대한수학교육학회지 <학교수학> 제 10 권 제 4 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.10, No.4, 557-571. Dec. 2008

드모르간의 음수 지도 방법 연구

권 석 일* · 김 재 홍** · 최 지 선*** · 박 선 용**** · 박 교 식*****

이 논문은 드모르간의 음수 지도 방법을 연구하는 것을 목적으로 한다. 이를 위하여 우선 드모르간이 제시한 대수발달 단계에 따라 드모르간의 음수관을 정리하고, 드모르간의 음수 지도 방법을 불가능한 뺄셈의 탐색, 불가능한 뺄셈에 대한 수정규칙 탐구, 불가능한 뺄셈에 대한 의미의 구성의 3단계로 나누어 고찰하였다. 드모르간의 음수 지도 방법의 특징은 방정식 지도와 결합되었다는 점, 불가능한 뺄셈 기호를 사용한다는 점, 역사발생적 과정을 준수하는 점진적 형식화를 추구한다는 점이다. 또한, 드모르간의 방법을 학교수학의 방법과 비교함으로써, 그 장점과 단점을 분석하였다. 드모르간은 수학적 실재를 형식과 의미를 동시에 갖는 것으로 보았던 자신의 수학관에 따라 음수를 설명하였으며, 대수의 발달 단계에 맞추어 음수를 서로 상이한 존재로 간주하였고 이에 따라 여러 단계를 거쳐 음수를 지도하도록 하고 있다. 그의 이러한 세심한 조처는 음수의 지도가 단시간에 마무리될 수 없는 성격의 것임을 분명히 인식하게 해 준다.

I. 서 론

음수는 학교수학에서 취급하는 기본 개념 중의 하나인 바, 우리나라에서는 그것을 중학교 1학년에서 처음으로 취급하고 있다. 그러나 음수 개념의 지도는 쉬운 일이 아니며, 그 어려움은 원천적으로 음수 개념의 본질에 기인한다(우정호, 2003; 최병철, 2006). 사실 음수는 역사적으로 결코 녹록치 않은 개념이었다. 수학자들은 음수 개념과 그 연산의 이해 과정에서 상당한 갈등을 겪으면서 오랜 시간을 허비해야 했고, 19세기 이후로 음수에 대한 형식적 관점을 채택하면서 비로소 그 오랜 염원을 이룰 수 있었다(우정호, 2003). 그것은 음수 개념을 구체적인 모델로 해석하려는 그 동안의 시도를 포기한 대가로 얻은 것이다. 이런 역사적 배경 때문에 학교수학에서 음수를 형식적으로 도입하자는 주장이 있지만(Freudenthal, 1983),이 방법을 사용하면, 학생들에게 부호규칙과 대수적 성질을 명확하게 지도할 수는 있으나, 음수를 사용해서 물리적 세계를 다양하게 해석할 수 있다는 것을 인식시키기는 어렵다. 그래서 현재는 대체로 직관적 방법과 형식적 방법을 상보적으로 사용한다(우정호, 2003).

이 상보적 방법은 19세기 이후로 음수 개념이 수학적으로 안착되었음에도, 학생들에게 음수 개념과 그 연산을 이해시키기 위해 불완전

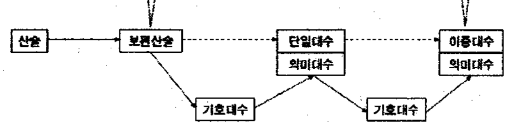
* 경인교육대학교(steinein@ginue.ac.kr), 교신저자
** 서울대학교 대학원(masshong@hanmail.net)
*** 중흥중학교(everii@hanmail.net)
**** 한국교육과정평가원(polya@paran.com)
***** 경인교육대학교(pkspark@dreamwiz.com)

하지만 구체적인 모델을 사용하면서 형식적 방법과의 연결을 도모했던 19세기의 음수 지도 방법을 이은 것이다. 이 연구에서는 그러한 지도 방법 중의 하나인 드모르간(Augustus De Morgan, 1806-1871)의 음수 지도 방법에 초점을 맞춘다. 드모르간 당시에는 이미 음수를 널리 사용하고 있었을 뿐만 아니라 그 존재를 분명하게 의식하였다. 그러나 음수와 관련해서 끊임없이 나타나는 문제를 해결하는 명백한 방법이 존재하지 않았을 뿐만 아니라, 음수를 수학적 대상으로 인정하지 말아야 한다는 주장이 종종 제시되었기 때문에(Arcavi, 1985; Frend, 1796), 드모르간과 피콕(George Peacock, 1791-1858) 등은 음수를 정의하려고 노력하였다. 이것은 수학의 정리는 자명하게 인식되는 공리로부터 출발해야 한다는 경험론적 사고가 지배적이어서(Guinness, 1992: Pycior, 1983), 당대 사람들이 자명하지 않은 사실을 수학적 사실로 받아들이는 것에 대한 거부 반응이 심했음을 보여준다.

이 연구에서는 드모르간이 산술과 대수의 교수·학습을 위해 집필한 세 권의 저서 즉, 《*On the study and difficulties of mathematics* (1831/1910)》(이하, 간단히 OSDM), 《*Elements of algebra*(1835/1837)》(이하, 간단히 EAL), 《Trigonometry and Double Algebra(1849)》(이하, 간단히 TDA)를 중심으로, 그가 제시하고 있는 음수 지도 방법에 관해 논의한다. 이 세 저서는 음수에 대한 하나의 학습 계열을 이룬다. 드모르간은 각 저서에서 학습자의 수준을 고려하여 음수 지도에 있어서의 강조점을 조금씩 변형하여 간다. 드모르간은 수학의 본질을 실제적 의미성과 추상적 형식성과의 상보적 조화로 보았는데(최지선 외, 2008), 그는 이 세 저서를 통해 그러한 상보적 조화라는 관점에서 음수 지도 방법을 제시하고 있다.

II. 드모르간의 음수관

드모르간은 1835년 이후 피콕의 형식불역의 원리를 따르는 기호대수를 인정하였을 뿐만 아니라, 대수적 자유를 주장하였다. 그는 대수를 일종의 게임으로 보았는데, 이 게임에서 공리는 단지 가정으로 간주되며, 대수는 그 위에서 규칙에 따라 전개된다(Pycior, 1983). 드모르간은 완전한 대수가 되기 위해서는 구문론적 측면과 의미론적 측면이 서로 유기적으로 결합되어야 한다고 보았다(Richards, 1987). 음수는 대수에 대한 드모르간의 관점을 가장 잘 드러내는 예이다. 음수는 자연수, 분수, 소수에서 나타나는 구문론적 측면의 규칙에서 생겨나게 되는데[1], 새롭게 생겨난 규칙과 음수가 대수가 되기 위해서는 의미론적 측면이 적절하게 제시되어 구문론적 측면과 조화를 이루어야 한다. 추상적 형식과 실제적 의미를 조화시킴으로써 음수를 정의하는 방식은 드모르간이 구분한 대수 발생 단계에 잘 드러난다. 그는 대수의 발생 과정을 [그림 II-1]과 같이,



[그림 II-1] 드모르간의 대수 발달 과정과 음수의 발달

1) 드모르간은 경우에 따라서 음의 양(negative quantity), 음의 기호(negative sign), 음수(negative number)라는 용어를 사용하기 때문에 이들을 일괄적으로 음수(negative number)라고 할 수는 없다. 이 연구에서는 음수라는 대상을 통칭하는 경우에 '음수'라고 하기로 한다.

