대한수학교육학회지 <학교수학> 제 10 권 제 4 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.10, No.4, 603-623. Dec. 2008

비와 비례 과제에서 가법적 전략을 사용하는 학생의 문제해결특징 : 중학생 2명의 사례 연구

박 정 숙*

이 논문의 목적은 비와 비례 과제에서 가법적 전략을 사용하는 학생의 문제해결 과정에서 나타난 수학적 표현을 분석하여 가법적 전략을 사용하는 학생의 수학적 표현이 비와 비례 과제를 해결하는데 어떤 영향을 미치는지 탐구하기 위한 것이다. 가법적 전략은 비와 비례 문제를 해결하는 과정에서 학생에게 많이 나타나는 오류 중의 하나로, 한 양에서 다른 양을 빼어 그 차를 다른 양에 적용하는 전략이다. 학생의 응답을 분석한 결과 학생의 가법적 전략의 유형은 단위를 고려하지 않고 빼기, 전체에서 부분을 뺀 양과 부분 비교하기, 차만큼 더하기, 차만큼 빼기로 나눌 수 있었다. 학생의 가법적 전략을 승법적 전략으로 변화시키기 위해 단위량을 구하도록 유도하였고, 이 과정에서 다음과 같은 특징이 나타났다. 첫째, 두 수 사이의 관계가 정수배가 아닌 경우 똑같이 곱하고 빼어서 원하는 수를 만든다. 둘째, 자연수와 자연수 사이의 중간값으로 표현한다. 셋째, $a \div b$를 $\frac{a}{b}$가 아닌 소수로 표현한다. 넷째, 큰 수를 작은 수로 나눈다. 이상과 같은 결과는 나눗셈과 분수 표현을 잘 관련짓지 못하는 것이 가법적 전략에서 승법적 전략으로의 전환을 어렵게 하고 있음을 보여준다.

I. 서 론

비와 비례 과제를 해결할 때 나타나는 학생의 문제해결전략에 대한 연구에서 가장 광범위하게 나타나는 오류는 가법적 전략(additive strategy)을 사용하는 것이다. 가법적 전략은 Inhelder와 Piaget(1958)의 연구에서 제기된 이래 많은 연구에서 공통적으로 발견되고 있으며, "비의 관계를 한 양에서 다른 양을 빼는 것으로 계산하여 그 차를 다른 비에 적용하는 것 (Tourniaire & Pulos, 1985, p.186)"이다. Hart (1988)도 비와 비례 문제를 해결하는 과정에서 학생에게 많이 나타나는 오류 중의 하나가 가법적 전략임을 지적한 바 있다.

가법적 전략은 가장 광범위하게 나타나는 오류이기도 하지만 Inhelder와 Piaget(1958) 그리고 Lesh, Post, Behr(1988)가 비와 비례 개념의 발달 단계 중 첫 번째 단계로 꼽을 정도로 자연스러운 발달의 일부라고도 할 수 있다. 연구자들은 학생이 두 양의 차를 이용하는 가법적 전략에서 한 양이 다른 양의 몇 배가 되는 관계를 이용하는 승법적 전략으로, 다시 비례식 알고리즘을 사용하는 형식적 전략으로 점차 발달해간다고 보고 있다. 그러나 Post, Behr, Lesh (1986)는 가법적 구조와 승법적 구조 사이에 개념적 단절이 존재하므로 이들을 연결할 수 있는 교육과정을 개발할 필요가 있다고 제안하며 가법적 구조에서 승법적 구조로 넘어가는 것이 쉽지 않음을 암시하기도 하였다.

* 서울대학교 대학원(pjungsook@hanafos.com)

Vergnaud(1983)는 비와 비례 개념이 하나의 독립된 개념으로 발전한 것이 아니라 분수, 소수, 곱셈, 나눗셈 등과 같이 여러 가지 다른 개념들과 밀접한 연관을 맺으며 발달한 것이라고 하였다. 여러 개념과의 복잡한 관계 속에서 문제를 해결해야 하는 만큼 비와 비례 개념의 선수 학습도 중요한 학습 요인이 될 수 있다. 실제로 Lo와 Watanabe(1997)는 5학년 학생 1명과의 6개월 동안의 교수실험을 통해 곱셈, 나눗셈, 분수 그리고 소수 개념에 대한 한정된 이해로 인해 비와 비례 개념을 발달시키는데 어려움을 겪었다고 밝힌 바 있다.

비와 비례 개념의 선지식(preconception)이 비와 비례 문제를 해결하는데 영향을 미친다는 선행연구의 결과들(Lo & Watanabe, 1997; Vergnaud, 1983)을 검토해볼 때 중학교나 고등학교에 올라가서도 여전히 가법적 전략을 주로 사용하는 학생의 경우 선지식의 결핍이 비와 비례 문제를 해결하는데 영향을 미치고 있음을 짐작할 수 있다. 따라서 가법적 전략을 사용하는 학생을 승법적 전략으로 변화시켜주기 위해서는 곱셈, 나눗셈, 분수 그리고 소수 개념에 대한 이해를 확장시켜 주어야 한다. 그러나 지금까지 비와 비례 개념에 대한 연구와 분수와 소수, 곱셈과 나눗셈에 대한 선행연구들을 살펴보면 이러한 개념들이 서로 관련 있음을 제시하고 있으나 그 구체적인 모습을 보여주지 못하고 있다.

