대한수학교육학회지 <학교수학> 제 10 권 제 4 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.10, No.4, 537-555. Dec. 2008

등호 문맥에 따른 초등학생의 등호 개념 이해와 지도 방법 연구

기 정 순* · 정 영 옥**

본 연구는 학교수학에 매우 중요한 등호 개념과 관련하여 등호 문맥을 중심으로 초등학생들의 등호 개념 이해를 조사하고, 수학 교과서를 분석하며, 등호 개념 이해를 신장하기 위한 지도 방법을 모색하여 그 효과를 분석하는 데 목적이 있다. 이를 위한 이론적 배경으로 등호의 기원, 등호 개념, 등호 문맥, 등호 사용 오류 유형을 고찰하고, 분석을 위한 틀을 마련하였다. 등호 개념 이해를 위한 수업은 모델 만들기, 수식의 참 · 거짓 판단하기, 수와 연산의 관계 파악하기, 수와 연산의 기본 성질 추측하기, 다양한 등호 문맥 경험하기, 등호 문맥 만들기 활동을 중심으로 이루어졌다. 학생들의 등호 개념 이해는 등호 양쪽에 연산이 있는 문맥에서 매우 부족하며, 이와 관련하여 등호를 결과로 인식하는 오류가 가장 많이 나타났다. 교과서는 등호 왼쪽에 연산이 있는 문맥이 거의 대부분을 차지하는 관계로 이에 대한 제고가 필요하며, 본 연구에서 제시한 수업 방법은 등호 개념의 관계적 이해에 효과가 있는 것으로 나타났다.

Ⅰ. 서 론

수학의 논리적 체계성을 고려할 때, 선행 학습의 결손이나 이해의 부족이 후속 학습의 방해나 장애가 된다는 것은 잘 알려진 사실이다. 이러한 점을 생각하면 초등학교에서 올바른 수학적 개념 형성이 이루어져야 하는 것은 매우 중요하다. 학교 수학에서 수학적 개념을 바르게 이해하기 위해서는 학습 상황에 주어진 수학 기호를 바르게 이해해야 한다(우정호, 2006). 등호는 초등수학에서 고등수학에 이르기까지 흔히 볼 수 있고, 수학의 여러 주제를 이해하기 위한 필수적인 기호이다. 특히 김남희(1994), 김성준(2002b, 2004), 강지선(2003), Carpenter, Franke, & Levi(2003), Mann(2004), 전미수학교사협의회(NCTM, 2007) 등은 등호의 균형 또는 동치 개념은 등식, 부등식을 이해하는 데 기초가 된다고 설명한다. 그러나 학생들은 일반적으로 초등학교에서는 등호를 등호 다음에 답을 구하라는 의미로 이해하다가, 중학교 이후에는 이런 산술적 의미보다는 대수적 의미에서 상등 또는 동치의 의미로 받아들여야 하는 전이의 과정을 겪으면서 어려움을 갖게 된다. 이미 1970년대부터 Ginsburg 등에 의해 등호 개념의 중요성이 주장되어 왔지만, 학생들의 등호 개념에 대한 이해는 매우 제한적이다. 이와 관련하여 김남희(1994), 도종훈 · 최영기(2003), 김성준(2002a, 2002b, 2004), Carpenter et al. (2003), Mann(2004), McNeil et al. (2006), 전미수학교사

* 인천마장초등학교(hope8314@hanmail.net)
** 경인교육대학교(yochong@gin.ac.kr)

협의회(NCTM, 2007) 등은 등호 개념의 중요성을 주장하면서 초등학교에서 학습한 등호 개념이 오히려 후속 학습에 장애가 되고 있음을 우려하고 있다. 그 이유는 다양하지만 Falkner, Levi, & Carpenter(1999), Richards(2002), Freiman & Lee(2004), Mann(2004), McNeil(2004), McNeil et al. (2006) 등은 초등학교에서 등호를 다루는 대부분의 문맥이 등호를 연산적으로 이해하는 것을 강화하는 '연산-등호-답'($a \pm b = c$) 유형인 것이 주요 원인임을 강조하면서 등호가 사용되는 다양한 문맥을 통해 등호 개념을 지도할 것을 권장하고 있다.

등호 개념의 이런 중요성에도 불구하고 국내에서는 송영무 · 양두례(1996), 김성준(2002a, 2004), 강지선(2003), 김수미(2003), 도종훈 · 최영기(2003), 이종희 · 김선희(2003), 김선희(2004), 박소현(2004), 신만식(2005) 등 학생들의 등호 개념 이해, 등호 개념의 오개념과 오류 등에 대한 연구는 찾아볼 수 있으나 초등학생들을 위한 등호 개념 지도 방법을 구체적으로 제시한 논문은 찾아보기 어렵다.

따라서 본 연구에서는 초등학생의 등호 문맥에 따른 등호 개념 이해 정도를 알아보고, 초등학교 수학 교과서에 제시된 등호 문맥은 어떤 유형인지 분석한 후에, 초등학생의 등호 개념 이해 개선을 위한 지도 방법을 모색하여 적용하고 그 효과를 알아보고자 한다.

II. 이론적 배경

이 장에서는 등호의 의미는 무엇인지, 등호는 어떤 문맥에서 사용하는지, 학생들이 등호를 사용하면서 범하게 되는 오류는 무엇인지를 살펴보고, 등호 개념 이해를 개선하기 위한 지도 방법은 무엇인지 고찰하고자 한다.

1. 등호의 기원과 등호 개념

등호의 기원은 오래전으로 거슬러 올라가는데, 등호는 산술 연산과 변수 연산과 더불어 발전해 왔다. 등호가 처음 발견된 것은 고대 이집트의 파피루스에서인데 여기서는 '무엇인가를 준다.'는 의미를 나타내는 기호로 사용되었다(이종희 · 김선희, 2003). 현재 우리가 사용하는 등호는 1557년 영국의 Recorde의 '지혜의 숫돌'에서 찾아볼 수 있는데, Recorde가 등호에 '='를 사용한 것은 '두 개의 평행선만큼 이 세상에 같다는 것은 존재하지 않는다.'라는 의미였다. 그러나 등호를 세계적으로 '='로 표기하기 시작한 것은 한참 후의 일이다. 영국에서는'='를 등호로 사용하고 있을 무렵, 유럽 대륙에서는 '='가 A^2과 B^2이 주어졌을 때, 두 수의 차를 $A^2 = B^2$로 나타내는 것과 같이 산술적 차를 나타내는 데 사용하였다. 또한 그 당시에는 등호가 '='이외에도 ―, pha, 빈 칸, aeq, [, ‖, //, ⊟, ⊃○ ,|, ⊔, ⊓ 등 다양하였다. 18세기 이후 유럽 대륙으로 '='가 빠르게 퍼져 나갔다. 그 이후로 지금까지 가장 편리하고 등호의 의미를 함축한다고 생각되는 '='이 공식적으로 인정받게 되었다(임대순, 1988; 이종희 · 김선희, 2003).

등호 개념을 구분하는 기준이나 용어는 연구자마다 다소 차이가 있지만, 김성준(2002a), Carpenter et al. (2003), 이종희 · 김선희(2003), 우정호(2005), McNeil et al. (2006) 등을 종합하면, 등호 개념은 연산적 의미와 관계적 의미로 구분할 수 있다. 연산적 의미는 등호의 의미를 연산의 결과로 이해하는 것이다. 예를 들면 즉, 3+4=7에서 '='를 3+4의 연산 결과를 구하라는 의미로 받아들여 7이 되었다고 이해하는 것을 의미한다. 관계적 의미는 등호가 두 식 사이의 관계를 나타내는 것임을 이해하고

등호 양쪽에 있는 식들의 상등 관계를 파악하는 것이다. 등호의 연산적 의미를 이해하는 것을 연산적 이해, 관계적 의미를 이해하는 것을 관계적 이해라고 하면, 등호 개념을 옳게 이해한다는 것은 연산적 이해에 머물지 않고 관계적 이해에 도달하는 것을 의미한다.

2. 등호 문맥 유형

일반적으로 등호가 있는 식을 등식이라 하는데 우리나라에서는 초등학교 수학 교과서 5-나에서 무정의 용어로 도입되고 있다(박교식 · 임재훈, 2005). 등식의 유형은 다양한데, 본 연구에서는 등식을 등호가 사용되는 맥락에 따라 여러 가지 유형으로 구분한다는 의미에서 McNeil(2004), McNeil et al. (2006)을 따라 등호 문맥이라는 용어로 표현하고자 한다. Falkner, Levi, & Carpenter(1999), Richards(2002), Freiman & Lee(2004), Mann(2004), McNeil(2004), McNeil et al. (2006) 등은 등호 개념에 대한 관계적 이해를 신장시키기 위해서는 다양한 등호 문맥을 경험시키는 것이 필요함을 강조한다. 등호 문맥을 구분하는 방식은 연구자마다 차이가 있지만, 본 연구에서는 McNeil et al. (2006)을 중심으로 살펴보고자 한다. McNeil et al. (2006)은 등호 문맥을 표준 문맥과 비표준 문맥으로 구분하였다. 표준 문맥은 $3+4=7$과 같이 '연산-등호-답의 문맥'이고, 비표준 문맥은 표준 문맥이 아닌 유형이다. 비표준 문맥은 $5+2=3+4$, $3x+6=2x$와 같이 '등호의 양쪽에 연산이 있는 문맥'과 '그 외의 비표준 문맥'으로 분류된다. 그 외의 비표준 문맥은 다시 2가지로 분류하여 $7=7$, $x=y$와 같이 '등호의 양쪽에 연산이 없는 문맥', $7=3+4$, $y=2x$와 같이 '등호 오른쪽에 연산이 있는 문맥'으로 구분하였다.