산술 → 보편산술 → 단일대수 → 이중대수 로 설명하였다. 또, 단일대수와 이중대수로 가는 과정을 설명하기 위해서 기호대수와 의미대수 단계를 설정하였다(TDA).

산술은 자연수, 분수, 소수를 다루는 계산 방법과 그것을 응용한 문제해결 과정으로 구체적인 수를 그 대상으로 한다(De Morgan, 1830/1846). 보편산술은 수 일반을 나타내는 기호와 문자 기호를 사용하는 계산 형식에 대한 계산법을 다루는 것으로, 필요하면 각 단계에 제한 조건을 부과할 수 있다. 예를 들어 두 수의 차를 계산할 때 실제적 계산이 가능하도록 앞의 수가 뒤의 수보다 커야 한다는 조건을 붙일 수 있다. 특정 기호 사이의 계산 법칙을 모은 다음, 특정 기호의 의미를 버려 의미가 사라진 규칙 체계인 기호적 계산법을 얻는 단계인 기호대수 단계에 이른다. 그 이후에 기호적 계산법 자체를 논리적으로 만들기 위해 기호에 확장된 의미를 부여하여, 의미적 계산법으로 만드는 의미대수 단계로 나아간다. 기호대수와 의미대수 단계를 거치면서 뺄셈에 대한 의미를 부여한 단일대수 단계와 $\sqrt{-1}$에 대한 의미를 부여한 이중대수 단계가 발생한다(TDA: 99-100).

드모르간은 각 단계에서 음수를 서로 다른 방식으로 설명하였다. 보편산술 단계에서는 음수를 '불가능한 뺄셈' 또는 '불가능한 것(impossibility)'으로 설명하였다(TDA: 95). 보편산술 단계는 산술 단계에서 다루던 구체적 수 사이의 연산에 대한 규칙이 탐구되는 단계로, 작은 양에서 큰 양을 빼는 조작이 나타나는데, 드모르간은 이것을 불가능한 것이라고 말한다. 이 불가능한 조작을 막기 위해서 앞의 양이 뒤의 양보다 크다는 제한을 두게 된다. 하지만 방정식을 해결하는 과정에서는 이러한 제한을 처음부터 두는 것이 가능하지 않기 때문에, 불가능한 조작이 나올 때마다 불가능성의 원인이 되는 문제의 진술을 바꾸는 방법을 사용한다. 즉, 하나의 양을 구하고자 했던 양과 정반대의 성질을 가진 것으로 가정하여 다시 문제를 해결한다(EAL: 44-46; TDA: 95). 여기서 두 문제해결 과정의 규칙이 같다는 것을 알게 됨으로써, 불합리한 결과를 합리적인 것으로 보고, 불합리한 결과에 대한 규칙이 존재하는가를 탐구하는 것으로도 문제를 해결할 수 있다는 것을 발견하게 된다(EAL: 44). 이것이 보편산술 단계에서 대수 단계로 이행하는 계기가 된다.

보편산술에서 단일대수로 이행하는 첫 단계는 특정 기호의 의미를 버리고, 특정 기호 자체와 조작규칙의 집합만을 얻는 단계이다(TDA: 97-98). 드모르간은 이 단계에서 기존의 불가능한 조작, 예를 들어, $3-7$을 오늘날의 동치류의 의미를 가진 것으로 보고, 이를 0보다 작은 양 또는 음의 양이라고 하였다(TDA: 99).[2] 이 음의 양은 처음에 가정하였던 것과 정반대 종류의 양이다(EAL: 59; TDA: 97). $7-3=4$인 것처럼, $3-7$이 의미하는 것은 4와 반대 종류의 양이다. 결국 $3-7, 2-6, 1-5, 0-4$ 등은 모두 동치이고, 이것을 대표하는 문자를 $\bar{4}$와 같이 표현할 수 있다. 이것은 오늘날의 관점에서 본다면 음수를 동치류로 보는 것이다. 그는 이들이 완전히 같은 것이 아니기 때문에 동일하다(equal)라는 단어를 사용해서는 안 되고 동치(equivalent)라고 해야 한다고 하였다. 그런 후에, $0+5$에서 0을 쓸 필요가 없는 것처럼, $0-5$에서도 0

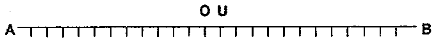
2) Arcavi에 의하면 음수를 발견한 사람이나 시기는 존재하지 않는다(Arcavi, 1983). 피콕도 음의 양이라는 단어를 사용하였다. 반면 4원수를 발견하여 대수의 해방을 가져온 Hamilton은 contra-positive number라는 용어를 사용하였다(Arcavi, 1983).

을 쓰지 않은 형태인 -5라고 해도 되기 때문에 -5가 곧, $\overline{5}$와 같은 것이고, 이것을 음의 양이라고 정의한다. 즉, 드모르간은 단일대수 단계에서 음수를 동치류의 의미를 가진 음의 양이라고 하였다.

보편산술에서 단일대수로 이행하는 둘째 단계는 모아진 기호 자체와 조작규칙의 집합에 확장된 의미를 주는 것이다(TDA: 98). 드모르간은 새로 이름 붙여진 음의 양에 확장된 의미를 부여하기 위한 의미체계(signification)로 수직선을 사용하였다. [그림 II-2]와 같이, 수직선에 기준이 되는 임의의 한 점 O를 잡고 그것을 영점(zero-point)이라고 하였다. 영점의 오른쪽에 위치한 단위선분을 U라고 할 때, 어떤 양을 U의 배수로 표현하면, 그 양과 정반대되는 성질의 양은 영점의 왼쪽에 위치한 단위선분의 배수가 되는 선분으로 표현한다. 이때 정반대되는 성질의 양을 표현하기 위하여 단위기호로서 -1을 사용한다(TDA: 96-97). 예를 들어, -3은 3을 표현하는 단위의 배수와 반대되는 단위의 배수를 나타낸다. $+1$과 -1에 확장된 의미 즉, 서로 정반대 종류의 단위라는 의미를 부여하면, 덧셈과 뺄셈만을 의도했던 기존의 기호(sign)는 방향(direction)과 관계(connection)라는 두 가지 의미체계(signification)를 가지게 된다. 방향에서 +는 이득을, -는 손해를 나타낸다. 관계에서 +는 접합(junction)을, -는 제거(removal)를 의미한다. 예를 들어

$$(-3)+(+8)-(-7)+(-4)-(+3)$$

을 "A씨가 3을 잃고, 8을 얻고, 7이라는 손해를 제거하고, 이어서 4의 손해가 났고 3의 이득을 제거하였다. 이러한 모든 행동의 결과는 무엇인가?"와 같이 해석할 수 있다(TDA: 97).



[그림 II-2] 드모르간이 제시한 음수에 대한 수직선 모델(TDA: 96)

드모르간은 단일대수 단계에서 동치류로서의 음의 양이 갖는 특징을 다음과 같은 목록으로 제시하였다(EAL: 58-64). 이것은 양(陽)의 양으로 한정되었던 보편산술 단계에서 나아가 기존의 기호(sign)에 확장된 의미를 줌으로써 양의 범위를 확장하고, 기존의 연산을 새롭게 해석하는 것을 보여준다.