본 연구에서는 비와 비례 개념과 선지식과의 관계를 탐구하기 위한 한 방안으로 문제해결과정에서 나타난 수학적 표현에 초점을 맞춘다. 일반적으로 표현은 수학적 개념 또는 대상에 대한 의미와 정보를 전달하는 다양한 방법으로 설명할 수 있다. 수학적 표현에 대한 전통적인 견해는 지식을 기록하고 수정하며 정보를 저장하는데 사용하는 것으로 여기며, 학생들의 학습을 도와주기 위한 도구 또는 수단으로 보는 것이다(Sfard & McClain, 2002; Radford, 2000). 전통적인 견해가 인지적 과정을 도와주는 도구로써의 역할을 강조하였다면 최근 표현에 대한 견해는 교사와 학습자 간의 의사소통을 중재하는 수단으로 강조되고 있다. 실제로 수학을 학습하는 것은 수학 기호의 관습적 의미를 학습하는 것을 포함할 뿐 아니라 여러 가지 해석 가능성을 융통성 있게 적용하는 것에 달려있다. 이러한 변화는 기호, 상징, 그리고 수학적 표현 등이 개념 구성을 위한 보조 도구라고 인지하는 것이 아니라 기호 그 자체가 학생들의 의미를 포함하고 있는 것으로 본다. 즉 기호가 무엇을 표현하는가를 연구하는 것에서 기호가 학생들이 무엇을 할 수 있는지 말해주는 것으로 보아야 한다는 이론적 변화를 추구한다(Radford, 2000). 따라서 학생들의 수학적 표현의 변화는 사고 과정의 변화를 도출할 수 있을 것이다.

수학적 표현의 변화를 모색하기 위해서는 먼저 학생들의 현 상태에 대한 분석이 필요하다. 본 연구에서는 가법적 전략을 사용하는 학생들의 분수, 소수, 곱셈, 나눗셈 등과 관련된 수학적 표현의 특징을 분석함으로써 학생들의 선지식이 비와 비례 과제를 해결하는데 어떤 영향을 미치는지 연구할 것이다. 특별히 가법적 전략에 한정하여 문제해결과정의 특징을 연구하려는 이유는 비와 관련된 실생활 맥락 문제를 풀 때 선지식의 어떠한 점이 승법적 전략이 아닌 가법적 전략을 사용하도록 하는지 탐구하기 위한 것이다.

II. 이론적 배경

1. 가법적 전략

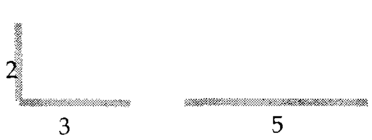
비와 비례 과제는 크게 수치비교문제(numerical comparison problem)와 결측치문제(missing value problem)로 나눌 수 있다(Tourniaire & Pulos, 1985). 수치비교문제의 예는 다음과 같다.

지수는 오렌지 분말 2컵과 물 3컵을 섞어 주스를 만들었다. 영신이는 오렌지 분말 3컵과 물 4컵을 이용하여 주스를 만들었다. 어느 주스가 더 진하다고 할 수 있는가?

수치비교문제에서 가법적 전략을 사용하는 학생들은 각각의 경우에서 (물컵의 양)에서 (오렌지 분말의 양)을 빼어 비교한다. 위 문제의 경우 물 컵의 양 3에서 오렌지 분말의 양 2를 빼면 1이 되고 물 컵의 양 4에서 오렌지 분말의 양 1을 빼면 차가 서로 같기 때문에 "맛이 서로 같다"라고 답한다. 만약 차가 같지 않은 경우에는 차가 적은 것을 진하다고 하거나 차가 많은 것을 진하다고 판단한다. 결측치문제의 경우는 다음과 같다.

Ellen, Jim, 그리고 Steve는 3개의 헬륨 풍선을 사고 2달러를 지불하였다. 그들은 학급의 모든 학생들에게 풍선을 사다주기로 마음먹었다. 24개의 헬륨풍선을 사기 위해 얼마를 지불하여야 하는가? (Lamon, 1993, p.54)

위의 문제를 가법적 전략을 사용하여 해결하면 3개의 풍선을 사는데 2달러를 지불하였는데 풍선의 수와 금액의 차가 3-2=1이므로 이 차를 그대로 유지시켜 24개의 풍선을 살 수 있는 금액을 23달러라고 답하는 것이다. 문제가 실생활맥락이 아닌 경우로는 다음과 같은 예를 생각할 수 있다.



위 그림은 왼쪽 그림과 모양이 같으나 크기만 확대시킨 것이라고 한다. 오른쪽 그림의 세로의 길이는 얼마인가?
(Hart, 1988, p.211)

위의 문제의 경우 가법적 전략은 두 가지 방향에서 생각할 수 있다. 첫 번째는 두 그림의 가로의 길이에서 3과 5의 차가 2이므로 왼쪽 그림의 높이 2에 2를 더하여 세로의 길이가 4라고 하는 것이다. 두 번째는 왼쪽 그림의 가로와 세로의 차가 1이므로 오른쪽 그림의 가로와 세로의 차도 1이라고 생각하여 5-1=4라고 답한다. 가법적 전략을 사용하는 경우에도 Freudenthal (1983)의 내적비와 외적비의 개념이 적용됨을 알 수 있다.

Lamon(1993)은 비와 비례 과제의 문제유형인 결측치문제와 수치비교문제가 레모네이드(Karplus, Pulos, & Stage, 1983), 오렌지 주스(Noelting, 1980), 천칭 문제(Inhelder & Piaget, 1958), 연료소비(Vergnaud, 1983) 등 다양한 맥락이 포함되어 있음을 알고 문제 상황 구조에 따라 의미적 유형(semantic type)을 네 가지[1]로 구분하였다. Lamon(1993)의 연구 결과 확대와 축소 유형에서 학생들은 거의 승법적인 특성을 인지하지 못하고 가법적인 방법을 적용했다고 보고하고 있다.

확대와 축소 유형과 같이 기하적 맥락에서 비례 개념을 잘 적용하지 못한다는 연구 결과는 선행 연구(Lamon, 1993; Singh, 2000)들에서 찾을 수 있다. Hart(1988)는 옳지 않은 가법적 전략이 나타나는 이유를 비 개념과 실제 상황의 승법적 맥락의 연결이 약하기 때문이라고 하였다. 그러나 가법적 전략을 자연스러운 발달 단계의 하나로 볼 것인지, 학생들의 인지적 오류로 볼 것인지에 대해서는 학자들마다 의견

1) 네 가지 유형은 각각 양의 측정(well-chunked measures), 부분-부분-전체(part-part-whole), 관련된 집합(associated sets), 확대와 축소(stretchers and shrinkers) 유형이다.