본 연구에서는 이를 좀더 세분하여 자연수의 덧셈과 뺄셈을 중심으로 등호 개념에 대한 이해를 조사하고 교과서에 제시된 등호 문맥을 분석하기 위해 <표 Ⅱ-1>과 같이 등호 문맥 유형을 설정하였다.

<표 Ⅱ-1> 등호 문맥 유형

등호 문맥		문맥 유형 (a와 a'는 관련된 수)	문항 예
표준 문맥 (연산-등호-답의 문맥)	등호의 왼쪽에 연산이 있는 문맥	· $a \pm b = c$ · $(a+b)+c=d$ · $a+(b+c)=d$	· $3+4=\square$ · $40+60+80=\square$ · $389+40+60=\square$
비표준 문맥 (연산-등호-답이 아닌 문맥)	등호의 양쪽에 연산이 있는 문맥	· $a \pm b = c \pm d$ · $a \pm b = a' \pm b'$ · $a+b=b+a$ · $a \pm \square \pm c = d \pm \square$ · $a \pm b \square c \pm d$	· $15+56=\square-38$ · $\square+54=31+55$ · $61+89=\square+61$ · $3+\square+12=7+\square$ · $420+50\square 320+150$
	등호의 오른쪽에 연산이 있는 문맥	· $a=a \pm 0$ · $a=b \pm c$ · $a=b \pm c \pm d$	· $9=9 \pm 0$, · $\square=9-2$ · $84=60+\square-25$
	등호의 양쪽에 연산이 없는 문맥	· $a=a$ · $a \square a$	· $7=\square$ · $87\square 87$

3. 등호 사용 오류 유형

학생들은 수나 기호의 의미를 생각하지 않은 채 단순히 기계적으로 조작하려는 경향이 강하며 이러한 과정에서 오류가 유발되는데(김수미, 2003), 본 논문에서는 등호개념 이해를 파악하기 위한 한 측면으로 등호에 대한 오개념으로 인하여 나타나는 결과인 등호 사용 오류에 대해 살펴보고자 한다.

등호 사용 오류에 대한 구분은 연구자마다 다양한데, 본 연구에서는 김수미(1994). Falkner et al. (1999), 김성준(2002b), Carpenter et al. (2003), 이종희 · 김선희(2003), McNeil(2004), Freiman & Lee(2004)를 기초로 자연수의 덧셈과 뺄셈에 관련된 등호 개념에 맞게 종합하여 <표 Ⅱ-2>와 같이 등호 사용 오류 분석 틀을 설정하였다.

4. 등호 개념 지도 방법

이 절에서는 학생들의 등호 사용 오류의 처치와 더불어 등호 개념에 대한 연산적 이해에서 탈피하여 관계적 이해로 나아가기 위한 방법으로 Falkner et al. (1999), Richards(2002), Mann(2004), Carpenter et al. (2003), Molina & Ambrose(2006), McNail et al. (2006) 등의 의견을 종합하여 '모델 만들기, 수식의 참 · 거짓 토론하기, 수와 연산의 관계 파악하기, 수와 연산의 기본 성질 추측하기, 다양한 등호 문맥 경험하기, 등호 문맥 만들기'를 제시한다.

모델 만들기는 등호 개념을 지도할 때 시소와 접시저울과 같은 적절한 모델을 사용하는 것이다. Falkner et al. (1999), Mann(2004)은 학생들에게 등호의 균형과 상등의 의미를 이해시키기 위해서는 시소가 효과적임을 강조한다. Mann(2004)은 시소 등의 모델을 이용하여 처음에는 시소를 탄 경험을 회상시켜 토론하게 한 후, 학생들이 직접 팔을 이용하여 시소를 만들어 보고, 손 위에 사과와 오렌지를 번갈아 올리면서 양쪽의 무게에 따라 손을 올리고 내리는 활동을 한 뒤, 양쪽이 수평을 이루려면 어떤 것을 올려야 할지 토론하게 하며, 알아낸 시소 규

<표 Ⅱ-2> 등호 사용 오류 유형

오류의 유형	오류 원인	오류 예
등호를 결과로 인식하는 오류	$a+b=c$의 표준 등호 문맥의 고착으로 등호 개념을 '연산=답' 또는 절차 구조로 인식	· $13=9+4$은 거꾸로 된 식이고 $a=a$은 식이 아니라고 여김 · $a+b=\square+d$에서 d를 무시하고 $a+b$의 결과를 씀 · $a+b+c=d$를 $a+b=c+d=e$ 로 해결(c는 $a+b$의 결과임)
모든 수를 연산하는 오류	등호를 전체의 연산 결과로 인식	· $a+b=\square+d$에서 □안에 주어진 모든 수를 더하여 기록
한 수를 그대로 옮기는 오류	=를 반사적인 의미의 기호로 인식	· $a+b=\square+d$에서 □안에 a나 b, d 중 한 수를 씀
처리 기술 오류	등호 개념을 이해하고는 있으나 실수로 인한 오류	· 수를 잘못보거나 잘못 옮기거나 절차상의 실수
부적절한 논리 오류	한 가지 경우의 논리를 확대 적용	· $97-63=\square-62$에서 □안에 98을 넣는 것과 같이 덧셈에서의 논리를 뺄셈에 적용
애매한 오류	학생의 의도를 파악하기 어려운 오류	· 풀이 과정과 면담을 통해서도 학생의 의도를 파악하기 어려움

칙 목록을 만들게 하고, 시소와 등호를 연결하는 등호 개념 지도 방법을 제안하고 있다.

식의 참·거짓 토론하기는 학생들이 주어진 등호 문맥을 보고 참인지 거짓인지 판단해보고 서로의 의견을 토론하며 더 나아가 스스로 참·거짓 수식을 만들어 보는 활동이다. Falkner et al. (1999), Ricahrds(2002), Carpenter et al. (2003), Molina & Ambrose(2006) 등은 수식의 참·거짓을 판단해 보는 활동은 등호 개념의 관계적 이해를 위한 발달시키는 데 중요하며 효과적임을 주장한다. 예를 들면 학생들에게 $4+5=9$, $12-5=9$, $7=3+4$, $8+2=10+4$, $7+4=15-4$, $8=8$과 같은 수식을 주고 참·거짓을 결정하게 하면 학생들은 등호 양쪽을 비교하여 상등이 되는지를 판단하기 때문에 관계적 이해에 도움이 된다는 것이다.

수와 연산의 관계 파악하기는 등호 양쪽을 비교해 보고 수와 연산과의 규칙을 찾아 관계를 파악하는 활동이다. Carpenter et al. (2003), Molina & Ambrose(2006) 등은 등호 개념 발달과 관련하여 수와 연산의 관계 파악이 도움이 됨을 주장한다. 예를 들면 학생들에게 $6+3=\square+2$, $568-267=\square-268$와 같이 등호 양쪽의 수들이 서로 관련이 있는 수식을 주고 맞는 답을 구하게 했을 때 모든 계산을 수행하는 대신 수들 사이의 관계를 중심으로 생각하여 상등이 되는 수를 찾게 되는데, 이런 과정이 관계적 이해를 돕는다는 것이다.

수와 연산의 기본 성질 추측하기는 교환법칙, 결합법칙과 함께 항등원 0에 대한 대수 규칙들을 학생들의 수준에서 추측하고 기호화하도록 하여 등호 개념을 심층적으로 이해하도록 하는 것이다. Richards(2002), Carpenter et al. (2003) 등은 수와 연산의 기본 성질을 추측하고 확인하는 것은 일반화할 수 있는 성질을 발견하는 것이므로 대수 학습에 매우 중요한 역할을 하며, 특히 등호 개념 이해에도 효과적임을 강조한다.

다양한 등호 문맥 경험하기는 앞에 언급한 바와 같이 등호 개념의 관계적 이해를 촉진시키기 위해서 학생들에게 다양한 등호 문맥을 경험시키는 것이다. Richards(2002), Carpenter et al. (2003), Molina & Ambrose(2006), McNeil et al. (2006) 등은 다양한 등호 문맥을 지속적으로 경험시키는 것이 등호 개념에 대한 관계적 이해를 돕는데 중요함을 강조한다. 특히 등호 문맥에서 미지수의 위치도 마지막, 처음, 중간 등 다양하게 빈 칸 수식 문제를 해결하는 것이 도움이 됨을 주장한다.

