응용통계연구 (2008)
21(6), 1045–1063

소수연령 독립 가정에서 탈퇴율의 성질

이항석[1]

[1]성균관대학교 보험계리학과/수학과

(2008년 9월 접수, 2008년 10월 채택)

요 약

생명표(life table) 또는 다중탈퇴표(multiple decrement table)는 연령별로 1년 이내에 탈퇴가 발생할 확률을 나타내지만 보험의 탈퇴현상은 특정 연령에서 1년 이내 임의 시점에 탈퇴가 발생할 확률을 필요로 한다. 따라서 이러한 현상을 나타내는 소수연령(Fractional Age)에 대한 분포의 가정이 탈퇴율의 계산에 필수적인 요소이다. 실무에서는 UDD 가정을 이용하여 소수연령 분포에 대체하고 있다. 본 논문에서는 Lee (2008)의 다중탈퇴율과 절대탈퇴율의 전환 공식을 UDD 가정 대신에 보다 일반적인 가정인 소수연령 독립(FI: Fractional Age Independence) 가정하에서 연 기준의 절대탈퇴율을 월 기준의 다중탈퇴율로 전환하거나 연 기준의 다중탈퇴율을 월 기준의 절대탈퇴율로 전환하는 공식을 유도한다. 유도된 공식은 월 기준 대신에 일(day) 기준 또는 분기(quarter) 기준 또는 반기(semiannual) 기준 등으로도 전환 가능한 공식이다. 또한 월 기준의 절대탈퇴율에서 월 기준의 다중탈퇴율로 전환 가능한 공식도 제시한다. 추가적으로 다중탈퇴율이 FI 가정을 따를 때 절대탈퇴율에서 다중탈퇴율로 전환하는 공식도 유도한다. 여러 가지 유도된 공식은 Bowers 등 (1997)와 Lee (2008)에 있는 전환 공식의 일반적인 형태임을 확인할 수 있다. 또한 여러 가지 유도된 공식을 이용하여 수치 예를 통하여 절대탈퇴율과 다중탈퇴율의 전환 과정을 각각 설명한다.

주요용어: 다중탈퇴율, 절대탈퇴율, 소수연령 독립.

1. 서론

생명표(life table) 또는 다중탈퇴표(multiple decrement table)은 연령별로 1년 이내에 탈퇴가 발생할 확률을 나타내지만 보험의 탈퇴현상은 특정 연령에서 1년 이내 임의 시점에 탈퇴가 발생할 확률을 필요로 한다. 따라서 이러한 현상을 나타내는 소수연령(Fractional Age)에 대한 분포의 가정이 탈퇴율의 계산에 필수적인 요소이다. 실무에서는 UDD 가정을 소수연령 분포로 사용하고 있다. 본 논문에서는 Lee (2008)의 다중탈퇴율과 절대탈퇴율의 전환 공식을 UDD 가정 대신에 보다 일반적인 가정인 소수연령 독립(FI: Fractional Age Independence) 가정하에서 탈퇴율의 여러 성질을 유도한다.

보험회사에서 판매되는 여러 보험상품에서 사망에 대한 보험금 지급뿐만 아니라 해약에 대한 해약환급금 지급 및 장애 발생시 장애보험금 지급 등과 같은 여러 가지 원인에 따른 보험금 또는 환급금의 지급과 같은 현상을 다루기 위해서는 다중탈퇴율(탈퇴 원인별 발생 확률)이 필요하다. 또한 퇴직 연금 계리 및 공적 연금의 추계 부분에서도 다중탈퇴율은 중요한 업무 영역이다. 다중탈퇴율은 여러 가지 탈퇴 원인이 반영된 자료를 이용하여 만들어지므로 새로운 보험 상품을 개발할 때 또는 상품판매 초기에는 자료의 부족으로 다중탈퇴율을 계산하기 어려운 점이 있다. 이러한 점을 극복하기 위하여 단일 요인에 의

[1](110-745) 서울시 종로구 명륜동 3가 53, 성균관대학교 보험계리학과/수학과, 조교수.
Email: hangsuck@skku.edu

한 절대탈퇴율(absolute rate of decrement)을 이용하여 다중탈퇴율로 전환하는 방법에 대한 연구들이 이루어져 왔다. 절대탈퇴율은 다중탈퇴율(rate of decrement due to cause j)과 다르게 탈퇴를 특정한 요인만 고려하여 탈퇴 확률을 계산하는 과정으로 이루어져 있다. 또한 다중탈퇴율을 절대탈퇴율로 전환하여 사용할 필요도 있고 전환된 절대탈퇴율을 새로운 다중탈퇴표를 만드는데 이용될 수도 있다. 따라서 절대탈퇴율을 다중탈퇴율로 전환하는 방법과 다중탈퇴율을 절대탈퇴율로 전환하는 방법은 보험계리에서 중요한 부분이다.

다중탈퇴율 및 절대탈퇴율에 대한 선행연구는 다음과 같다. Shiu (1987)는 리만-스틸지 적분(Riemann-Stieltjes Integration)을 이용하여 다중탈퇴율을 절대탈퇴율로 표현하는 일반적인 정의를 활용하여 절대탈퇴율을 다중탈퇴로 전환하는 과정을 제시하였다. Daniel (1993)은 조건부 확률을 이용한 대안적인 절대탈퇴율을 정의하여 다중탈퇴모형과의 관계를 살펴보았다. Carriere (1994)는 다중탈퇴모형에 탈퇴원인들 사이의 종속성(dependency)을 반영한 연구를 진행하였다. Bowers 등 (1997)의 10장에서 다중탈퇴모형에 대한 자세한 설명과 절대탈퇴율과 다중탈퇴율 전환과정에 대하여 포괄적으로 다루고 있다. Willmot (1997)은 UDD 가정의 일반적인 경우인 FI(Fractional Age Independence) 가정에서 다중탈퇴모형을 포함한 여러 공식을 유도하였으며 Jones와 Mereu (2000, 2002)는 fractional age 가정에 여러 가지 분포를 고려하여 연구를 진행하였다. Lee (2008)은 UDD 가정에서 연 기준 절대탈퇴율을 월 기준 다중탈퇴율로 전환하는 공식과 UDD 가정 또는 상수탈퇴력 가정에서 연 기준 다중탈퇴율을 월 기준 절대탈퇴율로 전환하는 공식을 유도하였다.

실제 실무에서는 월 단위 보험료를 적용하는 상품이 많고 위험관리(Risk Management)에 월 단위로 이루어지는 경우가 많으므로 월(month) 기준의 다중탈퇴율이 필요한 경우가 많다. 본 논문에서는 Lee (2008)의 여러 공식을 UDD 가정 대신에 Willmot (1997)에서 사용한 보다 일반적인 가정인 소수 연령 독립(FI: Fractional Age Independence) 가정하에서 연 기준의 절대탈퇴율을 월 기준의 다중탈퇴율로 전환하거나 연 기준의 다중탈퇴율을 월 기준의 절대탈퇴율로 전환하는 공식을 유도한다. 유도된 공식은 월 기준 대신에 일(day) 기준 또는 분기(quarter) 기준 또는 반기(semiannual) 기준 등으로도 전환 가능한 공식이다. 또한 월 기준의 절대탈퇴율에서 월 기준의 다중탈퇴율로 전환 가능한 공식도 제시한다. 추가적으로 다중탈퇴율이 FI 가정을 따를 때 절대탈퇴율에서 다중탈퇴율로 전환하는 공식도 유도한다. 본 논문은 Shiu (1987)의 경우처럼 리만-스틸지 적분을 이용하여 다중탈퇴율을 표현하여 논의를 전개하였다. 다중탈퇴율을 리만 적분(Riemann Integration)으로 표현하는 것에 비하여 리만-스틸지 적분으로 표현하는 것이 일반적이기 때문이다.

본 논문의 구성은 서론에 이어서 FI 가정의 특성과 다중탈퇴율과 절대탈퇴율의 기본 성질 및 리만-스틸지 적분을 살펴보고 절대탈퇴율에서 다중탈퇴율로 전환하는 공식을 유도하고 다중탈퇴율을 절대탈퇴율로 전환하는 공식을 유도해 본다. 절대탈퇴율에서 다중탈퇴율로 전환하는 과정에서 절대탈퇴율이 FI 가정를 따른다고 한다. 다중탈퇴율에서 절대탈퇴율로 전환하는 과정에서는 다중탈퇴율이 FI 가정를 따르는 경우에 공식을 유도한다. 추가적으로 다중탈퇴율이 FI 가정을 따를 때 연 기준 절대탈퇴율에서 월 기준 다중탈퇴율로 전환하는 공식도 유도한다. 유도된 공식은 Bowers 등 (1997) 또는 Lee (2008)에 있는 전환 공식의 일반적인 형태임을 확인할 수 있다. 또한 여러 가지 유도된 공식을 이용하여 수치 예를 통하여 절대탈퇴율과 다중탈퇴율의 전환 과정을 각각 설명한다.

2. FI 가정과 탈퇴율의 기본 성질 및 리만-스틸지 적분

먼저 FI(Fractional Age Independence) 가정하에서 여러 성질들을 논의 한다. 그리고 다중탈퇴율과 절대탈퇴율의 상호 전환에 필요한 다중탈퇴율의 기본성질을 먼저 논의하고 절대탈퇴율의 기본 성질을 살

펴본다. 마지막으로 확률을 표현하는데 필요한 리만-스틸지 적분의 특성을 다중탈퇴율에 적용하여 본다.