이 다르다.

Inhelder와 Piaget(1958) 그리고 Lesh 등(1988)은 비와 비례 개념의 발달 단계 중 첫 번째 단계로 꼽아 자연스러운 발달의 일부라고 보았으나 Karplus, Karplus, Wollman(1974)는 오류의 관점으로 보았다. Karplus, Karplus, Formisano, Paulsen(1979)는 다양한 학생들에 대한 연구를 통해 모든 학생들은 가법적 단계를 거치는 것은 아니라고 주장하였다. Karlus 등(1979)는 가법적 추론이 불변적인 발달 순서에 놓여 있는 것이 아니라 교수법에 의해 강하게 영향 받으며 체계적인 방법이기보다 과제를 다루는 학생들의 노력을 표현한 것이라고 설명하였다. 대개 가법적 전략을 사용할 경우 옳은 답을 구할 수 없기 때문에 Kaput과 West(1994)는 비와 비례 문제에 대한 문제해결전략의 첫 번째로 더해가기 전략(building-up strategy)을 꼽았다.

그러나 비와 비례 개념의 역사적 발달 과정에서 볼 때 Eudoxus의 비례 이론이 제시되기 전 고대 그리스 시대에서 비를 나타내는 방법으로 사용된 것은 유클리드 호제법과 같이 차를 이용하는 방법이었으므로 차를 이용하는 방법은 비를 구하는 자연스러운 방법인 것으로 생각된다. 따라서 본 연구에서는 가법적 전략을 학생들의 비와 비례 개념 발달단계의 초기단계로 보고 가법적 전략을 사용하는 학생들의 수학적 표현을 분석할 것이다.

2. 분수, 소수, 곱셈, 나눗셈에 대한 수학적 표현

Sowder, Philipp, Armstrong, 그리고 Schappelle (1998)은 $\frac{a}{b}$를 Kieren(1976)을 비롯한 다른 선행 연구들의 영향을 받아 전체에 대한 부분, 측정, 몫, 연산자 그리고 비로 설명하였다. 이 과정에서 비는 두 양을 승법적으로 비교할 때 일어나며 순서쌍으로도 표현될 수 있고 양과 단위 사이의 관계로 표현될 수 있으나 직접적으로 측정될 수 없고 계산될 수 없다고 하였다. 비는 다른 분수의 해석과는 본질적으로 다르며 a와 b의 상대적인 관계를 이해할 것을 요구한다고 하였다.

이대현, 서관석(2003)은 초등 예비교사들의 분수에 대한 표현 분석에서 예비교사들이 부분-전체 모델을 사용하여 문제를 재구성하는 사례를 밝힌바 있으며 김해숙(2002)은 중학생들을 대상으로 한 설문에서 부분-전체, 연산자로서의 분수 개념에 비해 측정, 비, 몫으로서의 분수 개념에 대한 이해가 부족함을 밝혔다. 비로서의 분수 개념이 부족한 것은 비를 분수로 표현하는데 어려움을 가지고 있다는 것이다.

비는 본질적으로 곱셈과 나눗셈 연산과 관련있다. 분수와 소수는 특별한 양을 표현하는 비의 특별한 표현이며 각각의 양은 분수와 소수 형태로 나타낼 수 있다(Lechance & Confrey, 2002). 즉, 2:5라는 비를 분수로 나타내면 $\frac{2}{5}$로, 소수로 나타내면 0.4로 나타낼 수 있으며 초등학교 <6-가>에 비의 정의와 함께 제시되고 있다. 그러나 Kerslake(1986)은 11살에서 15살을 대상으로 한 연구에서 $3 \div 4$를 $\frac{3}{4}$로 표현하지 못하며 $3 \div 4 = 6 \div 8$과 $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$이 같은 식임을 받아들이지 못하는 것을 발견하였다.

Moss와 Case(1999)는 학생들이 유리수를 어려워하는 이유를 네 가지로 제시하였다. 첫째, 중학교 교육과정이 유리수를 다루는 절차에 초점을 맞추고 상대적으로 개념적 의미를 잘 가르치지 않았다. 둘째, 교사들이 학생들의 비형식적 전략을 이해하려 하지 않고 기계적으로 규칙을 적용하는 방법을 가르친다. 셋째, 학생들이 유리수와 자연수의 표현을 혼동한다. 넷째, 대개의 중학교에서 유리수 표현의 문제

를 자명한 것으로 취급한다는 것이다. 이 네 가지 문제 중에서 세 번째와 네 번째 문제는 수학적 표현에 관한 문제이다. 이들은 새로운 교육과정을 제시하여 실험집단과 비교집단의 성취 정도를 알아보는 실험에서 비교집단의 학생들이 계산 문제와 기존에 학습한 문제는 잘 해결하나 새로운 문제를 마주치게 되면 기존 연구에 나타난 표현상의 오류 즉, 자연수와 유리수를 혼동하는 것을 그대로 보여준다고 하였다.

분수의 표현에서 자연수와 혼동에서 나타나는 오류들은 $\frac{5}{8}$와 5를 같다고 생각하는 것, $2-\frac{3}{8}$에서 2를 $\frac{2}{8}$로 생각하는 것 등이고 (Mack, 1995), 소수의 표현에서 나타나는 오류들은 소수점 이하의 숫자가 길수록 더 큰 소수로 생각하거나, 소수는 0보다 작은 수 또는 음수로 생각하거나, $\frac{1}{4}$을 0.4로 나타낼 수 있다고 생각하는 것(Irwin, 2001)이다. 연산과정에서 나타나는 가장 큰 오류는 "나누는 수는 자연수여야 한다" 또는 "두 수를 곱하면 결과 값이 커져야 하고 두 수를 나누면 숫자가 작아져야 한다"는 암묵적인 가정이다(Fishbein, Deri, Nello, & Marino, 1985).