등호 문맥 만들기는 학생들에게 등호 개념에 대한 이해를 촉진하기 위해 $\_\_+\_\_=\_\_+\_\_$, $\_\_-\_\_=\_\_-\_\_$, $\_\_+\_\_=\_\_-\_\_$ 등과 같은 다양한 형태의 수식을 만들도록 하는 것이다. 이는 등호 문맥을 왼쪽에서 오른쪽으로 읽으며 계산하는 방법에 도전이 되는 것으로 학생들은 등호의 상등 개념을 바탕으로 등호 문맥 전체를 보고 등호 양쪽의 관계를 파악해야 한다. 따라서 이 활동은 학생들이 만든 등호 문맥을 통해 등호 개념 이해를 높일 수 있음과 동시에 등호를 관계적으로 이해하고 있는지도 같이 평가할 수 있는 것이다.

III. 연구 방법

이 장에서는 연구 대상, 검사 도구, 자료 수집 및 자료 분석에 대해 살펴보고자 한다.

1. 연구 대상

본 연구의 대상은 연구자가 소속한 인천광역시의 M초등학교 4학년 한 학급 학생 34명과

그 학급의 학생 5명이다. 연구 학급은 4학년 학생들의 등호 개념 이해도를 개략적으로 알아보기 위해 선정하였다. 연구 학생은 그 학급에 속하는 여학생 3명, 남학생 2명으로 이루어진 5명의 학생으로 등호 개념 지도 방법을 수업에 적용한 후 그 효과를 알아보기 위해, 사전 검사를 실시한 결과를 바탕으로 등호 개념이 현저히 낮은 학생들 중에서 수학과 학업 성취도와 언어 표현력을 고려하여 상위권 학생 1명(A), 중위권 학생 3명(B, C, D), 하위권 학생 1명(E)을 선정하였다.

2. 검사 도구

본 연구에서 사용한 검사 도구는 등호 개념 이해 정도와 등호 사용 오류를 측정하기 위한 사전·사후 검사지이다. 검사지는 Carpenter et al. (2003), McNeil(2004) 등을 참조하여, <표 Ⅱ-2>에 제시한 등호 문맥 유형에 따라 등호의 왼쪽에 연산이 있는 문맥, 등호의 양쪽에 연산이 있는 문맥, 등호의 오른쪽에 연산이 있는 문맥, 등호 양쪽에 연산이 없는 문맥과 관련된 문항 등을 제작하고, 학생들이 직접 등호와 수를 넣어 등호 문맥을 만드는 문항을 추가하여 사전 검사지 초안을 작성하였다. 이 검사지로 연구 대상이 속한 학교의 다른 학급을 선정하고 2007년 5월 14일 1차 예비검사, 5월 30일 2차 예비검사를 실시하여, 정답률이 너무 높거나 등호 개념 이해를 파악하는데 도움이 되지 않는다고 판단되는 항목은 사전 검사지에서 제외하였다. 또한 등호의 왼쪽에 연산이 있는 문맥에서 일반적인 $386+212=\square$, $395-213=\square$의 문항은 연산적 이해를 기초로 정답률이 91%이었기 때문에 등호 개념 이해 여부를 좀더 알아볼 수 있는 0을 포함한 문항이나 교환법칙이나 결합법칙이 활용된 문항으로 수정하였다. 이와 같이 예비 검사와 동료 교사의 협의, 전문가의 검토를 거쳐 사전 검사지를 완성하였다. 사후 검사지는 본 연구에서 등호 개념 이해를 신장하기 위한 지도 방법을 구안하고 이를 적용한 효과를 알아보기 위한 것으로 사전 검사지와 동일한 것을 사용하였다. 연구 대상에 대한 사전 검사는 2007년 6월 12일, 사후 검사는 2007년 7월 24일에 이루어졌다. 검사지의 내용을 살펴보면 <표 Ⅲ-1>과 같다.

3. 자료 수집 및 자료 분석

본 연구에서는 연구 학급을 대상으로 등호 개념 이해와 등호 사용 오류를 알아보기 위해 사전 검사를 실시하고, 등호 개념 이해가 낮은 연구 학생 5명에게 등호 개념 이해를 위한 지도 방법을 적용한 수업을 실시하는 과정에서 사전·사후 검사 자료, 수업 과정 녹화, 학생들의 기록물, 지필 평가지, 면담자료, 교과서 분석과 관련된 문헌 자료를 수집하였다.

본 연구의 자료 분석은 앞에서 제시한 등호 문맥 유형과 등호 사용 오류 유형을 중심으로 이루어졌고, 그 분석 내용을 정리하면 다음과 같다. 첫째, 현재 초등학교 4학년 학생들의 등호 개념에 대한 이해 수준을 알아보기 위해 연구 학급의 사전 검사 자료를 분석한다. 둘째, 현행 초등학교 수학 교과서의 등호 문맥 유형과 등호 개념 지도 실태를 분석한다. 셋째, 사전 검사를 통해 등호 개념에 대한 이해가 현저하게 낮은 학생 중 학업 성취도가 상, 중, 하인 연구 학생 5명을 선별하여 등호 개념 이해 지도 방법을 적용하고 전 과정을 녹화하며 면담한 자료를 분석한다. 넷째, 연구 학생 5명을 대상으로 사후 검사를 실시하고 사전·사후 검사 자료를 비교 분석한다.

<표 Ⅲ-1> 등호 개념 이해와 등호 사용 오류 측정을 위한 사전·사후 검사지

문맥 유형	문 항	비 고
등호 왼쪽에 연산이 있는 문맥	아래의 수식이 맞으면 o, 틀리면 x하고, 맞는 식들의 공통되는 규칙이 있다면 무엇인지 발견해서 써보세요. ① $0+349=349$ ( ) ② $0+78=0$ ( ) ③ $739+0=890$ ( ) ④ $345+0=0+345$ ( ) 공통되는 규칙:	항등원에 대한 이해와 기본 성질 추측 관련 문항
	아래 식의 □안에 알맞은 수를 넣으세요. ① $389+40+60=\square$ ② $80+479+20=\square$	결합법칙과 교환법칙 관련 문항
등호 양쪽에 연산이 있는 문맥	아래 식의 □안에 알맞은 수를 넣으세요. ① $678+431=\square+938$ ② $953+289=807+\square$ ③ $836-423=\square-297$ ④ $903-564=768-\square$	수 사이의 관계가 없는 문항
	아래 식의 □안에 알맞은 수를 넣으세요. ① $7548+5352=\square+5362$ ② $51826-2672=\square-2673$ ③ $156+287+392=\square+286+391$ ④ $\square+78+12=59+77+11$	수 사이의 관계가 있는 문항
	아래 식의 □안에 알맞은 수를 넣으세요. ① $702+915+860=\square+860+702$ ② $8932+6056=\square+8932$	
	아래 식의 □안에 알맞은 수를 넣으세요. ① $78+9=78+\square-1$ ② $94-8=\square+2-10$ ③ $76+\square+54=81+\square$	
	□ 안에 <, >, ＝를 알맞게 쓰고 읽어 보세요. ① $302+451\square 202+551$( )	
등호 문맥 만들기	아래의 카드를 이용하여 만들 수 있는 식을 5 개 만들고 해결해 봅시다. $\boxed{=}$카드는 꼭 들어가야 합니다. 그리고 숫자 카드는 여러 번 계속 사용할 수 있습니다. $\boxed{8}$, $\boxed{=}$, $\boxed{+}$, $\boxed{-}$, $\boxed{7}$, $\boxed{5}$, $\boxed{2}$, $\boxed{4}$, $\boxed{0}$	등호 문맥을 학생들이 직접 만드는 문항

Ⅳ. 연구 결과

이 장에서는 등호 문맥에 따른 등호 개념 이해의 결과 분석과 초등학교 수학 교과서에 제시된 등호 문맥은 어떤 유형인지 분석한 결과를 제시하고, 본 연구에서 제시한 초등학생의 등호 개념 이해 개선을 위한 지도 방법의 효과를 알아보기 위해 수업 과정 분석과 더불어 연구 대상 학생들의 등호 개념 이해와 등호 사용 오류에 대한 사전·사후 검사 결과를 비교 분석하고자 한다.

1. 등호 개념 이해 결과 분석

이 절에서는 <표 Ⅲ-1>에 제시된 분류에 따라 등호의 왼쪽에 연산이 있는 문맥, 등호 양쪽에 연산이 있는 문맥, 등호 문맥 만들기와 관련된 문항별로 정답률과 등호 사용 오류를 분석한 결과를 살펴보고, 연구 대상 학급 학생 34명의 등호 개념 이해 정도를 알아보고자 한다.