2.1. 소수연령 독립 가정과 소수연령의 분포

우선 FI 가정에 대하여 논의하여 보자. FI 가정에 대한 자세한 논의는 Willmot (1997)을 참고하면 된다. $T(x)$는 연령이 x인 사람의 미래 생존기간을 나타내며 $K(x)$는 $T(x)$를 초과하지 않는 최대 정수 부분으로 정의하고 소수 부분은 $S = T(x) - K(x)$로 정의하면 $T(x) = K(x) + S$가 된다. S를 소수연령(Fractional Age)로 표현하며 FI 가정은 확률변수 $K(x)$와 S의 독립(Statistical Independence)을 의미한다. 여기서 확률변수 $K(x)$와 S의 관계에 대하여 살펴보자. $0 \le s \le 1$이고 k는 정수일 때 다음의 확률은

$$\Pr(K(x) = k,\ S \le s) = \Pr(K(x) = k)\Pr(S \le s \,|\, K(x) = k) \tag{2.1}$$

으로 표현 가능하며 조건부 확률을 다음과 같이 가정한다.

$$\Pr(S \le s \,|\, K(x) = k) = H(s). \tag{2.2}$$

S의 분포함수는

$$\Pr(S \le s) = \sum_{k=0}^{\infty} \Pr(S \le s \,|\, K(x) = k)\Pr(K = k) = H(s) \tag{2.3}$$

가 된다. 따라서 $K(x)$와 S의 확률은

$$\Pr(K(x) = k,\ S \le s) = \Pr(K(x) = k)\Pr(S \le s) \tag{2.4}$$

이 되어 두 확률의 곱이 된다. 따라서 식 (2.2)는 $K(x)$와 S가 독립이라는 사건과 동치 관계이다. 즉, FI 가정은 식 (2.2)를 만족하거나 $K(x)$와 S가 독립을 의미한다. $0 \le s \le 1$일 때 이러한 성질을 사망률과 같은 위험율에 이용하면

$${}_sq_x = \Pr(T(x) \le s) = \Pr(K(x) = 0,\ S \le s) = \Pr(K(x) = 0) \cdot H(x) = H(s) \cdot q_x \tag{2.5}$$

가 되고

$${}_sp_x = 1 - H(s) \cdot q_x \tag{2.6}$$

가 된다. 한편 사력(force of mortality)은

$$\mu_x(t) = \frac{H'(t) \cdot q_x}{1 - H(t) \cdot q_x} \tag{2.7}$$

가 되고

$${}_sq_{x+t} = \frac{\{H(t+s) - H(t)\} \cdot q_x}{1 - H(t) \cdot q_x} \tag{2.8}$$

이다. Willmot (1997)에서 $H(s)$는 $0 \le s \le 1$인 임의의 분포함수로 가정하고 있지만 본 논문에서 $H(s)$를 다중탈퇴율과 절대탈퇴율을 리만-스틸지 적분으로 표현하고 있으므로 리만-스틸지 적분의 존재성을 만족하기 위해서 $H(s)$가 미분 가능한 함수이고 도함수가 연속이라는 가정에서 사용한다.

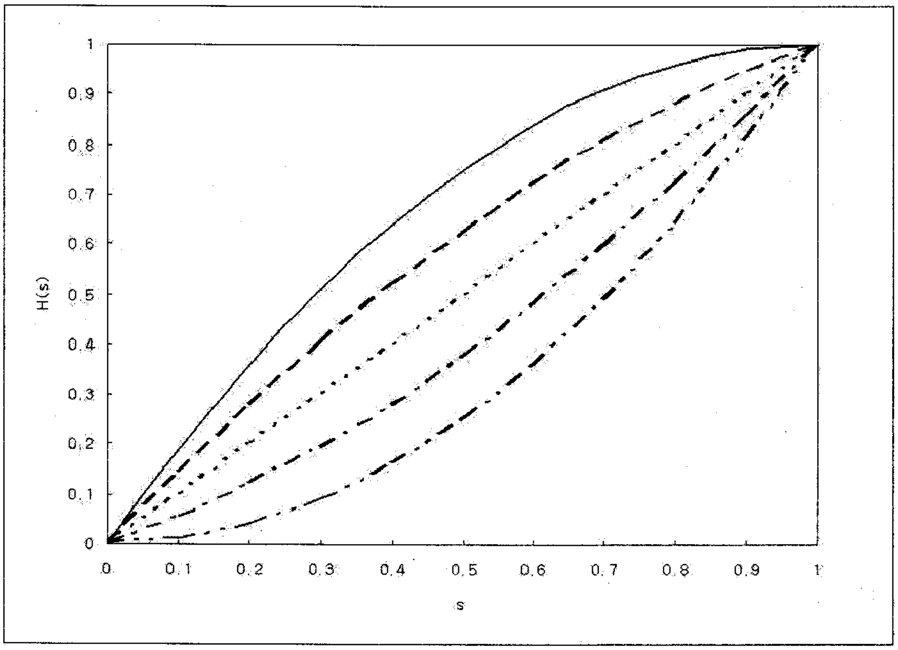

그림 2.1. GUDD 분포함수의 그래프(위의 그래프부터 $\theta = 0,\ 0.25,\ 0.5,\ 0.75,\ 1$)

$H(s)$에 대하여 예를 들어 설명하자. $H(s)$는 $0 \le s \le 1$에서 확률현상을 나타내는 확률분포함수이다. 먼저 편리한 분포의 하나인 베타분포(Beta distribution)도 $H(s)$의 예가 될 수 있다. 또한 실무에서 많이 사용하는 UDD 가정도 $H(s) = s$인 경우이다. 한편 해약률과 같이 분포함수의 모양이 점프(jump)가 있는 경우에도 점프를 반영한 $H(s)$의 정의가 가능하므로 유용하게 이용할 수 있다. 이러한 다양한 $H(s)$의 예에 대한 설명은 Willmot (1997, p.86)을 참고하라. 만약 분포함수를

$$H(s) = \theta \cdot s^2 + (1-\theta)\left\{1 - \left(1 - s^2\right)\right\}, \quad 0 \le s \le 1,\ 0 \le \theta \le 1 \tag{2.9}$$

로 정의하면 GUDD(Generalized uniform distribution of decrement)로 명명된다. 특히 $\theta = 1/2$인 경우는

$$H(s) = s \tag{2.10}$$

가 되고 UDD의 분포함수가 된다. 그림 2.1을 참조하면 θ가 커지면 분포함수의 값이 작아짐을 확인할 수 있다. 가운데 있는 직선(점선)의 분포함수가 UDD를 나타낸다. 즉 θ가 작는 경우 초기 발생 확률이 크고 θ가 큰 경우에는 나중에 발생 확률이 높아짐을 확인할 수 있다. $\theta = 1/2$인 경우에는 발생 확률이 $0 \le s \le 1$에서 균등함을 알 수 있다. 식 (2.9)는 θ에 따라서 $0 \le s \le 1$에서 발생 확률을 다양하게 나타낼 수 있는 분포이며 UDD 가정을 대체하여 사용할 수 있다. 본 논문에서 여러 가지 유도된 공식에 GUDD 가정을 적용하여 수치 예를 제시한다.

2.2. 다중탈퇴율과 절대탈퇴율의 기본 성질

이제 다중탈퇴율의 기본 성질을 살펴 보자. 다중탈퇴율은 탈퇴 원인이 한 개가 아닌 m개로서 탈퇴 원인

을 $j = 1, \ldots, m$으로 구별하여 표시한다. 연령이 x인 사람이 미래에 탈퇴가 발생하는 시점을 나타내는 확률변수 $T(x)$와 탈퇴 원인을 나타내는 확률변수 J로 다중탈퇴 현상을 표현한다. 시점 t 이내에 탈퇴 원인 j에 의하여 탈퇴가 발생할 확률(다중탈퇴율)은 다음과 같이 정의된다.

$$ {}_tq_x^{(j)} = \Pr(T(x) \le t,\ J = j) \tag{2.11} $$

탈퇴 원인에 상관없이 시점 t 이내에 탈퇴가 발생할 총탈퇴율은

$$ {}_tq_x^{(\tau)} = \Pr(T(x) \le t) = \sum_{j=1}^{m} {}_tq_x^{(j)} \tag{2.12} $$

가 되며 총탈퇴율은 다중탈퇴율의 합과 같다. 시점 t 이후에 탈퇴가 발생할 확률은

$$ {}_tp_x^{(\tau)} = \Pr(T(x) > t) = 1 - {}_tq_x^{(\tau)} \tag{2.13} $$

이다. 시점 t 이내에 탈퇴가 발생하지 않을 확률이므로 유지율(persistency rate)로 불리기도 한다. 탈퇴 원인 j에 의한 탈퇴력(force of decrement due to cause j)은 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$ \mu_x^{(j)}(t) = \frac{d_t q_x^{(j)}}{dt} / {}_tp_x^{(\tau)} \tag{2.14} $$

또한 총탈퇴력은

$$ \mu_x^{(\tau)}(t) = \frac{d_t q_x^{(\tau)}}{dt} \Big/ {}_tp_x^{(\tau)} = \frac{d\left(\sum_{j=1}^{m} {}_tq_x^{(j)}\right)}{dt} \Big/ {}_tp_x^{(\tau)} = \sum_{j=1}^{m} \mu_x^{(j)}(t) \tag{2.15} $$

이며 개별탈퇴력의 합과 같다. 앞에서 정의된 탈퇴력이 존재하면 다중탈퇴율은 식 (2.14)에 $t = z$를 대입하고 ${}_zp_x^{(\tau)}$를 식 (2.14)의 양변에 곱하여 적분하면

$$ {}_tq_x^{(j)} = \int_0^t {}_zp_x^{(\tau)} \mu_x^{(j)}(z)dz \tag{2.16} $$

과 같이 적분의 형태로 표현이 가능하다. 또한 총탈퇴율도 식 (2.12)와 (2.16)을 활용하면

$$ {}_tq_x^{(\tau)} = \int_0^t {}_zp_x^{(\tau)} \mu_x^{(\tau)}(z)dz \tag{2.17} $$

가 된다.