1. 양은 산술에서 적용되고, 대수에서는 상징(symbol)이 적용된다. 양은 양(陽)이거나 음이다. 산술의 양은 모두 양(陽)이다. 양(陽)의 양과 음의 양은 정반대의 의미를 갖는다.
2. 덧셈과 뺄셈, 빼야 하는 것의 기호(sign)를 바꾼다. 예를 들어, $3+(5-2)=3+5-2, 8-(5-2)=8-5+2$
3. 상등, 두 개의 대수적 표현이 오류 없이 다른 것으로 대치된다면 상등이라고 말하고, 그 사이에 =을 쓴다.
4. 대소, 모든 양(陽)의 양은 없는 것보다 크다. 모든 음의 양은 없는 것보다 작다. 두 개의 양(陽)의 양은, 산술적으로 큰 것이 크다. 두 개의 음의 양은 산술적으로 큰 것이 작다. 더하는 양이 클수록 그 결과가 커진다. 빼는 양이 작을수록, 그 결과가 커진다. a가 b보다 크면, $a-b$는 양(陽)이고, a가 b보다 작으면 $a-b$는 음이다.
5. $+a\times+b$와 $-a\times-b$ 모두 $+ab$이다. $-a\times+b$와 $+a\times-b$ 모두 $-ab$이다.
6. 비례관계(proportion), 네 개의 양이, 첫째 양을 둘째 양으로 나눈 것이 셋째 양을 넷째 양으로 나눈 것과 같을 때, 비례관계에 있다고 한다. 확장된 의미체계(signification)에서, 이 정의는 산술에서의 비례관계의 정의와 같다. 따라서 $\frac{3}{-4}$와 $\frac{-6}{8}$은 비례관계에 있다.

드모르간에 의하면, 음수를 이중대수의 의미체계에서 충분히 설명할 수 있다. 단일대수 단계에서 음의 양에 수직선이라는 기하학적 의미체계를 부여하는 경우, $\sqrt{-1}$을 수직선 위에서 표현하는 것이 불가능하다는 문제점이 나타난다. 이러한 문제점을 해결하기 위해 기호들의 의미가 일관되도록 의미체계를 확장해야 한다. 드모르간은 이를 위해 벡터 대수적 해석을 사용하였다. 예를 들어, $\sqrt{-1}$을 크기와 방향을 가진 것으로 보고 이를 평면에 표현하였다. 이러한 의미체계에서는 복소수 $(-2, a)$를 표현할 때 -2를 사용하지 않고 $(-2, a+\pi)$로 바꾸어 표현할 수 있는데. 드모르간은 이 과정에서 '음수'라는 용어를 사용하였다(TDA: 120). 이와 같이 드모르간은 음수를 이중대수 단계에서 완성되는 것으로 설명하였다. 드모르간의 음수관에 따르면 음수는 산술로부터 출발한 연산규칙과 그 의미가 확장되어 감에 따라 변화한다. 처음에는 불가능한 뺄셈으로부터 나타났으나 동치류의 의미를 가진 음의 양으로, 수직선에서 구체적 의미를 가지는 것으로, 복소평면에서 구체적 의미를 가진 것으로 점차적으로 완성되어 간다. 이러한 과정은 드모르간이 가졌던 구문론적 측면과 의미론적 측면의 상보적 조화라는 수학관과 일치한다.

III. 드모르간의 음수 지도 방법

1. 드모르간의 음수 지도 단계

가. 불가능한 뺄셈의 탐색

드모르간의 음수 지도 방법은 보편산술 단계에서의 일차방정식 해결 과정에서 발생하는 불가능한 뺄셈을 탐색하는 것으로 시작한다. 그는 학생들에게 방정식 풀이에서 해를 구한 후, 그 해의 검증에서 어떤 현상이 발생하는지를 관찰하게 하는데, 이를 통하여 불가능한 뺄셈이 발생하는 맥락을 제공하여 학생들이 그 값을 모르는 문자를 다루는 보편산술에서 불가능한 뺄셈이 발생할 수 있음을 깨닫게 한다(EAL: 12-21). 예를 들어, 방정식

$$x+\frac{x-2}{3}-\frac{x}{6}=\frac{1}{6}-\frac{x}{2}$$

를 풀면 $x=\frac{1}{2}$이고, 따라서

$$\frac{\frac{1}{2}-2}{3}$$

라는 불가능한 뺄셈이 발생한다. 다른 한편으로 방정식 $50+x=2(35+x)$의 풀이 과정에서

$$2x-x=50-70$$

과 같이 불가능한 뺄셈이 발생할 수도 있다.

드모르간은 문제의 진술이나 문제를 다루는 방식 즉, 방정식을 유도할 때, 어떤 양이 원래 가정되어야 하는 것에 정반대의 종류로 가정되기 때문에 불가능한 뺄셈이 발생한다고 설명한다(TDA: 95). 예를 들어, "1830년에 A의 나이는 50, B의 나이가 35이다. A의 나이가 B의 나이의 두 배가 되는 해를 구하여라(EAL: 15)"로부터 $50+x=2(35+x)$와 같은 방정식을 만들게 되면, 이 방정식을 푸는 과정에서

$$2x-x=50-70$$

과 같은 불가능한 뺄셈이 발생한다. 이 경우 구하고자 하는 년도를 1830년 이전이라고 가정하여 방정식 $50-x=2(35-x)$를 만들어 $2x-x=70-50$, $x=20$으로 풀게 한다.

드모르간은 여기서 멈추지 않고, 주어진 문제에 관한 올바른 형태의 방정식과 올바르지 못한 형태의 방정식을 비교하여 방정식과 그 해의 수정규칙이 무엇이 될 수 있는지를 관찰하게 한다.

올바르지 못한 형태: $50+x=2(35+x)$,

$x=50-70$

올바른 형태: $50-x=2(35-x)$, $x=70-50$

방정식을 수정할 경우에는 x가 포함된 양의 부호를 +에서 -로, 또는 -에서 +로 변경하면 되고, 그 해를 수정할 때는 불가능한 뺄셈의 두 항을 바꾸기만 하면 된다(EAL: 18). 여기서 불가능한 뺄셈의 수정규칙 탐구는 이후 단계에서 도입되는 음수의 부호규칙을 자연스럽게 발견하는 역할을 한다.

나. 불가능한 뺄셈에 대한 수정규칙 탐구

단계 1에서 귀납적으로 불가능한 뺄셈의 수정규칙을 관찰하였다면 단계 2에서는 수정규칙을 체계적으로 탐구한다. 이러한 체계적 탐구의 필요성은 문제풀이의 효율성 측면에서 제시된다. 첫째 하위문제의 결과가 둘째 하위문제에 사용되는 방식으로 두 개의 하위문제가 결합되어 하나의 문제를 구성하고 있는 경우, 첫째 하위 문제에서 불가능한 뺄셈이 발생하였을 때 다시 첫째 문제의 잘못된 가정으로 되돌아가는 것이 아니라 불가능한 뺄셈을 합리적인 것으로 여기고 문제 풀이를 진행할 수 있는 규칙을 찾는다면, 첫째 하위 문제로 되돌아가지 않아도 된다(EAL: 44).