가. 등호의 왼쪽에 연산이 있는 문맥에서 등호 개념 이해

등호의 왼쪽에 연산이 있는 문맥에서는 전반적으로 90% 이상의 정답률을 보였다. 0이 포함된 문항에서 일반화 할 수 있는 대수적 추측을 할 수 있는지를 알아본 결과 약 20%의 학생들은 "어떤 수 +0은 어떤 수이다."라는 논리적인 대수적 추측을 어렵지 않게 할 수 있었다. 결합법칙과 교환법칙이 포함된 문맥에서 정답률은 94.12%

로 상당히 높았으나 해결방법에 있어 결합법칙과 교환법칙의 관계를 이용하여 해결하는 학생은 약 40%가 되지 않았고 왼쪽에서부터 오른쪽의 순서로 수를 연산하여 해결한 학생이 54.41%였다. 등호 사용 오류를 살펴보면 $389+40+60=\square$에서 처리 기술 오류가 2명, 애매한 오류가 1명, $80+479+20=\square$에서는 처리 기술 오류가 1명이었다. 이 결과는 학생들이 등호 왼쪽에 연산이 있는 문맥은 연산적 이해를 기초로 정답은 잘 구하지만 수들의 관계를 파악하는 정도는 부족한 것으로 생각된다.

나. 등호 양쪽에 연산이 있는 문맥에서 등호 개념 이해

등호 양쪽에 연산이 있는 문맥에서 각 문항에 대한 등호 개념 이해 결과 분석은 <표 Ⅳ-1>, <표 Ⅳ-2>와 같다.

<표 Ⅳ-1> 등호 양쪽에 연산이 있는 등호 문맥에서의 정답률

구 분	문맥 유형	문항	정답률(%)	오류율(%)
수 사이의 관계가 없는 문맥	$a+b=\square+d$	$678+431=\square+938$	58.82	41.18
	$a+b=c+\square$	$953+289=807+\square$	70.59	29.41
	$a-b=\square-d$	$836-423=\square-297$	50.00	50.00
	$a-b=c-\square$	$903-564=768-\square$	58.82	41.18
수 사이의 관계가 있는 문맥	$a+b=\square+b'$	$7548+5352=\square+5362$	61.76	38.24
	$a-b=\square-b'$	$51826-2672=\square-2673$	38.24	61.76
	$a+b+c=\square+b'+c'$	$156+287+392=\square+286+391$	58.82	41.18
	$\square+b+c=a'+b'+c'$	$\square+78+12=59+77+11$	41.17	58.83
	$a+b+c=\square+c+a$	$702+915+860=\square+860+702$	82.35	17.65
	$a+b=\square+a$	$8932+6056=\square+8932$	82.36	17.64
	$a+b=a+\square-b'$	$78+9=78+\square-1$	73.53	26.47
	$a-b=\square+b'+b'$	$94-8=\square+2-10$	52.94	47.06
	$a+\square+c=d+\square$	$76+\square+54=81+\square$	58.83	41.17
	$a+b\square c+d$	$302+451\square 202+551$	91.18	8.82

<표 Ⅳ-2> 등호 양쪽에 연산이 있는 등호 문맥에서 등호 사용 오류

구 분	문맥 유형	등호 사용 오류 유형(%)						합
		모든 수	결과	한 수	처리	논리	애매	
수 사이의 관계가 없는 문맥	$a+b=\square+d$	0.00	26.47	2.94	8.83	0.00	2.94	41.18
	$a+b=c+\square$	0.00	2.94	2.94	14.71	2.94	5.88	29.41
	$a-b=\square-d$	23.53	11.76	0.00	0.00	11.77	2.94	50.00
	$a-b=c-\square$	11.77	17.65	0.00	2.94	2.94	5.88	41.18
수 사이의 관계가 있는 문맥	$a+b=\square+b'$	0.00	5.88	5.88	8.82	14.72	2.94	38.24
	$a-b=\square-b'$	23.53	11.76	2.94	2.94	14.71	5.88	61.76
	$a+b+c=\square+b'+c'$	0.00	14.72	8.82	2.94	8.82	5.88	41.18
	$\square+b+c=a'+b'+c'$	0.00	14.71	8.82	14.71	17.65	2.94	58.83
	$a+b+c=\square+c+a$	0.00	8.82	2.94	2.94	0.00	2.94	17.65
	$a+b=\square+a$	0.00	5.88	0.00	2.94	2.94	5.88	17.64
	$a+b=a+\square-b'$	0.00	11.76	2.95	0.00	11.76	0.00	26.47
	$a-b=\square+b'+b'$	8.83	26.47	0.00	0.00	2.94	8.82	47.06
	$a+\square+c=d+\square$	0.00	11.76	5.88	0.00	8.82	14.71	41.17
	$a+b\square c+d$	0.00	0.00	0.00	5.88	0.00	2.94	8.82

전반적으로 살펴보면 정답률과 관련해서 우선 수들 사이의 관계가 없는 문맥의 경우, 등호 왼쪽에 연산이 있는 문맥에 비해 정답률이 평균 60% 정도로 매우 낮았는데, 이는 등호 문맥에 따라 학생들의 등호 개념 이해 정도에 차이가 있음을 보여 주는 것이다. 수들 사이의 관계가 있는 문맥의 경우도 정답률이 평균 64% 정도로 매우 낮았다. 이에 해당하는 문항들은 등호 양쪽에 연산이 있는 문맥 중에서도 특히, 수들이 서로 밀접한 관계를 가지고 있기 때문에 연산을 이용하지 않아도 수월하게 미지수를 구할 수 있는 문항들이다. 그러나 10개의 문맥에 대해 평균적으로 31.77%의 학생들만 등호 개념을 이용하여 양쪽의 수들의 관계를 찾아 해결하였고, 32.36% 학생들은 정답은 구하였지만 비효과적인 연산을 이용하였다. 나머지 35.86%의 학생들은 수들 사이의 관계도 파악하지 못했을 뿐 아니라 오답을 제시하였다. 특히 학생들은 양쪽에 미지수가 있는 등호 문맥은 매우 생소하게 생각하였다.

등호 사용 오류 유형을 살펴보면 수 사이의 관계가 없는 문맥과 수 사이의 관계가 없는 문맥이 다소 차이는 있지만, 전반적으로 살펴보면, 전체 오류를 100%로 보았을 때, 등호를 결과로 인식하는 오류 32.04%, 모든 수를 연산하는 오류 12.71%, 부적절한 논리 오류 18.78%, 처리 기술 오류 14.36%, 애매한 오류 13.82%, 한 수를 그대로 옮기는 오류 8.29%의 순이었다. 등호를 결과로 인식하는 오류가 가장 많은데, 특히 $a \pm b = \square \pm d$ 유형에서 두드러졌으며, 그 이유는 학생들이 $a \pm b = c$ 의 표준 문맥을 주로 경험했기 때문이라고 볼 수 있다. 다음으로는 모든 수를 연산하는 오류인데, 특히 덧셈 문맥보다 뺄셈 문맥에서 주로 나타났다. 그 다음은 부적절한 논리 오류인데, 이는 덧셈에서의 연산법칙을 뺄셈에서도 그대로 적용하여 해결하거나 덧셈과 뺄셈의 역연산 관계를 지나치게 일반화하는 것에 기인한다.

다. 등호 문맥 만들기 결과 분석

학생들이 등호를 어떻게 이해하고 사용하는지 알아보기 위해 수와 등호를 사용하여 학생들에게 등호 문맥을 만들어 보게 하였는데, 학생들이 만든 식을 등호 문맥별로 분류하면 <표 Ⅳ-3>과 같다.

학생들이 만든 등호 문맥은 97.64%가 '등호 왼쪽에 연산이 있는 표준 문맥'이었고 비표준 문맥은 단 3문항이었다. 이런 결과에 따르면 학생들의 등호 문맥은 표준 문맥에 고착되어 있으며, 이는 학생들이 다양한 등호 문맥에 익숙하지 못함을 의미한다.

전반적으로 등호 문맥에 따른 정답률과 등호 사용 오류에 대한 결과는 학생들이 등호 개념에 대한 연산적 이해에 머물러 있는 경우가 많고, 많은 학생들이 관계적 이해에 이르지 못했음을 의미한다.

<표 Ⅳ-3> 학생들의 등호 문맥 만들기 결과

문맥 분류	문맥 형태	문항 수	문항 비율(%)	문항 예
표준 문맥	등호의 왼쪽에 연산이 있는 문맥	166	97.64	$8+5=13$ $25+4=29$
비표준 문맥	등호의 양쪽에 연산이 있는 문맥	1	0.59	$4+5=2+7$
	등호의 오른쪽에 연산이 있는 문맥	1	0.59	$8=7+5-4$
	등호의 양쪽에 연산이 없는 문맥	2	1.18	$875=\square$
합	.	170	100	.

2. 등호 문맥 유형에 따른 교과서 분석

자연수와 자연수의 덧셈과 뺄셈 단원을 중심으로 초등학교 수학 교과서와 수학 익힘책(교육 인적 자원부, 2006a, 2006b, 2006c, 2006d, 2006e, 2006f, 2006g, 2006h, 2006i, 2006j, 2006k, 2006l, 2006m, 2006n, 2006o, 2006p)을 학년별 · 등호 문맥 유형별로 조사 분석한 내용을 정리하면 <표 Ⅳ-4>와 같다.