다음으로 절대탈퇴율의 기본 성질을 살펴보자. 절대탈퇴율은 특정 탈퇴원인만을 고려하여 탈퇴 현상을 나타내는 확률이다. 특정 탈퇴 원인에 대한 절대유지율(절대생존율)은

$$ {}_tp_x'^{(j)} = \exp\left(-\int_0^t \mu_x^{(j)}(z)dz\right) \tag{2.18} $$

로 정의하며 절대탈퇴율은

$$ {}_tq_x'^{(j)} = 1 - {}_tp_x'^{(j)} \tag{2.19} $$

이다. 다중탈퇴율과 구별하기 위하여 기호 p와 q의 위첨자에 표시 $'$를 한다. 따라서 탈퇴력은 식

(2.18)과 (2.19)를 이용하면

$$\mu_x^{(j)}(t) = \frac{d_t q_x'^{(j)}}{dt} \Big/ {}_t p_x'^{(j)} \tag{2.20}$$

이고 절대유지율은 두 개의 절대유지율 곱으로 표현된다. 즉 식 (2.18)에 $t = t + s$를 대입하고 적분의 성질을 적용하면

$${}_{t+s}p_x'^{(j)} = {}_t p_x'^{(j)} \cdot {}_s p_{x+t}'^{(j)} \tag{2.21}$$

가 된다. 또한 t 시점 이후에서 시점 $t+s$ 이내에 절대탈퇴가 발생할 확률은

$${}_{t|s}q_x'^{(j)} = {}_t p_x'^{(j)} \cdot {}_s q_{x+t}'^{(j)} \tag{2.22}$$

이다. 식 (2.22)뿐만 아니라 위에서 언급한 다중탈퇴율과 절대탈퇴율의 여러 성질들은 Bowers 등 (1997)에서 확인 할 수 있다.

2.3. 리만-스틸지 적분과 탈퇴율

Shiu (1987)는 리만-스틸지 적분을 이용하여 다중탈퇴율을 절대탈퇴율로 표현하였다. 이러한 접근이 Bowers 등 (1997)에 사용된 리만 적분보다 일반적인 경우에도 폭넓게 사용될 수 있으므로 본 논문의 확률 표현은 가급적 리만-스틸지 적분으로 나타낸다. 특히 탈퇴력이 존재하지 않는 경우에는 확률 또는 기대값을 적분형태로 나타내는데 편리하다. 리만-스틸지 적분에 대한 상세한 논의는 Apostol (1974)를 참조하면 도움이 된다. 변수 z에 대한 리만-스틸지 적분으로 다중탈퇴율을 정의하면

$${}_t q_x^{(j)} = \int_0^t \prod_{i \neq j} {}_z p_x'^{(i)} d\left({}_z q_x'^{(i)}\right) \tag{2.23}$$

이다. Bowers 등 (1997)에서 탈퇴력 $\mu_x^{(j)}(z)$가 존재하는 경우에는 다중탈퇴율의 리만 적분 표현은

$$\begin{aligned}
{}_t q_x^{(j)} &= \int_0^t {}_t p_x^{(\tau)} \mu_x^{(j)}(z) dz \\
&= \int_0^t \left(\prod_i {}_z p_x'^{(i)} \right) \mu_x^{(j)}(z) dz \\
&= \int_0^t \left(\prod_{i \neq j} {}_z p_x'^{(i)} \right) \cdot {}_z p_x'^{(j)} \mu_x^{(j)}(z) dz
\end{aligned} \tag{2.24}$$

이 된다. 여기서

$$d\left({}_z q_x'^{(j)}\right) = {}_z p_x'^{(j)} \mu_x^{(j)}(z) dz \tag{2.25}$$

이므로 리만-스틸지 적분의 성질인 식 (2.27)에 의해 식 (2.23)은 식 (2.24)와 같다. 본 논문에서 많이 사용될 리만-스틸지 적분의 성질을 소개하면 다름과 같다. 연속함수 $f(z)$와 증가함수 $g(z)$ 및 상수 c에 대하여

$$\int_a^b f(z) d\left(c \cdot g(z)\right) = c \int_a^b f(z) d\left(g(z)\right) \tag{2.26a}$$

이고

$$\int_a^b f(z)d\left(g(z)+c\right) = \int_a^b f(z)d\left(g(z)\right) \tag{2.26b}$$

이다. 여기서 연속인 단조증가함수 $h(x)$에 대하여 $a=h(c)$, $b=h(d)$일 때

$$\int_a^b f(z)d\left(g(z)\right) = \int_c^d f(h(x))d\left(g(h(x))\right) \tag{2.26c}$$

가 된다. $g(z)$가 미분 가능이고 도함수가 연속이면

$$\int_a^b f(z)d\left(g(z)\right) = \int_a^b f(z)\frac{d\left(g(z)\right)}{dz}dz \tag{2.27}$$

이다. $n \neq -1$일 때 $f(z)$가 미분 가능이고 도함수가 연속이면 식 (2.27)을 활용하면

$$\int_a^b f(z)^n d\left(f(z)\right) = \frac{1}{n+1}\left\{f(b)^{n+1} - f(a)^{n+1}\right\} \tag{2.28}$$

이 된다.

3. 절대탈퇴율이 FI 가정을 따르는 경우

실제 실무에서는 월(month) 기준의 다중탈퇴율이 필요한 경우가 많으므로 연 기준의 절대탈퇴율을 월 기준의 다중탈퇴율로 전환하는 공식을 유도한다. 유도된 공식은 월 기준 대신에 일(day) 기준 또는 분기(quarter) 기준 또는 반기(semiannual) 기준 등으로도 전환 가능한 공식이다. 변수 t와 s는 $\{0 \le t < 1,\ 0 < s+t \le 1\}$인 경우로 한정한다. 여기서 절대탈퇴율이 FI 가정을 따른다고 하면

$${}_tq_x^{\prime(j)} = H(t)\cdot q_x^{\prime(j)} \tag{3.1}$$

이 성립하고

$${}_tp_x^{\prime(j)} = 1 - H(t)\cdot q_x^{\prime(j)} \tag{3.2}$$

과

$${}_{t|z}q_x^{\prime(j)} = \left\{H(t+z) - H(t)\right\}\cdot q_x^{\prime(j)} \tag{3.3a}$$

및

$${}_sq_{x+t}^{\prime(j)} = \frac{\left\{H(t+s) - H(t)\right\}\cdot q_x^{\prime(j)}}{1 - H(t)\cdot q_x^{\prime(j)}} \tag{3.3b}$$

이 된다. 자세한 내용은 Willmot (1997)을 참고하면 된다.

이제 변수 z에 대한 리만-스틸지 적분으로 다중탈퇴율을 표현하여 계산하면

$$\begin{aligned}
{}_sq_{x+t}^{(j)} &= \int_0^s \prod_{i\neq j} {}_zp_{x+t}^{\prime(j)} d\left({}_zq_{x+t}^{\prime(j)}\right) \\
&= \int_0^s \prod_{i\neq j}\left(\frac{{}_{z+t}p_x^{\prime(j)}}{{}_tp_x^{\prime(j)}}\right) d\left(\frac{{}_{t|z}q_x^{\prime(j)}}{{}_tp_x^{\prime(j)}}\right)
\end{aligned}$$

$$= \left(\prod_{i=1}^{m} \frac{1}{{}_tp_x'^{(j)}}\right) \int_0^s \prod_{i \neq j} \left({}_{z+t}p_x'^{(j)}\right) d\left({}_{t|z}q_x'^{(j)}\right)$$

$$= \left(\prod_{i=1}^{m} \frac{1}{1 - H(t) \cdot q_x'^{(j)}}\right) q_x'^{(j)} \int_0^s \prod_{i \neq j} \left({}_{z+t}p_x'^{(j)}\right) d(H(t+z) - H(t)) \tag{3.4}$$

이 된다. 식 (3.4)의 첫 번째 등호는 식 (2.23)의 적용이며 두 번째 등호는 식 (2.22)를 이용한 것이다. 식 (3.4)의 세 번째 등호는 식 (2.26a)을 활용했고 네 번째 등호는 식 (3.3a)와 (2.26a)을 적용하였다. 위 식 (3.4)의 마지막에 있는 적분 부분의 계산은 식 (2.26b)와 (3.2) 및 변수변환 ($z = z + t$)에 관한 식 (2.26c)를 이용하면 다음과 같다.

$$\int_0^s \prod_{i \neq j} \left({}_{z+t}p_x^{(j)}\right) dH(t+z) = \int_0^s \prod_{i \neq j} \left\{1 - H(z+t) \cdot q_x'^{(j)}\right\} dH(t+z)$$

$$= \int_t^{t+s} \prod_{i \neq j} \left\{1 - H(z) \cdot q_x'^{(j)}\right\} dH(z). \tag{3.5}$$

적분 내부에 있는 z의 함수는

$$\prod_{i \neq j} \left\{1 - H(z) \cdot q_x'^{(j)}\right\} = 1 - H(z) \sum_{i \neq j} q_x'^{(j)} + H(z)^2 \sum_{\substack{i_1, i_2 \neq j \\ i_1 < i_2}} q_x'^{(i_1)} q_x'^{(i_2)} + \cdots +$$

$$\{-H(z)\}^k \sum_{\substack{i_1, \ldots, i_k \neq j \\ i_1 < \cdots < i_k}} q_x'^{(i_1)} \cdots q_x'^{(i_k)} + \cdots + \{-H(z)\}^{m-1} \prod_{i \neq j} q_x'^{(j)} \tag{3.6}$$