수정규칙의 체계적 탐구의 첫 걸음은 불가능한 뺄셈의 기호를 발명하는 것이다. 드모르간은 불가능한 뺄셈을 수나 문자 위에 가로선을 그은 기호로 표현한다. 예를 들어 불가능한 뺄셈 $3-7$을 $\overline{4}$로 표현한다. 이 기호는 올바른 뺄셈에서 두 수의 위치가 뒤바뀐 형식을 사용하고 있는 상황을 의미하며, 따라서 이 기호는 단일한 구체적 두수의 뺄셈 상황만을 표현하고 있지는 않다. 예를 들어 $\overline{20}$이 발생하는 방정식

$50+x=2(35+x)$

에서 양변에 임의의 수 a를 더하여

$2x-x=(50+a)-(70+a)$

를 얻을 수 있다. 위 방정식은 $50-70$ 뿐만 아니라 $51-71$, $62-72$ 등을 나타내며 이 상황은 $\overline{20}$으로 표현된다(EAL: 46). 즉, 불가능한 뺄셈의 기호는 동치류를 나타내는 기호이다.

불가능한 뺄셈의 수정규칙 탐구의 둘째 과정은 불가능한 뺄셈 기호에 대하여 보편산술에서 참이라고 증명된 조작규칙을 적용하여 어떠한 결과가 나오는지를 살펴보는 것이다. 먼저 불가능한 뺄셈 기호를 그 기호가 발생하는 방정식으로 표현하여 보고, 그 방정식에 조작규칙을 적용하여 그 결과를 다시 불가능한 뺄셈 기호로 표현하는 것이다. 불가능한 뺄셈 기호 자체에 규칙을 직접 적용하지 않는 이유는 이 단계에서 불가능한 뺄셈 기호 자체는 산술적 의미의 양이 아니어서 산술적 의미의 조작규칙을 바로 적용할 수 없기 때문이다(EAL: 46). 이 과정은 불가능한 뺄셈이 동치 관계에 있는 뺄셈을 살펴봄으로서 수정규칙을 찾는 과정이다. 예를 들어 불가능한 뺄셈 기호

$\overline{a}+\overline{b}$, $\overline{a}-\overline{b}$, $\overline{a}\times\overline{b}$, $\frac{\overline{a}}{b}$

에 대한 동치식을 찾게 되는데, $\overline{a}+\overline{b}$의 경우 방정식

$x+(p+a)-p+(q+b)=q$ … ①

로부터

$x=p-(p+a)+q-(q+b)=\overline{a}+\overline{b}$

를 유도할 수 있지만, 방정식 ①에 대수규칙을 적용하여

$x=p+q-(p+q+a+b)=(\overline{a+b})$

를 얻을 수 있으므로, $\overline{a}+\overline{b}$와 동치인 $(\overline{a+b})$를 얻을 수 있다. 또, 방정식

$x=pc+qd-qc-pd$

는 $x=(q-p)(d-c)$ 또는 $x=(p-q)(c-d)$로 정리될 수 있으며, $p-q$가 a, $c-d$가 b라면 $\overline{a}\times\overline{b}$와 $a\times b$는 동치가 되며 동시에 수정규칙이

된다. $c+\overline{a}$의 경우에 $\overline{a}$는 $z-(z+a)$로 표현할 수 있으며 $c+\overline{a}$는 $c+z-(z+a)$가 된다. 이 식에 규칙을 적용하면 $c+z-z-a$ 즉, $c-a$가 되므로 $c+\overline{a}$와 $c-a$는 동치가 되며 유사한 방식으로 $c-\overline{a}$는 $c+a$와 동치가 된다 (EAL: 49).

불가능한 뺄셈 기호의 수정규칙을 탐구한 후에는 부호규칙을 체계적으로 탐구하게 된다. $(p-\overline{a})\times(p-\overline{b})$는 앞의 결과에 의하여 $(p+a)\times(p+b)$와 동치이다. 이 두 동치식을 다음과 같이 전개하여 비교해 보면

$$pq-p\overline{b}-q\overline{a}+\overline{a}\,\overline{b},\ \ pq+pb+qa+ab$$

가 되며 $\overline{a}$, $\overline{b}$의 일차항에 대해서는 부호가 바뀌고, $\overline{a}\,\overline{b}$ 앞의 부호는 변경되지 않음을 발견할 수 있다. 이후에는 불가능한 뺄셈 기호가 여러 개 곱해져 있는 경우를 조사하여 불가능한 뺄셈 기호가 홀수 번 곱해진 경우에 그것이 수정될 때는 부호가 바뀌게 되고, 짝수 번 곱해진 경우에는 그것이 수정될 때에는 부호의 변화가 없음을 발견하게 한다.

부호 수정규칙을 탐구한 후에는 불가능한 뺄셈 기호($\overline{a}$)를 음수 기호($-a$)로 대치하여 불가능한 뺄셈 기호의 수정규칙은 결국 보편산술에서의 부호규칙과 동일함을 관찰하게 된다. 예를 들어 $b-\overline{a}$를 수정하면 $b+a$가 되는데, 보편산술에서 $b-(z-a)$(z가 a보다 크다)는 $b-z+a$가 되며, 이 규칙에서 a 앞에 있는 두 개의 음의 부호는 양의 부호가 되며 이 규칙을 $b-(-a)$에 적용하면 $b+a$가 된다. 따라서 $b-\overline{a}$에서 $\overline{a}$를 수정하는 것은 $-a$에 보편산술의 부호규칙을 적용하는 것과 같다(EAL: 53). 음의 부호가 여러 번 있을 경우를 살펴보아도 마찬가지 결과를 관찰할 수 있다. 예를 들어

$$a=b-\{d-(y-(t-z))\}$$

에 보편산술의 규칙을 적용하면

$$a=b-d+y+z$$

가 되어 z앞의 네 번의 음의 부호는 양의 부호가, y앞의 세 번의 음의 부호는 음의 부호가 된다. 따라서 음의 부호가 홀수 번 있으면 음의 부호가 되고, 짝수 번 있으며 양의 부호가 됨을 알 수 있다. $0-a$를 $\overline{a}$로 나타낸다면 $0-\overline{a}$는 $\overline{\overline{a}}$로, $0-\overline{\overline{a}}$는 $\overline{\overline{\overline{a}}}$가 된다. 이것이 연립방정식 $x+a=0$, $y+x=0$, $z+y=0$의 해일 때, 즉 $x=\overline{a}$, $y=\overline{\overline{a}}$, $z=\overline{\overline{\overline{a}}}$일 때, 둘째 방정식에서 첫째 방정식을 빼면 $y-a=0$ 즉, $y=a$가 되어 $\overline{\overline{a}}$가 a로 수정되며 두 번의 불가능한 뺄셈 기호는 양의 부호가 되고 $\overline{\overline{\overline{a}}}=0-\overline{\overline{a}}=0-a$에서 세 번의 불가능한 뺄셈 기호는 음의 부호가 됨을 알 수 있다. 즉, 불가능한 뺄셈 기호 $\overline{a}$는 $0-a$를 간단히 $-a$로 표현하는 것이고, $\overline{a}$의 수정규칙은 $-a$에 보편산술의 부호규칙을 적용하는 것이다.

다. 불가능한 뺄셈에 대한 의미의 구성

단계 3에서는 불가능한 뺄셈을 하나의 양으로 받아들이고 보편산술을 의미대수로 발전시키는 단계이다. 드모르간(EAL: 56)은 불가능한 뺄셈에 대한 수정규칙을 조사하면서 아래와 같이 반성을 하고 불가능한 뺄셈 기호는 보편산술의 조작규칙이 오류 없이 적용되는 조작규칙에 대한 일관성을 가지고 있음을 발견한다.

1. 우리는 수많은 경우들을 검토하였고 그때마다 항상 $0-c$가 똑같은 종류의 오류의 결과 즉, c에 의해 표현되는 양이 우리가 가정한 것과 반대되는 성질을 가지는 동일한 오류의 결과임을 발견하였다.
2. 우리는 또한 조사에 의해 덧셈과 뺄셈과 같이 모든 연산이 반대가 됨(inverted)을 발견하게 된다.