그러나 비와 비례 과제에서 사용되는 수는 자연수, 분수, 소수에 이르기까지 다양하고 의미상으로 곱셈, 나눗셈 연산과 관련되며 대수로 확장되는 사고과정의 연장선상에 있기 때문에 비와 비례 과제에서의 수학적 표현은 자연수 개념과 혼동되어 생기는 오류는 물론 분수와 소수, 곱셈과 나눗셈이 서로 관련되어 발생할 수 있는 오류가 함께 나타날 수 있다. 본 연구는 비와 비례 과제를 해결할 때 가법적 전략을 사용하는 학생들을 대상으로 승법적 전략으로의 전환시 곱셈, 나눗셈, 분수, 소수의 표현에 어떤 특징이 있는지 분석할 것이다.

III. 연구방법

본 연구는 가법적 전략을 사용하는 학생들의 수학적 표현의 특징을 분석하기 위하여 먼저 가법적 전략을 사용하는 학생을 선정하였다. 이를 위하여 2008년 3월 초에 서울 강남의 한 중학교 1학년 중 107명의 학생을 대상으로 비와 비례 과제에 대한 설문을 실시하였다. 설문지는 Lamon(1993)의 의미적 유형에 따라 크게 네 가지 문제 유형으로 나누고 각각의 문제유형마다 결측치문제 두 개와 수치비교문제 한 개를 구성하여 총 12문제로 구성되었다. 각 문제는 답을 구하고 그렇게 해결한 이유를 쓰도록 하여 어떤 방법으로 문제를 해결하였는지 연구자가 판단할 수 있도록 하였다.

설문에 나타난 결과에 따라 학생의 전략은 무응답, 추측에 의한 전략, 가법적 전략, 단위화 전략, 승법적 전략, 형식적 알고리즘에 의한 전략으로 나누어 구분하였다. 연구에 참여할 학생으로 네 개 이상의 문제에서 가법적 전략을 사용하고 세 개 이하의 문제에서 승법적 전략을 사용한 학생 네 명을 선정하였다. 그 중 동의를 얻은 두 명의 학생을 대상으로 각각 두 차례의 면담을 실시하였다. 본 연구에서 사용한 면담 방법은 과제를 기반으로 한 반구조화 면담이다. 과제 기반 면담은 학생들의 비례 개념의 이해 정도를 파악하고 이를 신장할 수 있는 방안을 모색하며 학생의 인지적 구조와 수준에 관한 질적 자료를 수집하는데 유용한 방법이며, 문제의 결과에 대한 패턴이 아니라 주어진 수학 과제의 과정에 초점을 맞추기에 적절한 방법이다(Goldin, 2000). 반구조화 면담은 대부분 탐구하고자 하는 것에 대한 질문과 목록에 따라 진행되지만 단어의 사용 또는 질문의 순서는 미리 정해져 있지 않다. 완전히 구조화된 면담이 아닌 반구

조화된 면담을 실시한 이유는 학생의 사고 과정을 유연하게 하고 그 과정 속에서 학생이 제공하는 사소한 정보도 놓치지 않기 위해서이다.

1. 연구 참여자

면담에 참여한 학생은 수진과 지호[2])이다. 두 명 모두 중학교 1학년 학생이고 3월 초에 설문지를 실시하였기에 학생의 수학 성취도는 알 수 없었으나 정답률은 서로 비슷하였다. 107명 학생의 평균이 6.49인 것과 비교해 볼 때 정답률은 평균보다 조금 낮았다. 두 명의 학생은 가법적 전략을 네 차례 이상 사용하여 많이 사용한 편이나 문제에 사용된 수치가 간단한 경우는 "~배"를 이용한 승법적 전략을 사용하기도 하며 수치비교문제의 경우 상대적인 양을 비교한 추측으로 답을 쓰기도 하였다. 그러나 두 명 모두 비례식을 이용한 형식적 알고리즘은 한 번도 사용하지 않았다.

2. 자료 수집

자료는 모두 세 차례에 걸쳐 수집되었다. 선정된 학생 중 면담에 동의한 학생 2명을 대상으로 각각 두 차례의 면담이 실시되었다. 첫 번째 면담은 3월 말에 실시되었으며 면담 시간은 50분에서 60분이 소요되었다. 면담에 사용된 문제는 설문지와 동일하며 학생이 어떻게 생각하고 풀었는지 그 이유를 설명하도록 하였다. 면담에 사용된 문항은 선행연구(Hart, 1988; Lappan, Fey, Fitzgerald, Friel, & Phillips, 1997; Lamon, 1993, 1999; Noelting, 1980)를 참고하였다. 구체적인 문제의 유형 및 내용은 <표Ⅲ-1>과 같다.

두 번째 면담은 4월 중순 경에 실시되었고 시간은 1차면담과 비슷하게 50분에서 60분 정도 소요되었다. 문제 유형은 1차면담과 동일하나 문제에 사용된 숫자와 내용에 조금씩 변화를 주어 구성하였다. 학생들이 어떻게 생각하고 풀었는지 그 이유를 설명하도록 하였으며 승법적 전략으로 전략의 변화를 위해 단위량을

<표Ⅲ-1> 설문지와 1차면담에 사용된 문제 유형및 내용

문제 유형	번호	문제 형태	내용
관련된 집합	1-1	C[3])	오렌지 주스의 맛 비교하기
	1-2	M	오렌지 주스 만들기
	1-3	M	오렌지 주스 만들기
부분-부분-전체	2-1	M	쿠키 주머니의 쿠키 개수 구하기
	2-2	M	용돈 분배하기
	2-3	C	우수한 농구 선수 찾기
양의 측정	3-1	M	같은 속도에서 걸린 시간 구하기
	3-2	M	같은 시간에서 이동 거리 구하기
	3-3	C	평균속력 비교하기
확대와 축소	4-1	M	닮은 도형의 한 변 구하기
	4-2	M	축척을 이용한 건물 높이 구하기
	4-3	C	정사각형에 가까운 도형 찾기

2) 연구대상자의 이름은 가명이며 성별과도 무관하다.
3) C는 수치비교문제를 나타내고 M은 결측치문제를 나타낸다.