와 같이 z의 함수가 된다. 단 $i_1, i_2, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, m\}$. 이 함수를 z에 대하여 식 (2.28)을 이용하여 리만-스틸지 적분($t \leq z \leq t+s$)을 하면 식 (3.5)는

$$H(t+s) - H(t) - \frac{1}{2}\left\{H(t+s)^2 - H(t)^2\right\} \sum_{i \neq j} q_x'^{(i)} + \frac{1}{3} \sum_{\substack{i_1, i_2 \neq j \\ i_1 < i_2}} q_x'^{(i_1)} q_x'^{(i_2)}$$

$$+ \cdots + \frac{1}{k+1}(-1)^k \left\{H(t+s)^{k+1} - H(t)^{k+1}\right\} \sum_{\substack{i_1, \ldots, i_k \neq j \\ i_1 < \cdots < i_k}} q_x'^{(i_1)} \cdots q_x'^{(i_k)}$$

$$+ \cdots + \frac{1}{m}(-1)^{m-1}\left\{H(t+s)^m - H(t)^m\right\} \prod_{i \neq j} q_x'^{(i)} \tag{3.7}$$

이 된다. 식 (3.7)을 식 (3.4)의 적분부분에 대체하면 다중탈퇴율은

$$ {}_sq_{x+t}^{(j)} = q_x'^{(j)} \left(\prod_{i=1}^{m} \frac{1}{1 - H(t) \cdot q_x'^{(i)}}\right)$$

$$\times \left[H(t+s) - H(t) + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k+1}(-1)^k \left\{H(t+s)^{k+1} - H(t)^{k+1}\right\} \sum_{\substack{i_1, \ldots, i_k \neq j \\ i_1 < \cdots < i_k}} q_x'^{(i_1)} \cdots q_x'^{(i_k)}\right] \tag{3.8}$$

이 된다. 참고로 이 공식에서 $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$의 가능한 경우의 수는 조합수 ${}_{m-1}C_k$이다.

식 (3.8)의 특수한 경우에 대하여 살펴보자. $H(0) = 0$과 $H(1) = 1$이므로 $t = 0, s = 1$일 때 $\prod_{i=1}^{m} 1/\{1 - H(t) \cdot q_x'^{(i)}\} = 1$, $H(t+s)^{k+1} - H(t)^{k+1} = 1$이므로 식 (3.8)은 다음의 공식이 된

표 3.1. GUDD 가정에서 다중탈퇴율 ${}_{1/12}q^{(1)}_{x+n/12}$로 전환($q'^{(1)}_x = 0.2,\ q'^{(2)}_x = 0.3,\ q'^{(3)}_x = 0.4$)

n	$\theta = 0$	$\theta = 0.25$	$\theta = 0.5$	$\theta = 0.75$	$\theta = 1$
0	0.0301913	0.0232861	0.0161852	0.0088859	0.0013855
1	0.0285269	0.0225163	0.0164446	0.0103180	0.0041420
2	0.0266737	0.0216774	0.0167120	0.0117838	0.0068979
3	0.0246273	0.0207678	0.0169877	0.0132896	0.0096749
4	0.0223860	0.0197862	0.0172721	0.0148423	0.0124950
5	0.0199501	0.0187316	0.0175654	0.0164491	0.0153804
6	0.0173236	0.0176037	0.0178679	0.0181176	0.0183538
7	0.0145134	0.0164027	0.0181802	0.0198560	0.0214391
8	0.0115307	0.0151292	0.0185023	0.0216731	0.0246612
9	0.0083910	0.0137847	0.0188348	0.0235781	0.0280457
10	0.0051145	0.0123714	0.0191778	0.0255800	0.0316176
11	0.0017265	0.0108920	0.0195316	0.0276878	0.0353987

다.

$$q^{(j)}_x = q'^{(j)}_x \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k+1}(-1)^k \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_k \neq j \\ i_1<\cdots<i_k}} q'^{(i_1)}_x \cdots q'^{(i_k)}_x \right\}. \tag{3.9}$$

식 (3.9)는 연 기준의 절대탈퇴율을 연 기준의 다중탈퇴율로 전환하는 공식이다. 주목할 점은 식 (3.9)는 $H(s)$의 분포형태에 의존하지는 않는다. 월(month) 기준의 다중탈퇴율로 표현하는 방법은 식 (3.8)에 $s = 1/12,\ t = n/12$(단, $n = 0, 1, \ldots, 11$)을 대입하면

$$\begin{aligned} {}_{\frac{1}{12}}q^{(j)}_{x+\frac{n}{12}} = q'^{(j)}_x \left\{ \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{1 - H\left(\frac{n}{12}\right) \cdot q'^{(i)}_x} \right\} \times \Bigg[H\left(\frac{n+1}{12}\right) - H\left(\frac{n}{12}\right) + \\ \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k+1}(-1)^k \left\{ H\left(\frac{n+1}{12}\right)^{k+1} - H\left(\frac{n}{12}\right)^{k+1} \right\} \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_k \neq j \\ i_1<\cdots<i_k}} q'^{(i_1)}_x \cdots q'^{(i_k)}_x \Bigg] \end{aligned} \tag{3.10}$$

이 된다. 분기 기준으로 전환은 $s = 1/4,\ t = n/4$ (단, $n = 0,\ 1,\ 2,\ 3$)을 식 (3.8)에 대입하면 된다.

수치 예를 통하여 절대탈퇴율이 FI 가정의 특수한 형태인 GUDD 가정을 따르는 경우 다중탈퇴율로 전환하는 공식의 적용 과정을 살펴보자. 위의 공식 (3.10)($m = 3$의 경우)을 예를 들어 설명해 보자. $q'^{(1)}_x = 0.2,\ q'^{(2)}_x = 0.3,\ q'^{(3)}_x = 0.4$라고 가정하고 $s = 1/12,\ t = n/12$(단, $n = 0, 1, \ldots, 11$)인 경우로 GUDD 가정하에서 $H(s) = \theta \cdot s^2 + (1-\theta)\{1 - (1-s)^2\},\ 0 \le s \le 1,\ 0 \le \theta \le 1$이다. $\theta = 0,\ 0.25,\ 0.5,\ 0.75,\ 1$인 경우로 나누어서 식 (3.10)을 이용하여 계산하면 표 3.1이 된다. $\theta = 0.5$인 경우는 UDD 가정하에서 계산한 것과 같다.

표 3.1은 ${}_{1/12}q^{(1)}_{x+n/12}$의 결과만 제시하고 있다. 다중탈퇴율 ${}_{1/12}q^{(2)}_{x+n/12}$와 ${}_{1/12}q^{(3)}_{x+n/12}$는 동일한 과정을 거치면 결과를 얻을 수 있다. θ의 값이 작은 경우에는 ${}_{1/12}q^{(1)}_{x+n/12}$의 값이 n이 증가할 때 커지는 경향이 있으며 θ의 값이 큰 경우에는 ${}_{1/12}q^{(1)}_{x+n/12}$의 값이 n이 증가할 때 작아지는 경향이 있다. 그림 3.1를 참조하면 이러한 경향을 확인할 수 있다.

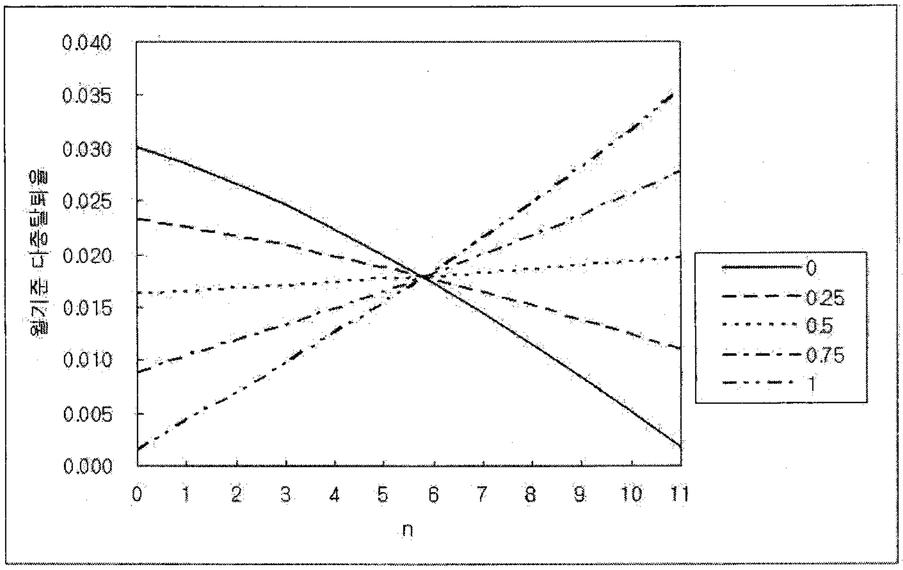

그림 3.1. GUDD 가정에서 전환된 다중탈퇴율 ${}_{1/12}q^{(1)}_{x+n/12}$의 그래프($\theta = 0,\ 0.25,\ 0.5,\ 0.75,\ 1$)

4. 월 기준 절대탈퇴율과 월 기준 다중탈퇴율의 관계

이제 월 기준 절대탈퇴율에서 월 기준 다중탈퇴율 공식을 유도하여 본다. $\{0 \le t < 1,\ 0 < s+t \le 1\}$인 경우로 u가 $0 \le u \le 1$인 경우를 고려한다. FI 성질을 이용하면 다음의 관계식을 알 수 있다.

$$
\begin{aligned}
{}_{u\cdot s}q'^{(j)}_{x+t} &= \frac{{}_{t|u\cdot s}q'^{(j)}_{x}}{{}_{t}p'^{(j)}_{x}} \\
&= \frac{\{H(t+u\cdot s)-H(t)\}\cdot q'^{(j)}_{x}}{{}_{t}p'^{(j)}_{x}} \\
&= \frac{H(t+u\cdot s)-H(t)}{H(t+s)-H(t)}\cdot\frac{{}_{t|s}q'^{(j)}_{x}}{{}_{t}p'^{(j)}_{x}} \\
&= \frac{H(t+u\cdot s)-H(t)}{H(t+s)-H(t)}\cdot{}_{s}q'^{(j)}_{x+s},
\end{aligned} \tag{4.1}
$$