<표 Ⅳ-4>에서 보는 바와 같이 등호 문맥 중에서 $a \pm b = c$의 표준 문맥의 형태가 98.63%로 등호 문맥 형태의 대부분을 차지하고 있다. 이에 비하여 등호의 양쪽에 연산이 있는 문맥과 등호의 오른쪽에 연산이 있는 문맥은 거의 찾아볼 수 없었다. 그리고 등호의 양쪽에 연산이 없는 문맥인 $a = a$ 등호 문맥은 현행 교과서에서 전혀 찾아 볼 수가 없다.

한편, 등호와 수를 사용하여 등호 문맥을 만들어 보는 문항도 등호 개념보다는 덧셈과 뺄셈의 역연산을 학습하는 과정에서 표준 문맥만 보기로 제시되어 있어 학생들이 다른 다양한 문맥을 만들기는 어렵다. 이것은 현행 교과서가 등호 문맥의 다양성 면에서 바람직하지 않음을 나타낸다. 학생들은 수많은 $a \pm b = c$의 표준 등호 문맥을 접하며 등호 개념의 연산적 이해에 한정되기 쉽다. 따라서 이러한 등호 문맥에 대한 경험을 통해 등호 개념에 대한 관계적 이해를 더욱 신장시킬 필요가 있다.

3. 등호 개념 수업 분석

이 절에서는 앞에서 언급한 모델 만들기, 수식의 참 · 거짓 토론하기, 수와 연산의 관계 파악하기, 수와 연산의 기본 성질 추측하기, 다양한 등호 문맥 경험하기, 등호 문맥 만들기 활동을 중심으로 하는 등호 개념 수업을 지면 관계상 일부만 분석하여 학생들의 등호 개념 이해 과정을 살펴보고자 한다.

가. 등호 개념 수업 차시별 지도 내용

본 연구에서 등호 개념 이해를 신장하기 위해 구안한 등호 개념 수업 차시별 지도 내용은 <표 Ⅳ-5>와 같다.

나. 등호 개념 수업 분석

1) 등호 읽기와 등호의 의미 이해하기

본 수업에서는 등호 개념 지도를 위해 학생들이 등호의 의미를 알고 바르게 읽을 수 있는지 진단해 보고, 등호의 역사를 통해 기원을

<표 Ⅳ-4> 등호 문맥 유형에 따른 교과서 분석

단계 / 등호 문맥	1		2		3		4		합계 (개수)	비율 (%)
	수학	수학 익힘책	수학	수학 익힘책	수학	수학 익힘책	수학	수학 익힘책		
등호의 왼쪽에 연산이 있는 문맥	151	403	104	252	22	43	8	22	1,005	98.63
등호의 양쪽에 연산이 있는 문맥	.	.	.	2	.	1	.	.	3	0.29
등호의 오른쪽에 연산이 있는 문맥	.	.	.	.	.	.	5	6	11	1.08
등호의 양쪽에 연산이 없는 문맥	.	.	.	.	.	.	.	.	0	0.00
학년별 합계	151	403	104	254	22	44	13	28	1,019	100

알아보고, 등호에 대한 의미를 생각해 보게 하는 데 중점을 두었다. 처음에 학생들이 알고 있는 수학 기호를 적어보게 하였을 때, 연산 기호, 부등호, 괄호 등은 중요한 수학 기호로 인식하였으나 등호는 그다지 중요한 기호로 생각하지 않고 있었으며 잘 아는 것으로 생각하였다. 그러나 등호를 읽어 보라고 했을 때, 4명의 학생들은 '는'이라고 답하였고, A학생만 '같습니다'로 답하였다. 연구자는 학생들에게 역사적으로 Recorde가 길이가 똑같은 평행한 두 선분이 세상의 무엇보다도 가장 똑같다고 하는 의미로 ' = ' 기호를 사용했음을 이야기하고, 길이도 현재보다는 길게 썼음을 이야기하면서 등호의 뜻이 무엇인지 질문하자 학생들은 수학 기호가 만들어진 과정을 생각하며 그 의미를 되새기고 자신의 생각을 바탕으로 의미를 파악하기 시작하였다. <발췌문 1>은 학생들이 등호의 의미에 대해 토론하는 과정이다.

<발췌문 1>

T: 그러니까 우리도 약속을 정해요. 어느 것이 좋을까요?

A: 양쪽이 같다.

E: 좌우가 같다.

C, D: 좌우요

A: 등호는 '양쪽이 같을 때 표시해 주는 기호'라고 하면 어떨까요?

D: 양쪽이 같은 것을 나타낼 때 가운데 쓰는 기호?

B: (생각하다가) 양쪽에 있는 어떤 무게나 모양이나 크기가 같을 때 쓰는 기호라면 …

D: 너무 길어요.

A: 그냥 양쪽의 크기가 같을 때 쓰는 기호라고 해도 될 것 같은데요.

D: (갑자기 큰소리로) 아! 양쪽의 값이 같을 때 쓰는 기호!

B: 저는 양쪽의 값이 같을 때 쓰는 기호가 좋아요.

<표 Ⅳ-5> 등호 개념 수업 차시별 지도 내용

차시	실시일	학습요소	학습내용
1	2007. 7. 4	등호 읽기 등호의 의미 이해하기	· 등호 문맥에서 등호 바르게 읽기 · 등호의 의미를 이해하고 말이나 글로 나타내기
2	7. 6	모델 만들기	· 등호 모델 찾아 만들기 · 접시저울과 구체물을 이용하여 연산 활동을 하고 등호의 의미 알기 · 신체 저울활동을 해보며 등호의 의미 알기 · 기호를 이용하여 등호의 의미 알기
3	7. 9	수식의 참·거짓 토론하기	· 빈 칸이 없는 다양한 등호 문맥을 보고 참 · 거짓을 구별하기 · 0이 포함된 등호 문맥의 참 · 거짓 구별하기 · 여러 수식의 참 · 거짓 토론하기
4	7. 10	수와 연산의 관계 파악하기(1)	· 덧셈에서의 교환 성질과 결합 성질을 알고 미지수 구하기 · 등호의 양쪽 수들 사이의 관계를 파악하여 미지수를 구하고 토론하기
5	7. 12	수와 연산 관계 파악하기(2)	· 등호의 양쪽 수들의 관계를 논리적으로 파악하여 설명하기 · 수들의 관계를 활용하여 문제 해결하기
6	7. 13	수와 연산의 기본 성질 추측하기	· 등호의 성질을 이용하여 연산하지 않고 추측하기 · 등호 문맥에서 수와 연산의 공통 규칙을 찾아 토론하고 기호로 표현하기
7	7. 16	다양한 등호 문맥 경험하기	· 다양한 등호 문맥에서 미지수 구하기 · 미지수의 위치가 다양한 등호 문맥 해결하기
8	7. 19	등호 문맥 만들기 문제 해결	· 숫자와 등호 카드를 이용하여 다양한 유형의 등호 문맥 만들기 · 등호 개념을 활용하여 수들의 관계를 이해하고 다양한 유형의 등호 문맥 만들기 · 여러 가지 등호 문맥을 보고 관계적 이해를 통해 □안의 수를 구하고 토론하기

2) 모델 만들기

본 수업에서는 등호의 의미를 잘 보여줄 수 있는 모델이 될 만한 물건을 찾아, 그 중에 시소모형과 접시저울을 이용한 활동을 해보고 학생들이 직접 양팔저울이 되어 처음에는 구체물을 직접 집어서 다음에는 머릿속에서 상상해서 수평이 되는 상황을 만들어 보는 인간저울 활동을 통해 등호의 의미를 심화시켜나가고 이를 다시 등호로 표현하는 활동을 함으로써 등호의 의미와 필요성을 이해하게 하는 데 중점을 두었다. 연구자가 등호의 의미를 잘 보여주는 물건을 찾아보라고 했을 때, 학생들은 처음에는 등호의 의미보다는 등호 모양에 초점을 맞추어 생각했기 때문에 모델을 찾는 데 어려움을 겪다가, 한 학생이 등호의 의미에 주목하여 양팔저울을 생각해내자, 다른 학생들이 시소와 거중기 등을 생각해 내었다. 학생들이 찾아낸 등호 모델인 시소 모형을 가지고 활동하면서 등호 개념 이해와 관련하여 $a \pm b = c$ 문맥에 고착되어 있는 학생들이 $a = b \pm c$ 문맥도 자연스럽게 받아들이게 되었다. <발췌문 2>는 이에 대한 학생들의 토론 과정이다. 이와 같이 학생들은 등호의 모델들을 찾아내고 실생활에서 있었던 일을 바탕으로 등호 문맥의 상황을 연출하고 식으로 나타내 봄으로써 학생들은 점차 등호 개념에 대한 관계적 이해를 하기 시작하였다. 또한 등호가 성립할 때 양쪽에서 같은 양을 보태거나 더해도 그 결과가 같다는 것도 알게 되었다.

<발췌문 2>

T: 그럼 자리를 바꾸어서 나와 동생이 반대쪽으로 오고 아버지는 그 반대쪽으로 가서 앉으면 어떨까요? 시소모양이 바뀔까요?

