고객에게 소요되는 서비스 시간의 합이 최초로 규정된 값 D 단위시간보다 커야 서비스가 재개되는 D 운용방침의 조건들 중에서 처음으로 두 가지의 조건이 만족되는 순간 server는 수행중인 다른 업무를 중단하고 기다리는 고객들에게 서비스를 제공하기 시작하여 다시 고객이 없을 때까지 서비스 제공을 계속한다. 만약 $D\rightarrow\infty$이면 $Med(N, T, D)$ 운용방침은 $Max(N, T)$ 운용방침과 동일하게 되며, 만약 $D\rightarrow 0$이면 $Min(N, T)$과 동일하게 된다. 유사하게, 만약 $N\rightarrow\infty$이면 $Max(T, D)$ 운용방침, 만약 $N\rightarrow 1$이면 $Min(T, D)$ 운용방침과 각각 동일하게 됨을 알 수 있다. 마지막으로, 만약 $T\rightarrow\infty$ 그리고 $T\rightarrow 0$이면 $Max(N, D)$ 그리고 $Min(N, D)$ 운용방침과 각각 동일하게 된다.

참고문헌

[1] Balachandran, K. R. and Tijms, H.; "On the D-policy for the M/G/1 Queue," *Management Science*, 9 : 1073-1076, 1975.

[2] Brill, P. H. and Harris, C. M.; "Waiting Timrs for M/G/1 Queues with Service Time or Delay-Dependent Server Vacations," *Naval Research Logistics*, 39 : 775-787, 1992.

[3] Conolly, B.; Lecture Notes on Queueing Systems, Halsted, NY., 1975.

[4] Gakis, K. G., Rhee, H. K., and Sivazlian, B. D.; "Distributions and First Moments of the Busy and Idle Periods in Controllable M/G/1 Queueing Models with Simple and Dyadic Policies," *Stochastic Analysis and Applications*, 13(1) : 47-81, 1995.

[5] Heyman, D.; "The T-policy for the M/G/1 Queue," *Management Science*, 23(7) : 775-778, 1977.

[6] Kella, O. and Yechiali, U.; "Priorities in M/G/1 Queue with Server Vacations," *Naval Research Logistics*, 35 : 23-34, 1988.

[7] Kella, O.; "The Threshold Policy in the M/G/1 Queue with Server Vacations," *Naval Research Logistics*, 36 : 111-123, 1989.

[8] Kleinrock, L.; Queueing Systems, Theory, John Wiley and Sons, New York, NY., 1 : 1975.

[9] Rhee, H. K.; "Development of a New Methodology to find the Expected Busy Period for Controllable M/G/1 Queueing Models Operating under the Multi-variable Operating Policies : Concepts and Application to the Dyadic Policies", 대한산업공학회지, 23(4) : 729-739, 1997.

[10] Rhee, H. K.; "조정가능한 대기모형에 이변수 운용방침(Dyadic Policy)이 적용될 때 busy period의 기대값의 수리적 분석", 한남대학교 논문집, 32 : 141-153, 2002.

[11] Rhee, H. K. and Oh, H. S.; "삼변수 운용방침이 적용되는 M/G/1 대기모형에서 가상확률밀도함수를 이용한 busy period의 기대값 유도", 한국산업경영시스템학회지, 30(2) : 51-57, 2007.

[12] Rhee, H. K. and Sivazlian, B. D.; "Distribution of the Busy Period in a Controllable M/M/2 Queue Operating under the Triadic (0, K, N, M) Policy," *Journal of Applied Probability*, 27 : 425-432, 1990.

[13] Sivazlian, B. D. and Iyer, S. N.; "A Dyadic Age-Replacement Policy for a Periodically Inspected Equipment Items Subject to Random Deterioration," *European Journal of Operational Research*, 6 : 315-320, 1981.

[14] Teghem, J.; "Control of the Service Process in a Queueing System," *European Journal of Operational Research*, 23 : 141-158, 1986.

[15] Yadin, M. and Naor, P.; "Queueing System with Removable Service Station," *Operational Research Quarterly*, 14 : 93-405, 1963.