여기서 식 (4.1)의 첫 번째 등호는 식 (2.22)의 응용이며 두 번째와 세 번째 등호는 식 (3.3a)를 적용했으며 마지막 등호는 식 (2.22)를 이용하였다. 연령이 $(x+t)$인 사람이 탈퇴원인 j에 의한 $u\cdot s$시점 이내에 탈퇴할 절대탈퇴율은 u의 증가함수이다. 이 관계식은 아래의 식 (4.3)을 전개하는데 중요한 요소로 활용된다. 식 (2.23)을 이용하여 다중탈퇴율을 변수 z에 대한 리만-스틸지 적분으로 정의하면

$$
\begin{aligned}
{}_{s}q'^{(j)}_{x+t} &= \int_0^s \prod_{i\neq j} {}_{z}p'^{(i)}_{x+t}\, d\left({}_{z}q'^{(j)}_{x+t}\right) \\
&= \int_0^s \prod_{i\neq j} {}_{z}p'^{(i)}_{x+t}\, d\left(\frac{{}_{t|z}q'^{(j)}_{x}}{{}_{t}p'^{(j)}_{x}}\right)
\end{aligned}
$$

$$= \int_0^s \left(\prod_{i \neq j} {}_z p'^{(i)}_{x+t} \right) \frac{q'^{(j)}_x}{{}_t p'^{(j)}_x} d(H(t+z) - H(t)) \tag{4.2}$$

된다. 여기서 식 (4.2)의 두 번째 등호는 식 (2.22)의 응용이며 세 번째 등호는 식 (3.3a)와 (2.26a)을 적용하였다. 식 (4.2)의 적분을 식 (2.26c)를 이용하여 변수변환 ($u = z/s$)하면 u에 대한 리만-스틸지 적분으로 표현되며

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \left(\prod_{i \neq j} {}_{u \cdot s} p'^{(i)}_{x+t} \right) \frac{q'^{(j)}_x}{{}_t p'^{(j)}_x} \frac{H(t+s) - H(t)}{H(t+s) - H(t)} d\{H(t + u \cdot s) - H(t)\} \\
&= {}_s q'^{(j)}_{x+t} \int_0^1 \prod_{i \neq j} {}_{u \cdot s} p'^{(i)}_{x+t} d \left\{ \frac{H(t+u \cdot s) - H(t)}{H(t+s) - H(t)} \right\} \\
&= {}_s q'^{(j)}_{x+t} \int_0^1 \prod_{i \neq j} \left(1 - {}_{u \cdot s} q'^{(i)}_{x+t} \right) d \left\{ \frac{H(t+u \cdot s) - H(t)}{H(t+s) - H(t)} \right\} \\
&= {}_s q'^{(j)}_{x+t} \int_0^1 \prod_{i \neq j} \left\{ 1 - \frac{H(t+u \cdot s) - H(t)}{H(t+s) - H(t)} \cdot {}_s q'^{(i)}_{x+t} \right\} d \left\{ \frac{H(t+u \cdot s) - H(t)}{H(t+s) - H(t)} \right\} \\
&= {}_s q'^{(j)}_{x+t} \int_0^1 \prod_{i \neq j} \left(1 - u^* \cdot {}_s q'^{(i)}_{x+t} \right) du^*
\end{aligned} \tag{4.3}$$

이 된다. 식 (4.3)의 첫 번째 등호는 식 (3.2)와 (3.3b) 및 (2.26a)를 이용하였고 두 번째 등호는 식 (2.19)를 활용하였고 세 번째 등호는 식 (4.1)을 이용하였다. 마지막 등호는

$$u^* = \frac{H(t+u \cdot s) - H(t)}{H(t+s) - H(t)}$$

로 변수변환하여 식 (2.26c)를 적용하였다. 식 (4.3)의 마지막 적분 내부에 있는 u^*의 함수는 다음과 같이 전개가 가능하다.

$$\begin{aligned}
\prod_{i \neq j} \left(1 - u^* \cdot {}_s q'^{(i)}_{x+t} \right) &= 1 - u^* \sum_{i \neq j} {}_s q'^{(i)}_{x+t} + (u^*)^2 \sum_{\substack{i_1, i_2 \neq j \\ i_1 < i_2}} {}_s q'^{(i_1)}_{x+t} \cdot {}_s q'^{(i_2)}_{x+t} + \cdots + \\
&\quad (u^*)^k \sum_{\substack{i_1, \ldots, i_2 \neq j \\ i_1 < \cdots < i_2}} {}_s q'^{(i_1)}_{x+t} \cdots {}_s q'^{(i_2)}_{x+t} + \cdots + (-u^*)^{m-1} \prod_{i \neq j} {}_s q'^{(i)}_{x+t}
\end{aligned} \tag{4.4}$$

이것은 u^*의 다항 함수이고 u^*의 차수와 절대탈퇴율의 곱의 개수가 같은 특성이 있다. 이 다항 함수를 u^*에 대하여 정적분을 하면

$$\int_0^1 \prod_{i \neq j} \left(1 - u^* \cdot {}_s q'^{(i)}_{x+t} \right) du^* = 1 + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k+1} (-1)^k \sum_{\substack{i_1, \ldots, i_k \neq j \\ i_1 < \cdots < i_k}} {}_s q'^{(i_1)}_{x+t} \cdots {}_s q'^{(i_k)}_{x+t} \tag{4.5}$$

이 된다. 따라서 적분 결과를 식 (4.3)의 적분 부분으로 대체하면 다중탈퇴율은

$${}_q q^{(j)}_{x+t} = {}_s q'^{(j)}_{x+t} \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k+1} (-1)^k \sum_{\substack{i_1, \ldots, i_k \neq j \\ i_1 < \cdots < i_k}} {}_s q'^{(i_1)}_{x+t} \cdots {}_s q'^{(i_k)}_{x+t} \right\} \tag{4.6}$$

표 4.1. GUDD 가정에서 다중탈퇴율 ${}_{1/12}q^{(1)}_{x+n/12}$과 ${}_{1/12}q^{(2)}_{x+n/12}$ 및 ${}_{1/12}q^{(3)}_{x+n/12}$로 전환($q^{(1)}_x = 0.2$, $q^{(2)}_x = 0.3$, $q^{(3)}_x = 0.4$, $\theta = 0.25$)

n	${}_{\frac{1}{12}}q'^{(1)}_{x+\frac{n}{12}}$	${}_{\frac{1}{12}}q'^{(2)}_{x+\frac{n}{12}}$	${}_{\frac{1}{12}}q'^{(3)}_{x+\frac{n}{12}}$	${}_{\frac{1}{12}}q^{(1)}_{x+\frac{n}{12}}$	${}_{\frac{1}{12}}q^{(2)}_{x+\frac{n}{12}}$	${}_{\frac{1}{12}}q^{(3)}_{x+\frac{n}{12}}$
0	0.0243056	0.0364583	0.0486111	0.0232861	0.0351435	0.0471486
1	0.0234875	0.0356757	0.0481752	0.0225163	0.0344108	0.0467635
2	0.0225948	0.0347534	0.0475460	0.0216774	0.0335470	0.0461951
3	0.0216257	0.0336818	0.0466989	0.0207678	0.0325425	0.0454188
4	0.0205793	0.0324519	0.0456081	0.0197862	0.0313881	0.0444089
5	0.0194553	0.0310559	0.0442478	0.0187316	0.0300756	0.0431392
6	0.0182540	0.0294872	0.0425926	0.0176037	0.0285977	0.0415835
7	0.0169766	0.0277411	0.0406190	0.0164027	0.0269486	0.0397171
8	0.0156250	0.0258152	0.0383065	0.0151292	0.0251242	0.0375179
9	0.0142022	0.0237099	0.0356394	0.0137847	0.0231230	0.0349678
10	0.0127119	0.0214286	0.0326087	0.0123714	0.0209460	0.0320550
11	0.0111588	0.0189781	0.0292135	0.0108920	0.0185971	0.0287753

으로 표현된다. 이 다중탈퇴율 공식에 $s = 1/12$, $t = n/12$ (단, $n = 0, 1, \ldots, 11$)을 대입하면 다음과 같은 월 기준의 절대탈퇴율에서 월 기준의 다중탈퇴율로 전환 가능한 공식이다.

$$ {}_{\frac{1}{12}}q^{(j)}_{x+\frac{n}{12}} = {}_{\frac{1}{12}}q'^{(j)}_{x+\frac{n}{12}} \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k+1}(-1)^k \sum^{\frac{1}{12}}_{\substack{i_1,\ldots,i_k \neq j \\ i_1<\cdots<i_k}} q'^{(j)}_{x+\frac{n}{12}} \cdots {}_{\frac{1}{12}}q'^{(k)}_{x+\frac{n}{12}} \right\} \tag{4.7} $$

위의 전환 공식 (4.6)은 앞 절에서 유도한 공식 (3.8)과 표현이 다를 뿐 결과는 동일한 공식이다. 위의 공식 (4.6)은 $\left\{ {}_sq'^{(i)}_{x+t} \,|\, i = 1, 2, \ldots, m \right\}$을 이용하여 ${}_sq^{(j)}_{x+t}$를 계산하는 공식이며 앞 절에서 유도한 공식 (3.8)은 $\left\{ q'^{(i)}_x \,|\, i = 1, 2, \ldots, m \right\}$을 이용하여 ${}_sq^{(j)}_{x+t}$를 계산하는 공식이다. 위의 다중탈퇴율 공식 (4.6)은 식 (3.3b)를 이용하여 확률을 전환한 다음 이용하면 되므로 두 공식은 동일한 정보를 이용하여 계산이 가능하다. 이러한 계산은 아래의 예를 통하여 가능하며 표 4.1의 다섯 번째 열의 값은 표 3.1의 세 번째 열의 값과 일치함이 확인된다.