3. 오개념의 결과를 수정하지 않은 채 진행하여도, 원할 때면 언제든, 합리적 표현의 경우에서 연역되었던 규칙을 사용하기만 하면 수정할 수 있는 오류를 제외하고는 어떤 오류도 발생하지 않는다는 것을 발견하였다. 대수의 규칙은 불가능한 뺄셈 기호에 대하여 오류없이 적용될 수 있음을 발견하였다(EAL: 56).

여기서 드모르간은 '양'이라는 단어를 새롭게 정의한다(EAL: 56-57). 드모르간은 산술의 양은 보편산술의 규칙을 따르는 데, 불가능한 뺄셈 기호 역시 이 규칙을 따르게 되기 때문에 하나의 조작규칙을 따른 것을 동일한 대상으로 분류하여 이를 모아 양이라고 지칭할 수 있다고 말하면서 불가능한 뺄셈을 음의 양으로 정의한다(EAL: 58).

'얻어지는 방식'에 따라 양(陽)의 양과 음의 양은 상반되는 의미를 지니게 된다(EAL: 59). 이러한 의미는 기하의 직선(오늘날 수직선)에서 찾을 수 있는데 직선상의 임의의 점을 원점으로 할 때, 양(陽)의 양이 원점의 오른쪽 편으로 측정되는 양이라면, 음의 양은 원점의 왼쪽 편으로 측정되는 양이다(EAL: 59-60; TDA: 96-97). 이러한 의미 부여는 규칙들의 정당화 도구로 생각할 수 있다(EAL: 60; TDA: 96-97). 이것은 다양한 맥락의 음의 양과 관련된 대수의 모든 조작의 결과를 수직선에 표현할 수 있다는 의미로서 시간, 이득, 손실들로 해석되는 양이 수직선에서 단위선분에 의해 측정되는 선분으로 표현되는 것이다. 양(陽)의 양과 음의 양의 수직선 표현에서 음의 양은 양(陽)의 양과 다른 단위에 의해 표현되는 양으로, $+1$과 -1은 정반대 종류의 단위를 나타낸다.

양(陽)의 양과 음의 양에 의미를 부여한 후에는 '덧셈', '뺄셈', '같다', '크다', '작다', '증가하다', '감소하다'를 형식적으로 정의한다. 예를 들어 두 기호 사이의 크기 관계는 기호의 위치로 결정한다. 그래서 수는

$$\cdots,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ +1,\ +2,\ +3,\ +4,\ \cdots$$

와 같이 나열되며, 임의의 두 수 중 우측에 위치한 것이 좌측에 위치한 것보다 큰 것으로 정의한다.

음의 양에 대한 기하학적 의미 부여는 새로운 문제점을 드러내게 된다. 이것이 드모르간의 음수 지도 방법의 마지막 단계를 이끄는 단초를 제공한다. 단일대수 단계에서 탐구 활동을 계속하다 보면 수직선에 표현하는 것이 불가능한 $\sqrt{-1}$과 같은 음의 양의 조작 결과가 발생한다. 드모르간(EAL: 59)에 의하면 양 개념을 확장할 때, 대수에서의 양은 계산 결과로서의 모든 기호를 의미하였으므로 $\sqrt{-1}$은 -1이라는 기호와 $\sqrt{\ }$라는 기호의 결과가 되어 대수에서 다루어야 하는 대상임에도 불구하고, $\sqrt{-1}$을 수직선에 표현할 수 없게 되는 문제가 발생한다. 드모르간은 이 마지막 의미 확장을 위하여 조작규칙에 대한 일관성이라는 기준 이외에, 의미를 부여할 때 작동한 조작규칙들은 기호 의미의 필연적인 결과가 되어야 한다는 기준을 제시한다(TDA: 90, 104). $\sqrt{-1}$은 음의 양에 대한 수직선의 의미 부여가 이 기준을 만족하지 못함을 보여주는 예이다. 즉, $\sqrt{-1}$에는 수직선의 의미를 부여할 수 없다. 따라서

$$\sqrt{-1}\times\sqrt{-1} = -1$$

이라는 결과 또한 그 의미가 불분명해진다(TDA: 109-110). 음의 양에 수직선의 의미를 부여하는 것이 모든 결과를 의미 있게 만들지는 않기에, 음의 양은 불완전한 양이 된다. 드모르간은 음의 양에 벡터 대수적인 의미를 부여함으로써 허수와 그 조작규칙을 의미 있게 만든다. 즉, 평면에서 $\sqrt{-1}$에는 수직선의 원점에서 수직선과 수직인 단위선분이라는 의미를 부여하고, 각각의 선분의 연산에는 벡터 연산

이라는 의미를 부여한다(TDA: 109-128). 이렇게 음의 양과 그 연산에 대한 완전한 의미를 부여함으로써 음의 양은 완전히 하나의 양으로서 받아들여지게 되고, 음수 지도가 마무리된다.

2. 드모르간의 음수 지도 방법의 특징

가. 방정식 지도와 결합된 음수 지도

드모르간은 문장제 풀이 과정에서 발생하는 오류를 극복하여 음의 양을 이해하는 것이 보편산술에서 단일대수로의 전환 과정에서 중요하다고 보고 있다(TDA:95-98). 드모르간의 음수 지도에서 방정식은 불가능한 뺄셈의 발생 배경이 될 뿐만 아니라 불가능한 뺄셈 기호의 조작규칙에 대한 탐구 도구가 된다. 그에 의하면 $\overline{4}$와 같은 불가능한 뺄셈 기호는 상상가능한 양이 아니므로 이 기호 자체의 의미로부터 규칙을 추론할 수 없으며, 따라서 불가능한 뺄셈 기호의 발생 근원인 방정식을 조사하여야 한다(EAL:46). 예를 들어, $\overline{a}+\overline{b}$의 동치식을 조사할 때 $\overline{a}+\overline{b}$가 발생하는 방정식

$$x+(p+a)-p+(q+b)=q$$

에 대수규칙을 적용하여 다른 형태의 방정식

$$x=p+q-(p+q+a+b)=(\overline{a+b})$$

를 이끌어 내어 $(\overline{a+b})$가 $\overline{a}+\overline{b}$와 동치임을 설명하는 것과 같이 불가능한 뺄셈 기호의 조작규칙은 모두 방정식을 통하여 탐구된다. 드모르간의 음수 지도 방법에서, 불가능한 뺄셈은 방정식의 조작에서 발생하는 오류로서 도입되며 방정식을 조작하는 가운데 불가능한 뺄셈의 조작규칙이 탐구된다. 여기서 방정식은 음수의 발생 맥락과 조사 도구를 제공한다. 이와 같이 드모르간은 방정식 지도와 음수 지도를 유기적으로 결합하였다.