구할 수 있도록 유도하였다. 면담에 사용된 문제의 유형 및 내용은 <표Ⅲ-2>와 같다. 모든 면담 과정은 디지털 녹음기를 이용하여 녹음하고 녹취록을 작성하였으며 학생들이 문제 해결 과정을 쓴 기록물과 녹취록을 모두 분석 자료로 사용하였다. 분석 방법은 심층 기술 방법을 사용하였으며 학생이 사용하는 수학적 표현에 중점을 두어 분석하였다.

Ⅳ. 연구 결과

1. 학생들의 가법적 전략

학생들의 가법적 전략은 수치비교문제와 결측치문제 모두에서 발견되었다. 학생들의 가법적 전략의 유형은 단위를 고려하지 않고 빼기, 전체에서 부분을 뺀 양과 부분 비교하기, 차(difference)만큼 더하기, 차만큼 빼기로 나눌 수 있다.

가. 단위를 고려하지 않고 빼기

단위를 고려하지 않고 빼는 전략은 단위가 다른 두 양이 하나의 대상을 이루는 경우 그 대상들을 비교할 때 나타난다. 1차면담 1-1번 문제는 다음과 같이 오렌지 분말의 양과 물의 양을 주고 어느 오렌지 주스가 진한가를 찾는 것이다.

<1차면담 1-1번 문제>
아름이와 보람이는 서로 다른 오렌지 주스의 맛을 테스트 하고 있다.

A	B	C	D
오렌지분말: 2스푼	오렌지분말: 1스푼	오렌지분말: 4스푼	오렌지분말: 3스푼
물 : 3컵	물 : 4컵	물 : 8컵	물 : 5컵

어떤 주스에서 오렌지의 맛이 가장 진하게 나타나는가? 그 이유를 설명하여라.

위의 문제를 수진과 지호는 각각 다음과 같이 해결하였다.

수진 : 가장 진하게 나타나는 거 어 그러니까요 얘는요 물 네 컵에 한 스푼을 넣은 거잖아요 얘는 8컵에 4스푼 넣고 5컵에 3스푼 넣었잖아요. 얘는 2스푼에 3컵을 넣

<표Ⅲ-2> 2차면담에 사용된 문제 유형및 내용

문제 유형	번호	문제형태	내용
관련된 집합	1-1	C	피자의 양 비교하기
	1-2	M	키다리씨의 키 구하기
	1-3	M	CD의 높이 구하기
부분-부분-전체	2-1	M	칩의 개수 구하기
	2-2	M	이긴 횟수 구하기
	2-3	C	빨간색 구슬이 많은 주머니 찾기
양의 측정	3-1	M	같은 속도에서 걸린 시간 구하기
	3-2	M	같은 시간에서 이동 거리 구하기
	3-3	C	평균 일하는 양 비교하기
확대와 축소	4-1	M	닮은 도형의 한 변 구하기
	4-2	M	축척을 이용한 건물 높이 구하기
	4-3	C	확대 가능한 도형 찾기

는데요. 3에서 2를 뺐는데

지호 : 어…물이 3컵 들어가면 여기는 2개 들어가고 여기는 4컵 들어가면 분말은 1개 들어가고 그래서 물에서 가루의 양을 빼서 구했어요.

면담자 : 물에서 가루의 양을 빼서 어떤 게 가장 진하다고 한 거예요?

지호 : A요

면담자 : 그게 차가 적어서 그런 거예요? 차가 커서 그런 거예요?

지호 : …작아서 그런 것 같은데

면담자 : 차가 적으면 맛이 가장 진한가요?

지호 : 네

수진과 지호는 모두 물의 양과 오렌지 분말의 양을 뺀 다음 차가 가장 작은 A를 가장 진한 오렌지 주스로 선택했다. 실제로 이 문제의 정답은 A로 답은 맞지만 풀이과정은 적절치 못하다. 107명의 학생을 대상으로 한 설문의 통계적인 결과를 감안할 때 물의 양에서 오렌지 분말의 양을 뺀 전략을 사용한 학생은 모두 12명이며 그 중 정답을 맞힌 학생이 11명인 것으로 보아 수진과 지호처럼 차가 작은 것을 진하다고 해석하는 경우가 더 일반적인 것으로 보인다.

물의 양과 오렌지 분말의 양의 단위가 모두 "컵"으로 동일할 경우 차가 적으면 물의 양과 오렌지 분말의 양이 서로 비슷하다고 생각할 수 있으므로 이러한 생각은 일상 경험에서 비롯되었다고 볼 수 있다. 또한 오렌지 분말의 양과 물의 양의 단위가 다른데도 두 양을 나타내는 수를 서로 빼서 그 차가 작은 것을 더 진한 주스라고 생각하는 것과 같이 단위를 고려하지 않고 단지 수 사이의 관계만을 이용하여 문제를 해결하려는 경향이 가법적 전략의 출발점이 되고 있다.

나. 전체에서 부분을 뺀 양과 부분 비교하기

전체에서 부분을 뺀 양과 부분을 비교하는 전략은 부분-부분-전체 맥락의 수치비교문제에서 나타났으며, 1차면담 2-3번 문제와 2차면담 2-3번 문제에서 모두 나타났다. 1차면담 2-3번 문제는 슛한 횟수와 성공한 횟수를 주고 어느 선수가 가장 우수한가를 찾는 문제이다.