공식 (4.7)을 예를 들어 설명하여 보자. 절대탈퇴율이 FI 가정의 특수한 형태인 GUDD 가정을 따르는 경우 다중탈퇴율로 전환하는 과정을 살펴본다. $m = 3$의 경우이며 $q^{(1)}_x = 0.2$, $q^{(2)}_x = 0.3$, $q^{(3)}_x = 0.4$라고 가정하자. GUDD 분포의 θ는 0.25인 경우에 계산한다. ${}_{1/12}q'^{(1)}_{x+n/12}$을 식 (3.3b)를 이용하면

$$ {}_{\frac{1}{12}}q'^{(1)}_{x+\frac{n}{12}} = \frac{\left\{ H\left(\frac{n+1}{12}\right) - H\left(\frac{n}{12}\right) \right\} \cdot q'^{(1)}_x}{1 - H\left(\frac{n}{12}\right) \cdot q'^{(1)}_x} \tag{4.8} $$

이 된다. 절대탈퇴율 ${}_{1/12}q'^{(2)}_{x+n/12}$와 ${}_{1/12}q'^{(3)}_{x+n/12}$는 식 (4.8)에 (1) 대신에 (2)와 (3)으로 대체하여 동일한 과정을 거치면 결과를 얻을 수 있다. 그 다음 식 (4.7)에 ${}_{1/12}q'^{(1)}_{x+n/12}$과 ${}_{1/12}q'^{(2)}_{x+n/12}$ 및 ${}_{1/12}q'^{(3)}_{x+n/12}$을 대입하면

$$ {}_{\frac{1}{12}}q^{(1)}_{x+\frac{n}{12}} = {}_{\frac{1}{12}}q'^{(1)}_{x+\frac{n}{12}} \left\{ 1 - \frac{1}{2}\left({}_{\frac{1}{12}}q'^{(2)}_{x+\frac{n}{12}} + {}_{\frac{1}{12}}q'^{(3)}_{x+\frac{n}{12}} \right) + \frac{1}{3}\, {}_{\frac{1}{12}}q'^{(2)}_{x+\frac{n}{12}} \cdot {}_{\frac{1}{12}}q'^{(3)}_{x+\frac{n}{12}} \right\} \tag{4.9a} $$

이 된다. ${}_{1/12}q'^{(2)}_{x+n/12}$ 및 ${}_{1/12}q'^{(3)}_{x+n/12}$의 공식도 식 (4.9a)와 유사하다. 즉

$$ {}_{\frac{1}{12}}q^{(2)}_{x+\frac{n}{12}} = {}_{\frac{1}{12}}q'^{(2)}_{x+\frac{n}{12}} \left\{1 - \frac{1}{2}\left({}_{\frac{1}{12}}q'^{(1)}_{x+\frac{n}{12}} + {}_{\frac{1}{12}}q'^{(3)}_{x+\frac{n}{12}}\right) + \frac{1}{3}\,{}_{\frac{1}{12}}q'^{(1)}_{x+\frac{n}{12}}\,{}_{\frac{1}{12}} \cdot q'^{(3)}_{x+\frac{n}{12}}\right\} \tag{4.9b} $$

과

$$ {}_{\frac{1}{12}}q^{(3)}_{x+\frac{n}{12}} = {}_{\frac{1}{12}}\,q'^{(3)}_{x+\frac{n}{12}} \left\{1 - \frac{1}{2}\left({}_{\frac{1}{12}}q'^{(1)}_{x+\frac{n}{12}} + {}_{\frac{1}{12}}\,q'^{(2)}_{x+\frac{n}{12}}\right) + \frac{1}{3}\,{}_{\frac{1}{12}}q'^{(1)}_{x+\frac{n}{12}} \cdot {}_{\frac{1}{12}}q'^{(2)}_{x+\frac{n}{12}}\right\} \tag{4.9c} $$

이다. 표 4.1의 두 번째, 세 번째, 네 번째 열의 값은 연 기준 절대탈퇴율을 월 기준 절대탈퇴율로 전환한 값이며 다섯 번째, 여섯 번째, 일곱 번째 열의 값은 식 (4.9a), (4.9b), (4.9c)를 각각 적용한 값이다. 표 4.1를 보면 절대탈퇴율의 값이 대응되는 다중탈퇴율보다 약간 크다는 성질도 확인 가능하다.

5. 다중탈퇴율이 FI 가정을 따르는 경우

앞에서 절대탈퇴율이 FI 가정을 따르는 경우에 대하여 논의하였다. 이번에는 다중탈퇴율이 FI 가정을 따르는 경우에 대하여 논의하자. 먼저 다중탈퇴율이 FI 가정을 따르는 경우에서 연 기준 다중탈퇴율에서 월 기준 절대탈퇴율로 전환하는 공식을 유도한다. 그리고 다중탈퇴율이 FI 가정을 따르는 경우에서 연 기준 절대탈퇴율에서 월 기준 다중탈퇴율로 전환하는 공식을 유도한다.

5.1. 연 기준 다중탈퇴율에서 월 기준 절대탈퇴율로 전환

먼저 다중탈퇴율이 FI 가정을 따르는 경우에서 연 기준 다중탈퇴율에서 월 기준 절대탈퇴율로 전환하는 공식을 유도한다. $\{0 \le t < 1,\ 0 < s + t \le 1\}$인 경우에 다중탈퇴율이 FI 가정을 따르면

$$ {}_tq^{(j)}_x = H(t) \cdot q^{(j)}_x \tag{5.1} $$

이고 총탈퇴율도 식 (2.12)와 (5.1)에 의하여

$$ {}_tq^{(\tau)}_x = H(t) \cdot q^{(\tau)}_x \tag{5.2} $$

가 된다. 또한 식 (2.14), (2.13), (5.1), (5.2)를 이용하면 탈퇴력은

$$ \mu^{(j)}_x(t) = \frac{H'(t) \cdot q^{(j)}_x}{1 - H(t) \cdot q^{(\tau)}_x} \tag{5.3} $$

으로 표현된다. 또한 시점 t 이후에서 시점 $t+s$ 이내에 다중탈퇴가 발생할 확률은

$$ {}_{t|s}q^{(j)}_x = {}_tp^{(\tau)}_x \cdot {}_sq^{(j)}_{x+t} \tag{5.4} $$

이고 FI 가정에서 식 (5.1)을 이용하면

$$ {}_{t|s}q^{(j)}_x = \{H(t+s) - H(t)\} \cdot q^{(j)}_x \tag{5.5} $$

이다.

절대탈퇴율은 식 (2.18)에 의하여 탈퇴력을 적분한 지수함수의 형태로 다음과 같이 표현되며 식 (5.3)을

이용하면 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned}
{}_sp'^{(j)}_{x+t} &= \exp\left(-\int_0^s \mu^{(j)}_{x+t}(z)dz\right) \\
&= \exp\left(-\int_t^{t+s} \mu^{(j)}_{x}(z)dz\right) \\
&= \exp\left(-\int_t^{t+s} \frac{H'(z)\cdot q^{(j)}_x}{1-H(z)\cdot q^{(\tau)}_x}dz\right) \\
&= \exp\left(-\frac{q^{(j)}_x}{q^{(\tau)}_x}\int_t^{t+s} \frac{H'(z)\cdot q^{(\tau)}_x}{1-H(z)\cdot q^{(\tau)}_x}dz\right),
\end{aligned} \tag{5.6}$$

여기서 위 식 (5.6)의 마지막 항의 정적분을 계산한 다음 유지율로 전환하면 다음과 같은 결과가 나온다. 식 (5.7)의 두 번째 등호는 식 (5.2)와 (2.13)을 적용한다.

$$\begin{aligned}
\exp\left[\frac{q^{(j)}_x}{q^{(\tau)}_x}\left[\ln\left\{1-H(z)\cdot q^{(\tau)}_x\right\}\right]_{z=t}^{z=t+s}\right] &= \left\{\frac{1-H(t+s)\cdot q^{(\tau)}_x}{1-H(t)\cdot q^{(\tau)}_x}\right\}^{\frac{q^{(j)}_x}{q^{(\tau)}_x}} \\
&= \left(\frac{{}_{t+s}p^{(\tau)}_x}{{}_tp^{(\tau)}_x}\right)^{\frac{q^{(j)}_x}{q^{(\tau)}_x}} \\
&= \left({}_sp^{(\tau)}_{x+t}\right)^{\frac{q^{(j)}_x}{q^{(\tau)}_x}}.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

위 식의 지수부분의 분수는 다음과 같이 표현 가능하다. $\{0\le w\le 1,\ 0\le w+r\le 1\}$인 경우에

$$\frac{q^{(j)}_x}{q^{(\tau)}_x} = \frac{\{H(w+r)-H(w)\}\cdot q^{(j)}_x}{\{H(w+r)-H(w)\}\cdot q^{(\tau)}_x} = \frac{{}_{w|r}q^{(j)}_x}{{}_{w|r}q^{(\tau)}_x} = \frac{\dfrac{{}_{w|r}q^{(j)}_x}{{}_wp^{(\tau)}_x}}{\dfrac{{}_{w|r}q^{(\tau)}_x}{{}_wp^{(\tau)}_x}} = \frac{{}_rq^{(j)}_{x+w}}{{}_rq^{(\tau)}_{x+w}} \tag{5.8}$$