A: 아니요. 똑같이 수평이요.

A: 저는 등호가 수평을 나타내니까 이렇게 (블록을 옮기며) 바꿔도 될 것 같은데요.

B: 저도 그렇게 생각해요. 자리는 바뀌었지만 등호는 양쪽이 같다는 거니까 자리가 바뀌어도 마찬가지잖아요.

T: 그렇군요! 등호 다음에는 꼭 한 수만 오는 것이 아니라 무엇 더하기 무엇하고 두 수가 와도 괜찮은 건가요? 어떤 친구는 등호 다음에 이렇게 두 수가 오면 틀린 것이라고 할 듯도 한데요?

E: 좀 이상하기도 해요. 등호 다음에는 거의 한 개의 수만 오잖아요.

A: 제 생각은 등호는 양쪽이 같은 것이니까 두 개가 와도 괜찮아요.

D, C: 저도 등호는 양쪽이 같을 때 쓰는 거니까 바뀌어도 같으니까 괜찮다고 생각해요.

3) 수식의 참 · 거짓 토론하기

본 수업에서는 여러 가지 등호 문맥을 통해 참 · 거짓을 판단하고 이유를 이야기해 봄으로써 등호의 의미를 명확하게 이해하는 데 중점을 두었다. 연구자는 학생들에게 $9+5=14$, $9+5=0+14$, $9+5=13+1$, $3+5=5+3$, $3+5=3+5$, $3+5=4+4$, $5+1=3+5$, $5+2=3+2$, $8=8$ 등의 식을 제시하고 참 · 거짓을 판단하게 하였다. 0이 포함된 식은 학생들이 대부분 어려움 없이 해결하였다. 이것을 기초로 $a \pm b = c + d$ 유형의 등호 문맥을 쉽게 받아 들였다. 이와 같이 주어진 식을 보고 참 · 거짓을 판단하는 활동을 통해 등호 양쪽의 수들의 크기가 같은지에 집중하여 등호의 성립 여부를 판단하였다. <발췌문 3>은 교환법칙이 들어있는 식을 보고 참 · 거짓을 판단하고 토론하며 자연스럽게 규칙을 찾아내고 뺄셈에서는 적용되지 않음도 이해하는 과정이다.

<발췌문 3>

T: (3+5=5+3을 보여주며) 다음 식은 어때요? 참이라고 할 수 있나요?

학생들: 네, 참이요.

E: 3+5는 8이기 때문에요.

A: 3+5는 8이고 5+3도 8이기 때문에요.

B: 3+5는3+5와 같기 때문에 참이요.

B: 3+5는 모두 8이기 때문에요.

T: (3+5=3+5 카드를 보이며) 이 식과 다른 점이 뭐죠?

B: 3+5하고 5+3이 순서가 바뀌었어요.

T: (3+5=4+4 카드를 보이며)다음 식은? 왜 '참' 카드를 들었어요?

C: 3+5도 8이고 4+4도 8이기 때문에요.

T: 그렇구나. 뺄셈에서도 이 규칙이 맞을까요? 더하기를 빼기로 고쳐 써 보세요.

학생들: 거짓이요.

A: 이것은 덧셈에서는 맞는데 뺄셈에서는 안 맞아요.

B: 더할 때만 맞아요.

4) 수와 연산의 관계 파악하기

본 수업에서는 등호 양쪽의 수들 사이에 관계가 있는 문맥 $78+56=77+57$, $5+5+10+10+7=10+20+7$, $7-1=8-2$, $5+3=\square+5$, $5-3=4-\square$ 등을 통해 참·거짓을 판단하거나 미지수를 구함으로써 등호 개념을 더욱 심화하는 데 중점을 두었다. 학생들은 수들 사이의 관계를 찾아 참·거짓을 판단하는 데 오랜 시간이 걸렸다. 또한 학생들은 덧셈 문맥보다는 뺄셈 문맥에서 수들의 관계를 파악하는 데 더 어려움을 겪었다. 특히 왼쪽에서 오른쪽으로의 계산에 익숙한 학생들은 어려움을 겪었으나 점차 수들 사이의 관계를 파악하고 활용하여 문제를 해결하였다. 수들 사이의 관계를 파악할 때 관련된 수들을 짝짓는 방법을 생각해 내기도 하고 등호 양쪽의 같은 수는 소거하는 방법도 생각해 내기도 하였다. <발췌문 4>는 $78+56=77+57$에 대해 참·거짓을 판단하고 설명하는 과정이다.

<발췌문 4>

B: 78+56은 134이고 77+57도 134로 같기 때문에요.

T: 네. 좋아요. 좀 색다르게 또는 속도를 더 빠르게 한 친구 없나요?

학생들: (생각하는 모습)

A: 먼저, 78+56을 해보고 134가 나오는데 (등호 왼쪽의 78+56을 가리키며) 이 숫자하고 (등호 오른쪽의 77+55를 가리키며) 이 숫자하고 비교해 보면서 78하고 56인데, 77이라고 하나 작게 나왔으니까 (56을 가리키며) 여기에다 하나 더 올려주면 같은 답이 나오니까 되는 것 같은데요.

T: A가 했던 방법을 선생님은 참 좋아해요. A의 방법에 대해 다른 사람들의 생각은 어때요?

B: 그냥 식만 보고 해도 될 것 같은데요. 그러니까 계산하지 않고 식만 보고도 그것이 참인지 거짓인지 알 수 있지 않나요?

D: 식만 보면 어떻게?

B: 직접 계산해서 134라는 답의 수를 구하지 않아도 참인지 거짓인지는 알 수는 있어요.

T: 그래요? B가 뭔가 발견한 듯 한데 좀더 자세히 설명해 볼래요?

B: 그냥 간단히 해보면 78+56이 아니라 반으로 나눠서 한 쪽씩 해봐요. 먼저, 8+6을 해 보면 14가 되고 5+7을 하면 12가 나오니까 1을 더해주면 134가 나와요.

E: (알겠다는 표정으로) 아. 그냥 식만 보고도 쉽게 알 수 있을 것 같은데요.

B: (확신은 없는 듯) 식에서 규칙을 찾아서 하면 될 것 같은데.

T: 규칙? 어떤 규칙이 있는 것 같아요? (잠시 기다린 후) 접시저울을 생각해 보세요.

E: 있잖아요. 78하고 77을 보면 1을 뺐으니까 57은 56에서 1을 더해줘서 양쪽이 수평이 되고 참이 맞아요.

5) 등호 문맥 만들기

본 수업에서는 수와 등호를 이용하여 등호 문맥을 만들어 보게 함으로써 학생들의 등호 개념 이해가 어느 정도 신장되었는지를 알아보는 데 중점을 두었다.

학생들은 $1+1=2$, $50-20=60-30$, $100-1=100-1$, $70-40=20+10$, $5+4=3+6$, $30+5=40-5$, $18+2=2+18$, $10=12-2$, $9+0=9$, $10+1=10+10-9$ 등 여러 가지 형태의 등호 문맥을 창의적으로 만들어냈다. 학

생들은 수들의 관계나 법칙을 이용하여 등호 문맥을 다양하게 만들고, 등호 개념에 대한 이해를 확장하였음을 알 수 있다. <발췌문 5>는 학생들이 자신들이 만든 등호 문맥을 서로 보면서 어떻게 만들었는지 설명하는 과정이다.

<발췌문 5>

A: 저는 10번에서 30+5=40-5 가 신기해요. 30하고 40은 10 차이가 나는데 30에는 5를 더해주고 40에서는 5를 빼주니까 수가 같아져서요.

E: 어! 그런데 이것 좀 이상한데. 60-40은 20이지? 오른쪽은 20+20?

E: D는 식에 10이 많이 들어가게 했어요.

T: 그러네요. D도 재미있게 만들었어요. 오늘 여러분이 만든 식을 보니까 여러 가지로 잘 만들었어요. 어때요 등호가 들어가도록 식을 만들 때 무엇을 생각했지요?

A: 등호는 같습니다의 뜻이니까 양쪽이 같은 값이 나오도록 했어요.

E: 저는 계산하지 않고 등호는 양쪽이 같은 거니까 수만 바꿔서 만들었어요.

B: 계산하지 않고 만들면 빨리 만들 수 있어요.

4. 등호 개념 이해 사전·사후 비교

이 절에서는 연구 학생 5명을 대상으로 등호 개념 이해를 위한 수업을 실시하고 사후 검사를 실시한 결과와 사전 검사를 비교하여 학생들의 등호 개념 이해의 변화를 살펴보고자 한다.

가. 등호 개념 이해 정답률의 비교 분석

등호 개념 이해 사전·사후 검사의 정답률을 요약하면 <표 Ⅳ-6>과 같다.