<1차면담 2-3번 문제>
다음 표는 어느 농구부 선수들의 지금까지 기록을 적은 것이다. 가장 우수한 선수는 누구인가? 그 이유를 설명하여라.

선수 이름	슛한 횟수	성공한 횟수
김우진	6	3
나민수	12	4
이진호	24	7

이 문제를 수진은 다음과 같이 해결하였다.

수진 : 그러니까 김우진이란 사람은요 6번 했는데 성공한 횟수는 3번이고 나민수는 12번에 4번이고 이진호는 24번에 7번 성공했는데 얘(이진호)는 많이 슛을 넣었는데 성공한 횟수는 7번이지만 얘(김우진)는 슛을 적게 넣지만 성공한 횟수는 3번인데요 얘(나민수, 이진호)는 많이 넣고 4번 7번이니까 얘(김우진)가 제일 우수한 것 아니에요? 제일 적게 한 다음에 3번 넣었으니까

면담자 : 지금 풀이법 말고 다른 방법으로 푸는 방법도 있을까요?

수진 : 24 빼기 7을 하고 실패한 횟수가 나오잖아요. 실패한 횟수가 제일 적은 게 우수한 선수다.

수진은 슛한 횟수와 성공한 횟수의 상대적인 크기 비교를 이용한 질적인 해석으로 문제를 해결하여 차가 적은 김우진을 가장 우수한 선수라고 설명하였다. 면담자가 다른 방법으로 풀 수 있는 방법을 묻자 (슛한 횟수)에서 (성공한 횟수)를 뺀 차를 구하여 그 차가 제일 적은 김우진이 답이 될 수 있는 설명을 제시하였다. 지호도 김우진이 가장 우수한 선수라고 하였으며

그 이유는 "다른 선수들은 성공한 횟수가 실패한 횟수보다 많기 때문에"라고 답하였다. 설문에 나타난 답만 보면 가법적 전략이 아닌 상대적 비교에 의한 추측으로 문제를 해결했다고 볼 수 있으나 면담에서 다음과 같이 답하였다.

지호 : 어… 숏한 횟수가 6번이고 성공 횟수가 3번이면 실패 횟수가 3번이고 17번을 실패하고 7번 을 성공한 거니까 숏한 횟수도 6번인데 성공 횟수가 더 많으니까

김우진은 성공한 횟수와 실패한 횟수가 같지만 나민수는 성공한 횟수가 4번, 실패한 횟수가 8번이고 이진호는 성공한 횟수가 7번, 실패한 횟수가 17번이어서 성공한 횟수보다 실패한 횟수가 많다. 지호가 상대적 비교를 한 그 배경에는 전체에서 부분을 뺀 값을 부분과 비교하고 있음을 알 수 있다. 성공한 횟수와 실패한 횟수의 차가 적은 사람을 우수한 사람으로 판정한 것은 차가 적은 사람은 성공한 횟수와 실패한 횟수가 비슷하여 성공 확률이 50%에 가깝지만 실패한 횟수가 더 많은 사람은 성공 확률이 반을 넘지 못한 다는 것을 잠정적으로 이해하고 있기 때문인 것으로 보인다.

다. 차만큼 더하기

차만큼 더하는 경우는 결측치문제를 해결하는 과정에서 나타나기도 하지만 수치비교문제에서 나타나기도 한다. 1차면담 3-3번 문제는 두 자동차의 달린 시간과 달린 거리를 주고 어느 자동차의 속력이 더 빠른가를 묻는 문제이다.

<1차면담 3-3번 문제> 자동차 A는 1시간 30분에 126킬로미터를 가고 자동차 B는 1시간 45분에 135킬로미터를 간다고 한다. 어느 자동차의 평균 속력이 더 빠르다고 할 수 있는가? 그 이유를 설명하여라.

수진은 설문에서 "시간은 15분 차이이나 거리는 11km 차이이다. 그래서 15분 더 빨리 가고 11km 더 많이 간 B가 더 빠르다"라고 이해할 수 없는 답을 썼었다. 자동차 A는 1시간 30분 달렸고 자동차 B는 1시간 45분을 달렸으므로 15분 더 많이 갔을 뿐이니 15분 더 빨리 갔다고 할 수 없다는 것을 인지한 수진은 면담과정에서 다음과 같이 답을 수정하였다.

수진 : A하고 B하고 15분차이고 거리는 11킬로미터 차이니까 A가 더 빠른 것 같은데요

면담자 : A가요? 갑자기 A로 바꾼 이유가 뭐예요?

수진 : 15분이 차이가 나잖아요. 애를 1시간 45분으로 하고 애를 1시간 45분으로 하면 애들 11킬로미터 차이가 나니까 11을 더하면 애가 137이니까 애(A)가 더 빠르게 될 것 같은데요

면담자 : 15분 차이 나니까 11을 여기다 더해준다는 거죠? 그 방법 말고 다른 방법은 없을까요?

수진 : … 모르겠는데요.

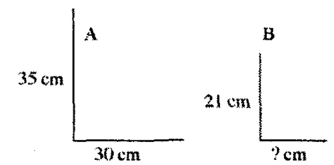
수진은 시간이 15분 차이, 거리가 11킬로미터 차이라는 것을 관련시키려는 생각에 A가 B보다 시간은 15분이 적고 거리는 11킬로미터가 적은 것을 인지하고 A에 15분을 더하여 B와 동일하게 만들고 그 만큼 거리도 11킬로미터를 더하여 같은 시간동안 A는 137킬로미터를 간 반면에 B는 135킬로미터를 간 것으로 볼 수 있어 A가 더 빠르다고 주장하였다. 차만큼 더하여 구하는 전략은 하나의 조건을 같게 하였을 때 다른 조건이 서로 어떻게 다른지 비교하여 구하려는 방법으로 최소공배수를 이용하는 하나의 조건을 같게 만드는 전략을 적용하기 이전에 일어날 수 있는 전략으로 보인다. 수진의 문제해결과정을 보면 두 수의 차에 초점을 맞추고 있을 뿐 두 자동차의 속력이 같은지 다른

지, 시간의 단위는 분이고 거리의 단위가 킬로미터라는 단위의 문제는 전혀 고려하지 않고 있음을 알 수 있다.