나. 불가능한 뺄셈 기호의 사용

드모르간은 음수 지도 초기에 $-a$와 같은 일상적인 음수 기호를 사용하지 않고 새로운 기호 $\overline{a}$를 사용한다. 그는 이 새로운 기호를 설명하면서 이 기호는 일반적으로 다른 사람들이 사용하지 않은 것이며, 뺄셈의 기호가 두 가지 의미로 사용되는 것을 피하기 위해 도입한 것이라고 설명하고 있다(EAL:53). 그는 음수 지도에서 기호 $\overline{a}$가 $-a$로 대치될 때 그 의미를 명확하게 구별한다. 그는 +와 -가 지향적인 의미와 결합적인 의미를 지닌 것으로 설명한다. 예를 들어 $+(-3)$에서 지향적 의미는 $-$에 부여되며 어떠한 양에 대한 것인지를 나타내고, 결합적 의미는 앞에 있는 +에 부여되어 다른 양과 어떻게 결합되는가를 나타낸다. 결합적 의미에서 보면 $+$는 접합을 $-$는 제거를 나타낸다. 지향적 의미는 양(量)의 성질에 관련된 것으로서 만약 +와 -가 이득과 손실로 해석된다면 II장에서 살펴본 바와 같이 +와 -는 하나의 의미로 고정되는 것이 아니라, 어떤 양과 정반대되는 성질을 가진 양을 표상하는 것이다.

드모르간의 음수 지도 방법에서 새로운 기호 $\overline{a}$가 일반적인 기호 $-a$로 대치되는 과정은 보편산술의 부호규칙이 기호 $-a$에 오류 없이 적용되는 것을 관찰할 수 있는 기회를 제공한다. 예를 들어 $b-\overline{a}$가 수정되면 $b+a$가 되고 $\overline{a}$ 대신에 $-a$를 대치하면 $b-(-a)=b+a$가 되는데 보편산술에서

$$b-(z-a)=b-z+a \ (z>a)$$

와 같이 두 음의 부호 -는 양의 부호 +가 된다는 규칙이 적용되는 것으로 볼 수 있으며, 이와 같은 방식으로 다른 경우에서도 동일하게 적용됨을 보일 수 있다(EAL:53).

다. 역사발생적 과정을 준수하는 점진적 형식화

드모르간의 음수 지도 방법은 역사발생적 과정을 준수하는 점진적 형식화를 도모한다. 그는 음수와 관련된 대수의 역사가 세 단계를 거친다고 말하고 있다(TDA: 98). 첫째 단계는 a, b와 같은 일반적인 기호를 사용하면서 뺄셈의 결함을 명확하게 인식하는 단계이다. 둘째 단계는 기호를 사용하여 대수를 연구하면서 불가능한 뺄셈에 대수규칙을 적용하면 언제나 참인 결과를 도출할 수 있기 때문에 아무런 문제가 없다는 것을 알게 되는 단계이며, 셋째 단계는 음의 양이 의미를 가지게 되는 단계이다(TDA: 98-100). 이러한 역사적 흐름은 드모르간의 음수 지도 단계에서도 나타난다. 음수는 처음에는 일종의 오류로서 거부되다가 음수를 나타내는 기호를 발명하고, 그 기호에 대하여 대수규칙을 적용하였을 때 항상 일관된 결과를 얻을 수 있게 되어 새로운 양으로 받아들여지게 되고 단일대수를 거쳐 이중대수 단계에 이르러 의미를 가지게 된다(TDA: 98-100). 드모르간의 이러한 역사적 반성은 그로 하여금 음수 지도에서 방정식을 적극적으로 사용하게 만들었다. 방정식은 불가능한 뺄셈이 발생하는 근원일 뿐만 아니라 불가능한 뺄셈의 조사 도구이기도 하다. 방정식을 통한 음수의 탐구는 음수의 계산 규칙은 음수의 의미로부터 유도되는 것이 아니라 방정식을 통해 유도되는 것임을 볼 수 있게 한다.

IV. 드모르간의 음수 지도 방법의 장·단점

앞에서 드모르간의 음수 지도 방법의 특징을 방정식 지도와 결합되어 있다는 것, 기호 $\overline{a}$를 사용한다는 것, 음수의 발생적 과정을 고려한 점진적 형식화를 추구한다는 것으로 나누어 살펴보았다. 이 장에서는 이 세 가지 특징을 중심으로 드모르간의 방법을 현행의 우리나라 교과서에서 볼 수 있는 방법과 비교하면서 그 장·단점을 분석한다.

방정식 지도와 결합되어 있는 드모르간의 음수 지도 방법은 현재의 방법과 다르다. 현행 교과서에서는 음수를 온도계의 영하 온도, 금전적 손해, 수면 아래의 깊이 등의 상황을 통하여 도입한 후 그 연산규칙을 가르치고 그 후에 문자식을 도입하도록 되어 있다(강옥기·정순형·이환철, 2001; 강행고·이화영·박성기·박진석·이용완·한경연 외, 2001; 고성은·박복현·김준희·최수일·강운중·소순영, 2001; 금종해·이만근·이미라·김영주, 2001; 박규홍·한옥동·김성국·임창우·고성군·김유태 외, 2001; 박윤범·박혜숙·권혁천·육인선, 2001; 배종수·박종률·윤행원·유종광·김문항·민기열 외, 2001; 신항균, 2001; 이영하·허민·박영훈·여태경, 2001; 이준열·장훈·최부림·남호영·이상은, 2001; 조태근·임성모·정상권·이재학·이성재, 2001; 황석근·이재돈; 2001). 이때 음수의 연산규칙을 가르치기 위해서는, 특히 곱셈연산과 관련된 규칙을 가르치기 위해서 ① 귀납적 외삽법, ② 시간-위치-속력 모델, ③ 셈돌 모델 등 다양한 방법을 사용한다(강옥기 외, 2001; 강행고 외, 2001; 고성은 외, 2001; 금종해 외, 2001; 박규홍 외, 2001; 박윤범 외, 2001; 배종수 외, 2001; 신항균, 2001; 이영하 외, 2001; 이준열 외, 2001; 조태근 외, 2001; 황석근 외; 2001).

Gallardo(2002: 188)가 지적한 바와 같이 음수의 발생은 대수언어 및 방정식 풀이와 깊은 관련을 가지고 있다. 이것은 음수의 본질적 이해를 위해서는 대수적 수준에서의 표현을 통

하여 산술적 문맥에서 대수적 문맥으로 개념적 틀을 바꾸어야 함을 말해준다(우정호, 최병철, 2007). 음수 개념은 구체적인 모델을 포기하고 형식적인 수학의 틀 안에서 수의 범위를 확대시키는 한편 양을 수에 종속시킴으로써 완성되었다(Hefendehl-Hebeker, 1991). 음수를 게임이나 모델을 통하여 도입하려고 시도한 학자들 역시 음수의 각 모델이 나름의 강점과 약점을 가지고 있어서 단일모델로는 음수를 충분히 설명할 수 없다는 점을 인정하고 있다(Linchevski & Williams, 1999: 143). 단일한 모델로는 음수를 충분히 설명할 수 없다는 점과 음수가 그 발생적 뿌리를 방정식과 같이 한다는 측면에서 드모르간의 음수 지도 방법은 음수의 본질을 이해하는 데 도움을 줄 수 있다. 그러나 다른 한편으로 대수를 기반으로 하는 음수의 학습은 대수식과 관련한 어려움 때문에(Chalouh & Herscovics, 1988; Kieran, 1981, 1988) 또 다른 학습 장애를 불러올 위험성을 가지고 있다.