사전 검사지와 사후 검사지가 동일한 관계로 반복 효과가 있을 가능성도 배제하기는 어렵지만, 수의 크기 등이 난이도에 영향을 미칠 것으로 판단되어 동일한 검사지를 사용하였다. 분석 결과 학생들의 사전·사후 검사의 정답률을 보면 모두 약 20%이상 향상되었다. 특히 중·하위권에 해당하는 학생 C, D, E의 향상도가 높았다. 또한 학생들이 미지수를 구하는 과정에서 수들의 관계를 이용해서 해결한 문항이 학생 A는 5문항에서 9문항으로, 학생 B는 2문항에서 11문항으로, 학생 C는 0문항에서 8문항으로, 학생 D는 1문항에서 7문항으로, 학생 E는 0문항에서 8문항으로 증가하였는데, 이는 등호 개념에 대한 연산적 이해에 머물지 않고 관계적 이해를 바탕으로 수들 사이의 특성을 찾아내어 문제를 해결하였음을 의미한다.

나. 등호 문맥 만들기 사전·사후 비교 분석

사전·사후 검사를 기초로 5명의 학생들이 만든 등호 문맥을 비교하면 <표 Ⅳ-7>, <표 Ⅳ-8>과 같다.

<표 Ⅳ-6> 등호 개념 이해 사전·사후 검사의 정답률 변화

학생	A		B		C		D		E	
사전·사후	사전	사후	사전	사후	사전	사후	사전	사후	사전	사후
정답수	11	14	10	13	4	13	2	13	5	11
정답률	68.75	87.50	62.50	81.25	25.00	81.25	12.50	81.25	31.25	68.75

<표 Ⅳ-7> 등호 문맥 만들기 사전·사후 검사 결과 비교

등호 문맥	표준 문맥		비표준 문맥					
문맥 유형	등호의 왼쪽에 연산이 있는 문맥		등호의 양쪽에 연산이 있는 문맥		등호의 오른쪽에 연산이 있는 문맥		등호의 양쪽에 연산이 없는 문맥	
사전/사후	사전	사후	사전	사후	사전	사후	사전	사후
문항 수	25	6	0	15	0	4	0	0
문항 비율(%)	100	24	0	60	0	16	0	0

<표 Ⅳ-7>에서 알 수 있는 바와 같이 사전 검사에서 학생들이 만든 문항은 모두 표준 문맥으로 등호 왼쪽에 연산이 있는 문맥이었다. 그러나 사후 검사에서는 등호의 양쪽에 연산이 없는 $a=a$를 제외하고 $a \pm b=c$의 표준 문맥 외에 다양한 등호 문맥이 나타났는데 항등원이나 배수의 성질, 교환 성질 등의 관계를 잘 이용하였다. 이는 본 연구에서 실시한 등호 개념 수업으로 인하여 학생들의 등호 개념 이해가 관계적 이해로 확장되었음을 보여 주는 것이라 할 수 있다.

Ⅴ. 요약 및 결론

등호 개념은 대수적 사고의 핵심 아이디어로 학교수학에서 매우 중요한 개념이다. 등호 개념의 중요성을 주장하는 많은 연구자들은 학생들의 등호 개념에 대한 이해는 매우 부족하며, 초등학교에서부터 그 의미를 충실하게 지도하여야 함을 강조한다. 그러나 우리나라에서는 초등학교 학생의 등호 개념 이해에 대한 연구가 미미한 실정이며, 더욱이 등호 개념 이해를 신장하기 위한 구체적인 방법은 더 부족한 상태이다. 따라서 본 연구는 등호 문맥을 중심으로 우리나라 초등학교 학생의 등호 개념 이해 정도를 알아보고, 자연수와 자연수의 덧셈과 뺄셈을 중심으로 수학 교과서와 익힘책의 등호 문맥을 분석하여 등호 개념 지도의 문제점을 파악하며, 학생들의 등호 개념 이해를 신장하기 위한 수업 방법을 모색하여 그 효과를 분석하는 데 그 목적이 있다.

이를 위해 우선 등호의 기원, 등호 개념, 등호 문맥, 등호 사용 오류에 대해 이론적으로 탐색하였다. 등호 개념은 크게 연산적 의미와 관계적 의미로 구분할 수 있는데, 전자는 등호를 연산의 결과로 이해하는 것이고, 후자는 등호가 두 수 사이의 상등 관계로 이해하는 것을 의미한다. 그러나 학생들은 대부분은 등호 개념을 연산적 의미로 이해하는 데 머물러 있는데, 이는 지나치게 등호 왼쪽에 연산이 있는 문맥인 $a \pm b=c$ 유형에 편중해서 등호를 다루기 때문이다. 따라서 본 연구에서는 등호 문맥은 등호가 사용된 식의 유형에 따라 '등호 왼

<표 Ⅳ-8> 학생들의 등호 문맥 만들기 사후 검사 결과

학생	만든 등호 문맥	특징
A	7+5=5+7, 7-7=8-8, 8+0=0+8, 7-5=4-2, 5-2=7-4	교환법칙, 항등원의 성질을 효과적으로 이용하여 다양한 문맥을 만들었다.
B	7+7=7+7, 2+2=4, 7-5=5-4, 4+4=8, 8+8=8+8, 8-5=7-4	배수의 성질을 잘 이용하여 등호 문맥을 다양하게 만들었다.
C	7+0=7, 5+2=7+0, 8+4=7+5, 4+0=4, 7-5=2	항등원의 성질을 잘 이용하여 등호 문맥을 만들었다.
D	8=1+7, 4=8-4, 7=5+2, 573-375=198, 742+875=1617	등호 오른쪽 또는 왼쪽에 연산이 있는 문맥을 만들었다.
E	8-2=4+2, 4=8-4, 7+5=8+4, 4+2=8-2, 7+2=5+4	등호를 중심으로 수들의 관계적 이해를 통해 문맥을 지으려고 노력하였다. 또한, 표준 문맥에 대한 고착화는 해소되었다.

쪽에 연산이 있는 문맥', '등호 양쪽에 연산이 있는 문맥', '등호 양쪽에 연산이 없는 문맥'으로 분류하여 학생들의 등호 개념 이해 조사와 교과서의 등호 문맥 분석을 위한 틀을 마련하였다. 또한 등호 사용 오류 유형으로는 등호를 결과로 인식하는 오류, 모든 수를 연산하는 오류, 한 수를 그대로 옮기는 오류, 처리 기술 오류, 부적절한 논리 오류, 애매한 오류로 분류하였다. 또한 등호 개념 지도 방법으로 모델 만들기, 수식의 참·거짓 토론하기, 수와 연산의 관계 파악하기, 수와 연산의 기본 성질 추측하기, 다양한 등호 문맥 경험하기, 등호 문맥 만들기를 설정하고, 이를 기초로 구체적인 수업을 설계하였다.

연구 대상은 인천의 M 초등학교 4학년 한 학급과 이 학급에 속하는 5명의 학생이다. 우선 한 학급을 대상으로 등호 개념 이해 정도를 조사하고 그 중 등호 개념 이해가 저조한 5명의 학생을 대상으로 본 연구에서 구안한 수업을 실시하여 수업 분석과 등호 개념 사전·사후 검사 결과 비교를 통해 그 효과를 분석하였다. 자료 수집은 학생들의 사전·사후 검사지, 면담 자료, 수업 녹화 자료, 교과서 자료가 수집되었고, 등호 문맥 유형, 등호 사용 오류 유형에 따라 분석하였다.

이런 분석 결과를 바탕으로 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다. 첫째, 초등학생들의 등호 개념 이해는 등호 문맥에 따라 다르며 전반적인 등호 개념 이해는 상당히 미흡하였다 특히, 등호 양쪽에 연산이 있는 문맥에서의 등호 개념 이해가 부족하였고, 같은 문맥 안에서도 덧셈 문맥보다 뺄셈 문맥에서 등호 개념 이해가 더욱 부족하였다. 또한, 수들의 교환 성질이나 결합 성질이 있는 등호 문맥에서의 관계적 이해도 매우 미흡하였다. 또한 같은 등호 문맥 내에서도, 미지수의 위치에 따라 미지수가 등호 왼쪽에 있거나 등호 양쪽에 있는 등호 문맥에서 등호 개념 이해가 부족한 것으로 나타났다. 등호 개념 이해와 관련하여 학생들이 가장 많이 보인 오류는 '등호를 결과로 인식하는 오류'였는데, 뺄셈 문맥에서는 '모든 수를 연산하는 오류'도 많이 나타났고, 덧셈 문맥에서 성립하는 성질을 뺄셈 문맥에 적용하는 '부적절한 논리 오류'도 다소 많았다.

둘째, 학생들의 등호 개념 이해의 부족은 현재 초등학교 교과서의 등호 문맥이 다양하게 제시되지 못한 데서 그 원인을 찾을 수 있다. 교과서를 분석한 결과 $a \pm b = c$ 형태의 '등호 왼쪽에 연산이 있는 문맥'이 지나치게 편중되어 있었고, 이외의 다른 등호 문맥은 거의 나타나지 않았다. 또한 미지수의 위치도 등호 오른쪽에 있는 것이 대부분이었다. 따라서 교과서에 $a \pm b = c$와 같은 등호 문맥 이외의 다양한 등호 문맥을 제시할 필요가 있음을 알 수 있었다.