라. 차만큼 빼기

차만큼 빼는 방법은 차만큼 더하는 방법과 같이 결측치문제에서 자주 나타나는 방법이다. 수진이와 지호는 확대 축소 문제에서도 차만큼 빼는 방법을 이용하여 문제를 해결하였다. 1차면담 4-1번 문제는 다음과 같이 도형의 닮음을 가정하고 있는 문제이다.

<1차면담 4-1번 문제>
다음은 밑변과 높이가 표시된 어떤 도형의 일부이다. 그림 A의 높이는 35cm, 밑변의 길이는 30cm이다. 그림B는 그림A와 같은 모양이나 이보다 작은 그림이다. 그림B의 높이가 21cm라고 할 때, 밑변의 길이를 구하여라. 그 이유를 설명하여라.



수진은 설문지에 "A에서 밑변과 높이의 차가 5cm 이다. B의 높이는 21cm 이므로 35-21=14이다. 따라서 14-5=9(cm)이다."라고 답하여 A에서 B의 높이를 뺀 값에 그림 A에서 밑변과 높이의 차를 빼어 9cm라는 값을 구하였다. 그러나 면담하는 과정에서 그림A와 B의 높이를 비교하여 35-21=14를 구하고 그림A의 밑변 30에서 14를 빼어 16cm 라는 답을 제시하였다. 지호 역시 16cm라고 답하였으나 서로 다른 도형과의 관계를 비교하여 높이와 높이를 뺀 것이 아니라 하나의 도형에서 높이와 밑변의 차를 이용하여 문제를 해결하였다.

면담자 : 지금 물음표의 길이를 16센티라고 했잖아요. 어떻게 계산하면 16센티가 나와요?
지호 : 여기서(35)요 이걸(30) 빼면요 5가 되잖아요. 그래서 21에서 5를 뺀 것 같아요
면담자 : 지금 자신이 없는 이유는 … 이렇게 하면 안 될 것 같은가요?
지호 : 예
면담자 : 왜 안 될 것 같아요?
지호 : 솔직히 이거(35)랑 이거(21)랑 7에서 5를 곱해서 35이고 7에서 3을 곱해서 21이잖아요 그렇다면 이거(30)랑 이거(16)랑 규칙성이 있을 수도 있으니까

지호는 차가 같다는 사실을 이용해서 답을 구하였으나 공약수의 개념을 알고 있었고 30과 또 다른 답 사이에도 어떤 규칙이 있을 것이라고 예상하였지만 그것을 어떻게 시도해야 할지는 모르고 있었다. 지호는 문제를 해결하는 과정 전반에 걸쳐 자신 없이 진행하였고 자신의 답이 정답이 아닐 거라고 생각하면서도 다른 해결방법을 찾지 못해 차를 이용한 전략을 버리지 못했다.

2. 수학적 표현의 특징

수진과 지호는 문제에 나타난 양의 상대적인 값을 비교하는 대신 두 수의 차가 같음을 이용하여 문제를 해결하고 있다. 그러나 모든 문제에서 가법적 전략을 사용한 것은 아니다. 승법적 전략을 사용한 경우도 있었는데 두 양 사이의 관계가 정수배인 경우에는 곱셈을 이용하여 문제를 성공적으로 해결하였다. 두 양 사이의 관계가 정수배인 경우와 정수배가 아닌 경우에 대한 학생들의 정답률의 차를 가장 극명하게 보여준 문제는 1차면담 1-2번 문제와 1-3번 문제이다.

1차면담 1-2번 문제는 "오렌지분말 2스푼과

물 3컵으로 3명이 먹을 수 있는 주스를 만들 수 있다면 15명이 먹을 수 있는 주스를 만들 때 필요한 오렌지 분말의 양은 얼마인가?"를 묻는 것이었으며 1-3번 문제는 "20명이 먹을 수 있는 주스를 만들 때 필요한 오렌지 분말의 양은 얼마인가?"를 묻는 것이었다. 1-2번 문제에서는 설문에 참여한 107명의 학생들 중 96명이 정답을 맞힌 반면 1-3번 문제는 29명의 학생만이 정답을 구였다. 이 중 13명은 단위화 전략, 5명이 승법적 전략, 11명이 형식적 전략을 사용하였다.

이산량의 경우 1개에 해당하는 값을 알 수 있으면 3개의 값이나 20개의 값을 구하는 것은 그리 어려운 문제가 아니다. 또한 수진과 지호는 정수배인 경우 승법적 전략이 가능한 학생들이었으므로 정수배가 아닌 경우 가법적 전략을 승법적 전략으로 바꾸어 주기 위한 방법으로 면담 과정에서 의미상의 접근이 가능한 단위화 전략을 사용할 수 있도록 유도하였다.

Lamon(1993)은 형식적 전략을 학습하지 않은 학생들이 어떻게 비례관계를 이해하고 해결하는가에 대한 연구에서 단위화(unitizing)와 기준화(norming) 전략이 비례 개념 이해에서 중요한 과정임을 제안하였다. 단위화는 주어진 비 관계로부터 다루기 쉽거나 편리한 크기로 주어진 양을 묶거나 다시 그룹을 만들어 새로운 대상 단위를 구성하는 것을 말한다. 예를 들어 풍선 24개와 16명의 사람이 있을 때 사람 2명 당 풍선 3개와 같이 합성단위(composite unit)로 개념화할 수 있는 것을 단위화라 하며, 기준화는 대상 단위에서 다른 단위를 재해석하는 과정을 말한다. 예를 들어 "7g에 8.75달러인 약이 있다. 4g에 얼마를 지불해야 하는가?"와 같은 문제에서 4에 $1\frac{3}{4}$를 곱하면 7이 되므로 어떤 수에 $1\frac{3}{4}$을 곱하면 8.75가 되는가로 고쳐서 생각할 수 있는 것이 기준화 전략이다. 단위화와 기준화를 사용할 수 있으려면 곱하기와 나누기 연산이 필수적이며 분수 표현 방법이 중요한 역할을 한다.