가 되는데 식 (5.8)의 두 번째 등호는 식 (5.5)의 적용이며 마지막 등호는 식 (5.4)의 적용으로 가능하다. 따라서 식 (5.8)을 식 (5.7)의 지수부분에 대입하면 다음과 같다.

$${}_sp'^{(j)}_{x+t} = \left({}_sp^{(\tau)}_{x+t}\right)^{\frac{{}_rq^{(j)}_{x+w}}{{}_rq^{(\tau)}_{x+w}}} \tag{5.9}$$

이것은 Bowers 등 (1997)의 p.323에 있는 공식 (10.2.3)의 일반적인 표현이다. 또한 ${}_sq'^{(j)}_{x+t}$와 ${}_sp'^{(j)}_{x+t}$의 합은 1이므로

$${}_sq'^{(j)}_{x+t} = 1-{}_sp'^{(j)}_{x+t} = 1-\left({}_sp^{(\tau)}_{x+t}\right)^{\frac{{}_rq^{(j)}_{x+w}}{{}_rq^{(\tau)}_{x+w}}} = 1-\left(1-{}_sq^{(\tau)}_{x+t}\right)^{\frac{{}_rq^{(j)}_{x+w}}{{}_rq^{(\tau)}_{x+w}}} \tag{5.10}$$

된다. 여기서 (w, r)과 (t, s)는 $\{0\le w\le 1,\ 0\le w+r\le 1\}$과 $\{0\le t\le 1,\ 0\le s+t\le 1\}$을 만족하는 어떤 실수도 가능하다. 따라서 연 기준의 다중탈퇴율을 이용하여 전환하는 공식은 식 (5.10)에 $w=0,\ r=1$을 대입하면

$${}_sq'^{(j)}_{x+t} = 1-\left[1-\frac{\{H(t+s)-H(t)\}\cdot q^{(\tau)}_x}{1-H(t)\cdot q^{(\tau)}_x}\right]^{\frac{q^{(j)}_x}{q^{(\tau)}_x}}$$

표 5.1. GUDD 가정에서 다중탈퇴율 ${}_{1/12}q'^{(1)}_{x+n/12}$로 전환한 결과($q'^{(1)}_x = 0.2$, $q'^{(2)}_x = 0.3$, $q'^{(3)}_x = 0.4$)

n	$\theta = 0$	$\theta = 0.25$	$\theta = 0.5$	$\theta = 0.75$	$\theta = 1$
0	0.0338994	0.0254119	0.0171756	0.0091739	0.0013923
1	0.0363005	0.0269762	0.0186151	0.0110703	0.0042240
2	0.0389712	0.0287490	0.0203182	0.0132410	0.0072130
3	0.0419150	0.0307759	0.0223645	0.0157838	0.0104927
4	0.0450937	0.0331170	0.0248697	0.0188407	0.0142395
5	0.0483781	0.0358533	0.0280077	0.0226288	0.0187101
6	0.0514454	0.0390971	0.0320536	0.0274988	0.0243110
7	0.0535856	0.0430090	0.0374689	0.0340587	0.0317478
8	0.0533802	0.0478279	0.0450937	0.0434663	0.0423867
9	0.0483781	0.0539272	0.0566361	0.0582411	0.0593029
10	0.0354709	0.0619287	0.0762013	0.0851499	0.0912902
11	0.0133818	0.0729627	0.1169373	0.1514384	0.1796252

$$= 1 - \left\{ \frac{1 - H(t+s)\cdot q_x^{(\tau)}}{1 - H(t)\cdot q_x^{(\tau)}} \right\}^{\frac{q_x^{(j)}}{q_x^{(\tau)}}} \tag{5.11}$$

이 된다. 특히 연 기준의 다중탈퇴율을 월 기준의 절대탈퇴율로 전환하는 공식은 위 식에 $s = 1/12$, $t = n/12$, $n = 0, 1, \ldots, 11$을 대입하면

$$ {}_{\frac{1}{12}}q'^{(j)}_{x+\frac{n}{12}} = 1 - \left\{ \frac{1 - H\left(\frac{n+1}{12}\right)\cdot q_x^{(\tau)}}{1 - H\left(\frac{n}{12}\right)\cdot q_x^{(\tau)}} \right\}^{\frac{q_x^{(j)}}{q_x^{(\tau)}}} \tag{5.12}$$

로 간단히 표현된다.

수치 예를 통하여 다중탈퇴율이 GUDD 가정을 따르는 경우 절대탈퇴율로 전환하는 공식의 적용 과정을 살펴보자. 위의 공식 (5.12)($m = 3$의 경우)을 예를 들어 설명해 보자. $q_x^{(1)} = 0.2$, $q_x^{(2)} = 0.3$, $q_x^{(3)} = 0.4$라고 가정하고 $s = 1/12$, $t = n/12$ (단, $n = 0, 1, \ldots, 11$)인 경우로 $q_x^{(\tau)} = 0.2 + 0.3 + 0.4 = 0.9$이고 $q_x^{(1)}/q_x^{(\tau)} = 2/9$, $q_x^{(2)}/q_x^{(\tau)} = 3/9$, $q_x^{(3)}/q_x^{(\tau)} = 4/9$를 위의 공식에 넣어서 계산한다. GUDD 가정하에서 $H(s) = \theta\cdot s^2 + (1-\theta)\{1-(1-s)^2\}$, $0 \le s \le 1$, $0 \le w \le 1$이다. $\theta = 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1$인 경우로 나누어서 식 (5.12)를 이용하여 계산하면 표 5.1이 된다. $\theta = 0.5$인 경우는 UDD 가정하에서 계산한 것과 같다.

표 5.1은 ${}_{1/12}q'^{(1)}_{x+n/12}$의 결과만 제시하고 있다. 절대탈퇴율 ${}_{1/12}q'^{(2)}_{x+n/12}$와 ${}_{1/12}q'^{(3)}_{x+n/12}$는 동일한 과정을 거치면 결과가 얻어진다. $n \le 8$일 때 θ의 값이 작을수록 ${}_{1/12}q'^{(1)}_{x+n/12}$의 값이 증가하며 $n > 8$일 때 ${}_{1/12}q'^{(1)}_{x+n/12}$의 값이 감소하는 경향이 있다. 그림 5.1을 보면 확인이 된다.

5.2. 연 기준 절대탈퇴율에서 월 기준 다중탈퇴율로 전환

이 절에서 지금까지 다중탈퇴율이 FI 가정을 따를 때 절대탈퇴율로 전환하는 과정을 살펴 보았다. 이제는 절대탈퇴율 자료를 가지고 다중탈퇴율이 FI 가정을 따를 때 다중탈퇴율로 전환하는 공식을 유도하여 보자. 3장과의 차이점을 살펴보면 3장에서는 절대탈퇴율이 FI 가정을 따를 때 절대탈퇴율에서 다중탈퇴율로 전환하는 과정을 다루었고 여기서는 다중탈퇴율이 FI 가정을 따른다고 가정하는 경우이다. 식

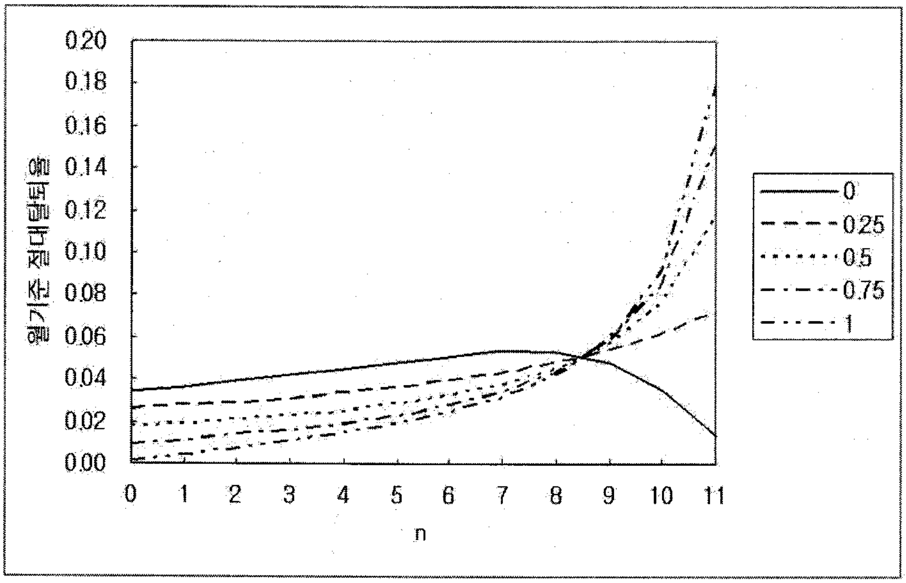

그림 5.1. GUDD 가정에서 전환된 절대탈퇴율 ${}_{1/12}q'^{(1)}_{x+n/12}$의 그래프($\theta = 0,\ 0.25,\ 0.5,\ 0.75,\ 1$)

(5.9)에 $w = 0,\ r = 1,\ t = 0,\ s = 1$을 대입하면

$$ {}_{s}p'^{(j)}_{x+t} = \left({}_{s}p^{(\tau)}_{x+t}\right)^{\frac{{}_{r}q^{(j)}_{x+w}}{{}_{r}q^{(\tau)}_{x+w}}} \tag{5.13}$$