셋째, 등호 개념 이해를 지도하기 위한 방법으로 제시한 '모델 만들기, 수식의 참·거짓 토론하기, 수와 연산의 관계 파악하기, 수와 연산의 기본 성질 추측하기, 다양한 등호 문맥 경험하기, 등호 문맥 만들기' 활동은 등호 개념 이해를 신장하는 효과적임을 알 수 있었다. 이는 구체적 모델을 통해 등호 개념을 직관적으로 이해하고, 수식의 참·거짓을 판단해 보게 함으로써 등호 개념을 연산의 결과보다는 상등 관계로 파악하게 하며, 수와 연산의 관계나 수와 연산의 기본 성질을 파악하게 함으로써 이런 상등 관계의 의미에 더 집중하게 만들고, 이를 더 다양한 등호 문맥에 활용해서 문제를 해결하고 직접 등호 문맥 만들기를 해 보는 것으로 계속적으로 연산적 이해보다는 관계적 이해에 집중할 수 있게 했음을 알 수 있었다.

본 연구는 등호 개념 이해를 조사하는 데 한 학급을 연구 대상으로 하였고, 수업의 효과를

알아보는 데는 5명의 학생들을 연구 대상으로 하였기에 일반화하는 데는 무리가 있지만, 이를 기초로 좀더 많은 대상으로 하는 등호 개념 이해 조사와 수업 효과에 대한 연구가 진행되는 것이 필요할 것이다. 또한 본 연구는 등호 개념을 지도하기 위해 교육과정과는 다소 독립적인 활동으로 진행되었지만, 이런 활동을 교육과정과 좀더 연계된 활동으로 재구성하는 연구도 필요할 것으로 생각된다.

참고문헌

강지선(2003). **등호의 개념 지도 방안에 관한 연구.** 인천교육대학교 대학원 석사학위논문.

교육인적자원부(2006a). **수학 1-가.** 서울: (주)천재교육.

교육인적자원부(2006b). **수학 1-나.** 서울: (주)천재교육.

교육인적자원부(2006c). **수학 2-가.** 서울: (주)천재교육.

교육인적자원부(2006d). **수학 2-나.** 서울: (주)천재교육.

교육인적자원부(2006e). **수학 3-가.** 서울: (주)천재교육.

교육인적자원부(2006f). **수학 3-나.** 서울: (주)천재교육.

교육인적자원부(2006g). **수학 4-가.** 서울: (주)천재교육.

교육인적자원부(2006h). **수학 4-나.** 서울: (주)천재교육.

교육인적자원부(2006i). **수학 익힘책** 1-가. 서울: (주)천재교육.

교육인적자원부(2006j). **수학 익힘책** 1-나. 서울: (주)천재교육.

교육인적자원부(2006k). **수학 익힘책** 2-가. 서울: (주)천재교육.

교육인적자원부(2006l). **수학 익힘책 2-나.** 서울: (주)천재교육.

교육인적자원부(2006m). **수학 익힘책 3-가.** 서울: (주)천재교육.

교육인적자원부(2006n). **수학 익힘책 3-나.** 서울: (주)천재교육.

교육인적자원부(2006o). **수학 익힘책 4-가.** 서울: (주)천재교육.

교육인적자원부(2006p). **수학 익힘책 4-나.** 서울: (주)천재교육.

김남희(1994). 대수적 사고에 관한 고찰: 산술과의 관련성과 변수개념. **대한수학교육학회 논문집, 4**(2), 189-202.

김선희(2004). **수학적 지식 점유에 관한 기호학적 고찰.** 이화여자대학교 대학원 박사학위논문.

김성준(2002a). 수학 학습에서 이행에 관한 고찰-산술과 대수를 중심으로-. **수학교육학연구, 12**(1), 29-48.

김성준(2002b). 과정-대상 측면에서 본 '대수적 사고' 연구. **수학교육학연구, 12**(4), 457-472.

김성준(2004). **대수의 사고 요소 분석 및 학습-지도 방향 탐색.** 서울대학교 대학원 박사학위논문.

김수미(1994). 수학적 오개념의 자각과 조종 -Fischbein의 메타인지전략을 통하여-. **수학교육학연구, 4**(2), 173-188.

김수미(2003). 수학과 오류의 진단과 처방에 관한 교사용 자료 개발 연구. **수학교육학연구, 5**(2), 209-221.

도종훈・최영기(2003). 수학적 개념으로서의 등호 분석. **한국수학교육학회지, 42**(5), 697-706.

박교식・임재훈(2005). 초등학교 수학 교과서에서 사용하는 무정의 용어 연구. **수학교육학

연구, 15(2), 197-213.

박소현(2004). **초등학교와 중학교에서 수와 연산 영역의 연계성.** 서강대학교 대학원 석사학위논문.

송영무 · 양두례(1996). 산술에서 대수로의 이행 과정에서 나타나는 장애에 관한 연구. 순천대학교사범대학부속과학교육연구소 **과학과 교육, 4**, 41-59.

신만식(2005). **중학교 수학에서 문자와 식 단원의 학습 지도에 관한 연구.** 전남대학교 대학원 석사학위논문.

우정호(2005). **수학 학습-지도 원리와 방법.** 서울: 서울대학교 출판부.

우정호(2006). **학교수학의 교육적 기초.** 서울: 서울대학교 출판부.

이종희·김선희(2003). 등호 개념의 분석 및 학생들의 등호 이해 조사. **수학교육학연구, 13**(3), 278-307.

임대순(1988). **기호의 변천과정과 수학교육.** 한양대학교 대학원 석사학위논문.

Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in the elementary school.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Falkner, K. P., Levi, L., & Carpenter, T. P. (1999). Children's Understanding of Equality: A Foundation for Algebra. *Teaching Children Mathematics, 6*(4), 232-236.

Freiman, V., & Lee, L. (2004). Tracking primary student's understanding of the equality sign. Proceedings of the 28th Conference of the *International Group for the Psychology of Mathematics Education 2*, 415-422.

Mann, R. L. (2004). Balancing act: The truth behind the equals sign. *Teaching Children Mathematics. 11*(2), 65-69.

McNeil, N. M. (2004). *Don't teach me 2+2 equals 4 : Knowledge of arithmetic operations hinders equations learning.* from http://www.cogsci.northwestern.edu/cogsci2004/papers/paper353.pdf.

McNeil, N. M., Grandau, L., Knuth, E. J., Alibali, M. W., Stephens, A. C., Hattikudur, S., & Krill, D. E. (2006). Middle-school students' understanding of the equal sign: The books they read can't help. *Cognition & Instruction, 24*(3), 367-385.

Molina, M., & Ambrose, R. C. (2006). Fostering relational thinking while negotiating the meaning of the equals sign. *Teaching Children Mathematics. 13*(2), 111-117.

National Council of Teachers of Mathematics(2007). 학교 수학을 위한 원리와 규준. (류희찬 외 역). 서울: 경문사. (영어 원작은 2000년 출판)

Richards, S. (2002). In what ways can I facilitate and measure student understanding of equality in my second grade classroom? from http://www.madison.k12.wi.us/sod/car/abstracts/345.pdf.

The Analysis of Elementary School Students' Understanding of the Concept of Equality Sign in Contexts and the Effects of its Teaching Methods

Ki, Jeong Soon (Majang Elementary School)
Chong, Yeong Ok (Gyeongin National University of Education)

The study aims to analyze elementary school students' understanding of the concept of equality sign in contexts, to reflect the types of contexts for equality sign which mathematics textbook series for 1-4 grades on natural numbers and its operation provide, and to invetigate the effects of teaching methods of the concept of equality sign suggested in this research.

In order to achieve these purposes, the origin, concept, and contexts of equality sign were theoretically reviewed and organized. Also the error types in using equality sign were reflected. Modelling, discussing truth or falsity of equations, identifying relations between numbers and their operation, conjecturing basic properties of numbers and their operations, experiencing diverse contexts for equality sign, and creating contexts for equality sign are set up as teaching methods for better understanding the concept of equality sign.

The conclusions are as follows.

Firstly, elementary school students' understanding of the concept of equality sign varied by context and was generally far from satisfactory. In particular, they had difficulties in understanding the concept of the equal sign in contexts with operations on both sides. The most frequently witnessed error was to recognize equality sign as a result of operations.

Secondly, student' lack of understanding of the concept of equality sign came from the fact that elementary textbooks failed to provide diverse contexts for equality sign. According to the textbook analysis, contexts with operations on the left side of the equal sign in the form of $a \pm b = c$ were provided excessively, with the other contexts hardly seen.

Thirdly, teaching methods provided in the study were found to be effective for enhancing understanding the concept of equality sign. In other words, these methods enabled students to focus on relational understanding of concept of equality sign rather than operational one.

* key words : equality sign(등호), concept of equality sign(등호 개념), contexts of equality sign (등호 문맥), operational meaning(연산적 의미), relational meaning(관계적 의미)

논문접수 : 2008. 10. 31
논문수정 : 2008. 12. 8
심사완료 : 2008. 12. 15