드모르간이 사용하는 $\overline{4}$, $b-\overline{a}$ 등과 같은 표현은 그의 음수 지도에서 매우 중요한 역할을 한다.[3] 그는 이 표현을 사용하여 -가 가지는 이중적 의미를 명확하게 하는 동시에 +, -와 관련된 연산규칙을 정당화한다. 이것은 +, -가 연산기호로서 사용될 때와 수 앞의 기호로 사용될 때를 명확하게 구분하여 +, -의 이중적 의미를 이해하는 데 도움을 줄 것이다. 실제로 학생이 +, -의 이중적 의미를 구분하여 이해하기는 쉽지 않다. 예를 들어, Vlassis(2004: 481)는 12명의 8학년 학생을 대상으로 한 실험에서 어떤 학생도 -에 일항적(unary) 측면과 이항적(binary) 측면이 공존한다는 사실을 인지하지 못하였다고 지적하고 있다. 일항적 측면이란 감수, 상대적인 수, 음의 해, 형식적인 음수를 나타내는 기호로서의 측면을 말하는 것이고, 이항적 측면이란 연산을 나타내는 기호로서의 측면을 말하는 것으로, 이것은 드모르간이 구분하고자 하였던 -의 이중적 의미와 일맥상통한다. 김홍기와 김응석(2006: 3)도 ‘+1을 플러스 1’, ‘-1을 마이너스 1’로 읽도록 되어 있는 현행 교과서가 오류를 범하고 있다고 지적하면서, ‘$-a$’는 ‘a의 반수(반대인 수)’라고 읽는 방법을 추천하고 있다. 이것 역시 +, -의 이중성에 주목한 것이다. 드모르간의 방법에는 이중성을 인식시킨다는 측면에서 장점이 있지만, 이후 하나의 기호로 통일되었을 때 다시 $\overline{4}$와 같은 표현으로 회귀하는 경향을 보일 위험성도 있다.

드모르간의 음수 지도 방법은 역사발생적 과정을 고려한 점진적 형식화를 그 중요한 특징으로 한다. 이와 같은 점진적 형식화 과정은 Vlassis(2004)가 말하는 개념전환(conceptual changes) 이 비교적 자연스럽게 일어나게 할 수 있다. Vlassis(2004)는 학생이 산술에서의 기존 지식을 음수(혹은 음의 부호)를 조작하여야 하는 대수규칙에 융화시키는 과정에서 일종의 개념전환이 필요하다고 말하고 있다. 긴 탐구 과정을 거쳐 ‘양(量)’을 재정의하는 드모르간의 방법은 이러한 개념전환의 예를 보여준다. 드모르간은 동일한 조작규칙을 따르는 것을 동일한 것으로 분류한다는 기준을 세워 음의 양 역시 같은 조작규칙을 따르게 되므로, 양이라고 지칭할 수 있다고 말한다. 이와 같은 양의 재정의 과정은, 예를 들어

$$1 : -4 = -5 : 20$$

과 같은 비례식의 의미를 조작규칙에 주목하는 방식으로 재음미할 수 있게 한다. 드모르간(EAL: 64)은 네 양이 비를 이룬다는 것을 “첫

3) 실제로 $\overline{4}$와 같은 표현은 오늘날 상용로그의 지표가 음수인 경우에 대한 표현에 남아 있어, 여전히 고등학교 교과서에서 사용되고 있다(조태근 · 임성모 · 정상권 · 이재학 · 홍진곤, 2003: 33).

째 양이 둘째 양으로 나누어진 것은 셋째 양이 넷째 양에 의해 나누어진 것과 동일하다."로 정의한다. 이는 구체적인 맥락을 제거하고 조작규칙에 주목하여 비례식을 이해하도록 하는 것이다. 이 예는 음수를 점진적으로 형식화하여 가는 드모르간의 방법의 장점을 보여준다.

V. 결 론

드모르간이 실제적 의미와 추상적 형식을 상보적으로 조화시킴으로써 음수를 정의하는 방식은 그가 구분한 대수 발생 단계를 보면 명확하다. 그는 대수의 발생 과정을 '산술 → 보편산술 → 단일대수 → 이중대수'의 네 단계로 구분하였다. 또, 단일대수와 이중대수로 나아가는 과정을 설명하기 위해 기호대수와 의미대수 단계를 설정하였다. 그는 각 단계에서 음수를 서로 다른 방식으로 정의하고 설명하였다. 보편산술 단계에서는 음수를 불가능한 뺄셈 또는 불가능한 것으로 간주한다. 드모르간은 이 단계에서 기존의 불가능한 조작, 예를 들어, 3–7을 동치류의 의미를 가진 것으로 보고, 이것을 0보다 작은 양 또는 음의 양이라고 하고, 그 이후에 모아진 기호 자체와 조작규칙의 집합에 확장된 의미를 주는 방법을 택한다. 드모르간의 음수 개념은 이중대수 단계에서 완성되는 바, $\sqrt{-1}$ 에 대한 의미 체계를 찾는 과정에서 음수라는 용어를 사용하게 된다. 드모르간은 수학적 실재를 형식과 의미를 동시에 갖는 것으로 보았던 자신의 수학관에 따라 음수를 설명하였으며, 대수의 발달 단계에 맞추어 음수를 서로 상이한 존재로 간주하였다. 음수는 양의 관점에서 다루어지는 산술 단계에서는 불가능한 것이었다가 연산의 규칙으로부터 추상되는 동치류로서의 음의 양으로 바뀐다. 그리고 음의 양이 $\sqrt{-1}$을 포함한 복소수의 의미체계 속에서 비로소 음수라는 수학적 대상이 된다.

드모르간은 음의 양을 보편산술에서의 일차 방정식에서 발생하는 불가능한 뺄셈으로 도입한 후, 불가능한 뺄셈의 발생과 수정규칙을 귀납적으로 다룬다. 다음 단계에서는 불가능한 뺄셈을 과학적으로 즉, 수정규칙에 대한 체계적인 탐구를 하게 된다. 마지막 단계에서는 불가능한 뺄셈을 하나의 양으로 받아들이고 보편산술을 의미대수로 발전시킨다. 드모르간의 음수 지도 방법에서는 학습자의 수준을 고려하여 그 방법을 달리하고 있고, 특히 음수의 역사발생적 과정을 준수하는 점진적 형식화를 도모하고 한다. 그는 음수와 관련된 대수의 역사가 세 단계를 거친다고 말하고 있으며, 그 역사발생의 과정은 그의 지도 방법과 일맥상통한다. 그의 지도 방법은 대수 지도, 특히 방정식 지도와 면밀하게 결합되어 있다. 이 방법은 문자를 사용하는데 어려움을 가지고 있는 학생의 음수 개념의 습득을 힘들게 할 수 있지만, 음수 개념의 형식적 본질을 이해하는 데는 유리하다. 드모르간이 사용하는 $\bar{4}$ $b-\bar{a}$ 등과 같은 과도기적 표현은 비록 이후의 학습에서 학생들에게 -를 능숙하게 사용하게 하지 못하고 $\bar{4}$와 같은 기호로 회귀하려는 경향을 불러올 위험을 가지고 있으나, -의 이중적 의미를 이해하는 데 도움을 줄 수 있다. 드모르간의 방법에서 또 한 가지 주목할 것은 양의 개념을 재음미하는 과정이다. 이와 같은 양의 재정의 과정은 1 : -4 = -5 : 20과 같은 비례식의 의미를 조작규칙에 주목하는 방식으로 재음미할 수 있게 한다는 점에서 중요하다.