이 되는데 $H(s)$의 분포 가정과 무관함을 알 수 있다. 절대탈퇴율 $\{q'^{(j)}_{x}\,|\,i = 1, 2, \ldots, m\}$에 대한 자료가 있는 경우 다중탈퇴율 ${}_{s}q^{(j)}_{x+t}$를 구하는 문제를 고려하자. 먼저 식 (2.19)에 의하여 $p'^{(j)}_{x} = 1 - q'^{(j)}_{x}$이고 식 (2.15)와 (2.18)을 이용하면

$$ p^{(\tau)}_{x} = p'^{(1)}_{x} \cdots p'^{(m)}_{x} \tag{5.14}$$

이 성립한다. 또한 식 (2.13)에 의하여 $q^{(\tau)}_{x} = 1 - p^{(\tau)}_{x}$이다. 따라서 식 (5.13)에 식 (5.14)를 응용하여 전환하면

$$\begin{aligned} q^{(j)}_{x} &= q^{(\tau)}_{x}\frac{\ln\left(p'^{(j)}_{x}\right)}{\ln\left(p^{(\tau)}_{x}\right)} \\ &= \left\{1 - \prod_{i=1}^{m}\left(1 - q'^{(i)}_{x}\right)\right\}\frac{\ln\left(p'^{(j)}_{x}\right)}{\ln\left\{\prod_{i=1}^{m}\left(1 - q'^{(i)}_{x}\right)\right\}} \end{aligned} \tag{5.15}$$

이 된다. ${}_{s}q^{(j)}_{x+t}$를 식 (2.8)을 다중탈퇴율에 적용하면

$$ {}_{s}q^{(j)}_{x+t} = \frac{\{H(t+s) - H(t)\}\cdot q^{(j)}_{x}}{1 - H(t)\cdot q^{(\tau)}_{x}} \tag{5.16}$$

표 5.2. 다중탈퇴율이 GUDD 가정을 따를때 ${}_{1/12}q^{(1)}_{x+n/12}$과 ${}_{1/12}q^{(2)}_{x+n/12}$ 및 ${}_{1/12}q^{(3)}_{x+n/12}$로 전환

n	$\theta = 0.25$			$\theta = 0.75$		
	${}_{\frac{1}{12}}q^{(1)}_{x+\frac{n}{12}}$	${}_{\frac{1}{12}}q^{(2)}_{x+\frac{n}{12}}$	${}_{\frac{1}{12}}q^{(3)}_{x+\frac{n}{12}}$	${}_{\frac{1}{12}}q^{(1)}_{x+\frac{n}{12}}$	${}_{\frac{1}{12}}q^{(2)}_{x+\frac{n}{12}}$	${}_{\frac{1}{12}}q^{(3)}_{x+\frac{n}{12}}$
0	0.016510	0.026390	0.037795	0.006132	0.009802	0.014038
1	0.015828	0.025556	0.037035	0.007119	0.011422	0.016428
2	0.015108	0.024637	0.036128	0.008126	0.013094	0.018930
3	0.014350	0.023630	0.035064	0.009157	0.014829	0.021565
4	0.013555	0.022532	0.033832	0.010214	0.016637	0.024361
5	0.012723	0.021344	0.032423	0.011303	0.018529	0.027347
6	0.011856	0.020065	0.030829	0.012426	0.020521	0.030560
7	0.010955	0.018695	0.029044	0.013589	0.022627	0.034046
8	0.010021	0.017237	0.027064	0.014796	0.024865	0.037856
9	0.009057	0.015693	0.024888	0.016054	0.027258	0.042060
10	0.008065	0.014068	0.022521	0.017369	0.029830	0.046739
11	0.007046	0.012366	0.019968	0.018747	0.032610	0.052002

이 되고 식 (5.15)를 식 (5.16)에 대입하면

$$
{}_sq^{(j)}_{x+t} = \frac{\{H(t+s)-H(t)\}\cdot\left\{1-\prod_{i=1}^{m}\left(1-q'^{(i)}_x\right)\right\}\dfrac{\ln\left(p'^{(j)}_x\right)}{\ln\left\{\prod_{i=1}^{m}\left(1-q'^{(i)}_x\right)\right\}}}{1-H(t)\cdot\left\{1-\prod_{i=1}^{m}\left(1-q'^{(i)}_x\right)\right\}\dfrac{\ln\left(p'^{(j)}_x\right)}{\ln\left\{\prod_{i=1}^{m}\left(1-q'^{(i)}_x\right)\right\}}} \tag{5.17}
$$

이 된다. 월 기준의 다중탈퇴율은 위 식 (5.17)에 $s=1/12$, $t=n/12$, $n=0, 1, \ldots, 11$을 대입하면

$$
{}_{\frac{1}{12}}q^{(j)}_{x+\frac{n}{12}} = \frac{\left\{H\left(\frac{n+1}{12}\right)-H\left(\frac{n}{12}\right)\right\}\cdot\left\{1-\prod_{i=1}^{m}\left(1-q'^{(i)}_x\right)\right\}\dfrac{\ln\left(p'^{(j)}_x\right)}{\ln\left\{\prod_{i=1}^{m}\left(1-q'^{(i)}_x\right)\right\}}}{1-H\left(\frac{n}{12}\right)\cdot\left\{1-\prod_{i=1}^{m}\left(1-q'^{(i)}_x\right)\right\}\dfrac{\ln\left(p'^{(j)}_x\right)}{\ln\left\{\prod_{i=1}^{m}\left(1-q'^{(i)}_x\right)\right\}}} \tag{5.18}
$$

이다.

마지막으로 수치 예를 통하여 다중탈퇴율이 GUDD 가정을 따르는 경우 절대탈퇴율에서 다중탈퇴율로 전환하는 공식 (5.18)의 적용 과정을 살펴보자. $m=3$의 경우를 예를 들어 설명해 보자. $q'^{(1)}_x=0.2$, $q'^{(2)}_x=0.3$, $q'^{(3)}_x=0.4$라고 가정하자. $p'^{(1)}_x=1-0.2=0.8$, $p'^{(2)}_x=1-0.3=0.7$, $p'^{(3)}_x=1-0.4=0.6$이고 식 (5.14)에 의하여 $p^{(\tau)}_x=0.8\times0.7\times0.6=0.336$이므로 $q^{(\tau)}_x=1-0.336=0.664$가 된다. 따라서 식 (5.15)에 의하여 $q^{(1)}_x=0.664\times\ln(0.8)/\ln(0.336)=0.135853$이고 $q^{(2)}_x=0.217149$, $q^{(3)}_x=0.310998$이다. 이 값을 식 (5.16)에 대입하면 표 5.2의 결과가 된다. 공식 (5.17)을 직접 이용해도 되지만 식 (5.15)와 (5.16)을 이용하면 쉽게 계산할 수 있다. 표 5.2는 $\theta=0.25, 0.75$일 때 각각 결과를 제시하고 있다.

6. 결론

본 논문에서 FI 가정에서 절대탈퇴율에서 다중탈퇴율로 전환하는 공식을 유도하고 다중탈퇴율을 절대탈퇴율로 전환하는 공식을 유도해 보았다. 유도된 공식은 Bowers 등 (1997)과 Lee (2008)에 있는 전환공식의 일반적인 형태임을 확인할 수 있었다. 또한 유도된 공식을 이용하여 수치 예를 통하여 절대탈퇴율과 다중탈퇴율의 전환 과정을 설명하였다. 이 논문의 마지막으로 향후 연구 과제를 제시해 본다. 첫 번째로 $H(s)$의 분포형태를 보다 일반적인 경우로 확장하는 문제에 대한 연구이다. 두 번째로 탈퇴 원인별로 $H(s)$의 형태를 다르게 가정하여 관계식을 유도하는 것이 보다 현실적인 접근이다. 세 번째로 절대탈퇴율의 정의를 탈퇴력을 이용하지 않고 보다 일반적인 정의에 의하여 논의를 전개해 보는 것도 의미가 있다.

참고문헌

Apostol, T. M. (1974). *Mathematical Analysis*, Addison-Wesley.

Bowers, N. L., Jones, D. A., Gerber, H. U., Nesbitt, C. J. and Hickman, J. C. (1997). *Actuarial Mathematics*, Society of Actuaries.

Carriere, J. F. (1994). Dependent decrement theory, *Transactions of Society of Actuaries*, **46**, 45–74.

Daniel, J. W. (1993). Multiple-decrement models and corresponding conditional single-decrement models, *Actuarial Research Clearing House*, **1**, 229–237.

Jones, B. L. and Mereu, J. A. (2000). A family of fractional age assumptions, *Insurance: Mathematics and Economics*, **27**, 261–276.

Jones, B. L. and Mereu, J. A. (2002). A critique of fractional age assumptions, *Insurance: Mathematics and Economics*, **30**, 363–370.

Lee, H. (2008). Generalized conversion formulas between multiple decrement models and associated single decrement models, *The Korean Journal of Applied Statistics*, **21**, 739–754.

Shiu, E. S. W. (1987). Multiple-decrements by Riemann-Stieltjes integration, *Actuarial Research Clearing House*, **1**, 1–4.

Willmot, G. E. (1997). Statistical independence and fractional age assumptions, *North American Actuarial Journal*, **1**, 84–99.

Decrement Models Under Fractional Independence Assumption

Hangsuck Lee[1]

[1]Dept. of Actuarial Science/Mathematics, Sungkyunkwan University

(Received September 2008; accepted October 2008)

Abstract

This paper derives conversion formulas from yearly-based absolute rates of decrements to monthly-based rates of decrement due to cause j under FI (fractional age independence) assumption that is a generalization of UDD assumption. Next, it suggests conversion formulas from monthly-based absoluterates of decrements to monthly-based rates of decrement due to cause j under FI assumption. In addition, it calculates conversion formulas from yearly-based rates of decrement due to cause j to the corresponding monthly-based absolute rates of decrements under FI assumption. Some numerical examples are discussed.

Keywords: Absolute rates of decrements, rates of decrement due to cause j, FI(fractional age independence) assumption.

[1]Assistant Professor, Dept. of Actuarial Science/Mathematics, Sungkyunkwan University, 53 Myungnyun-dong 3ga, Jongno-gu, Seoul 110-745, Korea. Email: hangsuck@skku.edu