드모르간의 음수 지도 방법에서 서로 다른 대상을 상대로 서로 다른 관점에서 음수를 지도하려고 시도하고 있다는 것에 주목할 필요가 있다. OSDM, EAL, TDA는 각기 다른 학습자를

대상으로 한 것으로 그 접근 방법이 서로 다르다. 먼저 OSDM은 초보학습자들에게 수학을 학습할 때 겪을 어려움을 극복하고 수학적 개념을 이르는 과정을 제시하는 저서로, 음수를 다룰 때 드모르간은 다양한 경험을 제시하고 관찰로부터 음의 양에 대한 규칙을 유도하도록 하고 있다. EAL은 증명을 통해 산술의 원리에 대한 지식을 습득하였고 추론 능력을 어느 정도 연습한 학생들을 대상으로 하는 대수 학습서로, 음수를 방정식과 결합된 방식으로 체계적으로 접근하게 하고 있다. TDA에서는 산술과 대수에 대한 충분한 지식을 가진 학생들에게 대수의 한 분야인 삼각함수를 소개하고, 기호적 특성을 지닌 대수에 대수의 모든 기호에 의미를 제공하는 기하학적 의미를 준다. 드모르간 당시에 대수가 단단한 기초를 갖게 되고, 음수 개념이 학문적으로 정립되었다는 점을 고려할 때, 그의 이러한 세심한 조처는 음수의 지도가 단시간에 마무리될 수 없는 성격의 것임을 분명히 인식하게 해 준다.

참고문헌

강옥기 · 정순형 · 이환철(2001). **중학교 수학 7-가.** 서울: 두산.

강행고 · 이화영 · 박성기 · 박진석 · 이용완 · 한경연 · 이준홍 · 이혜련 · 송미현 · 박정숙(2001). **중학교 수학 7-가.** 서울: 중앙교육진흥연구소.

고성은 · 박복현 · 김준희 · 최수일 · 강운중 · 소순영(2001). **중학교 수학 7-가.** 서울: 블랙박스.

금종해 · 이만근 · 이미라 · 김영주(2001). **중학교 수학 7-가.** 서울: 고려출판.

김흥기 · 김응석(2006). 제7-단계 수학에서 양·음수의 지도에 관한 연구. **학교수학 8**(1), 1-25.

박규홍 · 한옥동 · 김성국 · 임창우 · 고성군 · 김유태 · 육상국 · 박재용(2001). **중학교 수학 7-가.** 서울: 두레교육.

박윤범 · 박혜숙 · 권혁천 · 육인선(2001). **중학교 수학 7-가.** 서울: 대한교과서.

배종수 · 박종률 · 윤행원 · 유종광 · 김문항 · 민기열 · 박동익 · 우현철(2001). **중학교 수학 7-가.** 서울: 한성교육연구소.

신항균(2001). **중학교 수학 7-가.** 서울: 형설출판사.

우정호(2003). **학교수학의 교육적 기초(증보판).** 서울: 서울대학교 출판부.

우정호 · 최병철(2007). 음수 개념의 이해에 관한 교수학적 분석. **수학교육학연구, 17**(1), 1-31.

유미경 · 김재홍, 권석일, 박선용, 최지선, 박교식(2008). 대수발달의 단계에 관한 드모르간의 관점. **한국수학사학회지, 21**(4), 61-78.

이영하 · 허민 · 박영훈 · 여태경(2001). **중학교 수학 7-가.** 서울: 교문사.

이준열 · 장훈 · 최부림 · 남호영 · 이상은(2001). **중학교 수학 7-가.** 서울: 교학사.

조태근 · 임성모 · 정상권 · 이재학 · 이성재(2001). **중학교 수학 7-가.** 서울: 신흥인쇄.

조태근 · 임성모 · 정상권 · 이재학 · 홍진곤(2003). **고등학교 수학 I.** 서울: 금성출판사

최병철(2006). 음수 개념의 이해에 관한 교수학적 분석. 서울대학교 박사학위 논문

최지선 · 유미경 · 박선용 · 권석일 · 박교식(2008). 수학교육에 관한 드모르간의 관점 조명. **수학교육학연구, 18**(2), 223-237.

황석근 · 이재돈(2001). **중학교 수학 7-가.** 서울: 한서출판사.

Arcavi, A. (1985). *History of mathematics as* *a component of mathematics teachers background.* unpublished doctoral dissertation.

Chalouh, L. & Herscovics, N.(1988). Teaching algebraic expressions in a meaningful way. In A. Coxford & A. Shulte (eds.), *The Ideas of Algebra,* K-12(pp. 33-42). Reston, VA: NCTM.

De Morgan, A. (1830/1846). *Elements of arithmetic,* London: Walton,

De Morgan, A. (1831/1910). *On the study and difficulties of mathematics.* Chicago: The open court publishing company.

De Morgan, A. (1835/1837). *Elements of algebra: preliminary to the differential calculus,* London: Taylor, Walton.

De Morgan, A. (1849). *Trigonometry and Double Algebra,* London: Taylor, Walton & Maberly.

Frend, W. (1796). *The principles of algebra.* London: Paternoster-row.

Freudenthal, H. (1983). Didactical phenomenology of mathematical structures. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Gallardo, A. (2002). The extension of the natural-number domain to the integers in the transition from arithmetic to algebra. *Educational studies in mathematics 49*(2), 171-192.

Guinness, G. (1992). An eye for method: Augustus De Morgan and mathematical education. *Paradigm,* 9.

Hefendehl-Hebeker, L. (1991). Negative number: obstacles in their evolution from intuitive to intellectual constructs. *For the learning of mathematics 11*(1), 26-32.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational studies in mathematics, 12,* 317-326.

Kieran, C. (1988). Two different approaches among algebra learners. In A. Coxford & A. Shulte (eds.), *The Ideas of Algebra,* K-12(pp. 33-42). Reston, VA: NCTM.

Linchevski, L. & Williams, J.(1999). Using intuition from everday life in 'filling' the gap in children's extension of their number concept to include the negative numbers. *Educational studies in mathematics 39,* 131-147.

Pycior, H. M. (1983). Augustus De Morgan's algebraic work: the three stage. *Isis, 74*(1) 211-226.

Richards, J. L., Augustus De Morgan, the history of mathematics, and the foundations of algebra. *Isis, 78*(1) (1987) 6-30.

Vlassis, J. (2004). Making sense of the minus sign or becoming flexible in 'negativity'. *Learning and instruction 14,* 469-484.

A Study on the De Morgan's Didactical Approaches for Negative Numbers

Kwon, Seok Il (Gyeongin National University of Education)
Kim, Jae Hong (Graduate School of Seoul National University)
Choi, Ji Sun (Jungheung Middle School)
Park, Sun Yong (Korea Institute for Curriculum and Evaluation)
Park, Kyo Sik (Gyeongin National University of Education)

The objective of this paper is to study De Morgan's thoughts on teaching and learning negative numbers. We studied De Morgan's point of view on negative numbers, and analyzed his didactical approaches for negative numbers. De Morgan make students explore impossible subtractions, investigate the rule of the impossible subtractions, and construct the signification of the impossible subtractions in succession. In De Morgan' approach, teaching and learning negative numbers are connected with that of linear equations, the signs of impossible subtractions are used, and the concept of negative numbers is developed gradually following the historic genesis of negative numbers. Also, we analyzed the strengths and weaknesses of the De Morgan's approaches compared with the mathematics curriculum.

* key words : De Morgan (드모르간), negative numbers (음수), teaching and learning negative numbers (음수 지도), impossible subtractions (불가능한 뺄셈), linear equations (일차방정식), teaching and learning linear equations (일차방정식 지도), negative sign (음수 부호).

논문접수 : 2008. 12. 2
논문수정 : 2008. 12. 1
심사완료 : 2008. 12. 10