면담 과정에서 나타난 수학적 표현의 특징은 학생들이 나눗셈을 사용하지 않는 경우와 사용하는 경우로 나누어서 살펴볼 수 있다. 나눗셈을 사용하지 않는 경우의 특징은 다음과 같다.

가. 두 수 사이의 관계가 정수배가 아닌 경우 똑같이 곱하고 빼어서 원하는 수를 만든다.

정수배인 경우 사람의 수를 다섯 배하고 그것을 똑같이 분말의 양에도 다섯 배한 경험을 바탕으로 정수배가 아닌 1차면담 1-3번 문제를 다음과 같이 해결하였다.

<1차면담 1-3번 문제> A방법으로 오렌지 주스를 만들면 3명의 사람이 마실 수 있다고 한다. 같은 방법으로 20명이 마실 오렌지 주스를 만들려고 할 때, 오렌지 분말은 모두 몇 스푼이 필요한지 구하여라. 그 이유를 설명하여라.

지호는 분수 계산이 나오지 않도록 물컵 수를 20에 가장 가깝게 7을 곱한 후 1을 빼면 된다는 것을 인식하고 분말의 수도 같은 패턴으로 문제를 해결하였다. 지호가 문제를 해결한 식은 [그림Ⅳ-1]과 같다.

$$\frac{3\times7=21-1=20}{2\times7=14-1=13}$$

[그림Ⅳ-1] 지호의 표현

물컵 수를 계산하기 위하여 사용한 연산을

분말의 경우에도 똑같이 적용해야 한다는 것을 알고 있다는 점에는 의미를 둘 수 있으나 두 양 사이의 승법적 관계를 인식하지 못하고 있음을 알 수 있다. 단위화 전략을 이용할 수 있도록 1컵에 들어가는 오렌지 분말의 양을 구할 수 있도록 질문하였으나 두 사람 모두 오렌지 분말의 양을 성공적으로 계산한 학생은 한 명도 없었다. 유사한 패턴은 2차면담 3-2번에서도 나타났다. 3-2번 문제는 다음과 같다.

<2차면담 3-2번 문제>
어떤 지도 위에 직선거리로 30cm 떨어져 있는 두 마을 A, B가 있다. 실제로 시속 10km로 A마을에서 B마을로 가는데 45분이 걸린다고 한다. 같은 속도로 직선거리로 A마을에서 C마을까지 갈 때 75분이 걸린다고 할 때, A마을과 C마을은 지도에서 몇 cm 떨어져 있는가? 그 이유를 설명하여라.

지호는 3-2번 문제를 다음과 같이 풀기 시작하였다.

지호 : 30센티 간격이라는 거예요?
면담자 : A하고 B만 30센티라는 거예요. A와 C는 어떤지 몰라요 거리는 얼마인지 모르지만 75분이 걸린다는 것만 아는 거예요
지호 : …45분을 75로 만들 수 없잖아요 그러니까 45를요 2배를 해서요 2배를 한 값에서 75를 빼주는 건 아닐까요.
면담자 : 그렇게요? 그렇게 하면 어떻게 되요?
지호 : 2개의 간격은 15센티미터가 아니라 ... 이건 아닌 것 같아요

계산하는 과정에서 오류가 없었다고 가정하고 15cm가 나온 이유를 추측해보면 45분을 2배해서 90분을 만들고 여기에서 75분을 빼면 15분이 나오는데 지호는 분 대신 cm 단위를 붙여 15cm라 답을 한 것 같다. 이와 같이 두 수가 정수배가 아닌 경우 분수를 이용하여 "~배"라는 답을 구할 수 없으므로 가장 가까운 수가 되도록 정수배를 하고 차만큼 빼서 구하는 방법은 비례 문제를 해결하는데 적절하지 않다. 이러한 전략을 선택하는 이유는 실생활 문제에서는 분수나 소수를 이용한 계산이 별로 일어나지 않는다고 생각했기 때문이거나 분수와 소수를 피하기 위한 계산 방법이라고 보여진다.

나. 자연수와 자연수 사이의 중간값으로 표현한다.

학생들은 분수나 소수를 이용한 계산을 피하고 싶어 하지만 정수만을 이용한 계산으로는 답을 구하기 힘든 경우들이 발생한다. 수진은 3컵에 2스푼이 들어갈 때, 한 사람이 마시는 주스에는 오렌지 분말이 얼마나 필요한가에 대해 다음과 같이 설명하였다.

면담자 : 그러면 한 사람이 마시는 주스에 오렌지 분말은 몇 스푼 들어가겠어요?
수진 : 2스푼 아 통합해서 2스푼 넣었다는 거지요.
면담자 : 그렇죠. 통합해서 2스푼
수진 : 1.5스푼
면담자 : 1.5스푼이 한 사람에게 들어갈 분량이에요?
수진 : 잠깐만요 어 아닌데 한 0.5스푼
면담자 : 아 0.5스푼.. 0.5스푼을 한 사람이 먹으면 되요? 그러면 15명으로 바뀌었어요. 그러면 오렌지 분말은 몇 스푼이 필요해요?
수진 : 아 3스푼?
면담자 : 3스푼이요?
수진 : 아 아닌데

수진은 처음에 한 명당 2스푼씩 넣는 것으로 생각하여 20명분의 오렌지 주스는 20 곱하기 2를 하여 40스푼이라고 답하였다. 그러나 3인분

의 오렌지 주스에 2스푼을 넣는다는 것을 인지한 후에는 2스푼 보다는 작지만 어떤 값인지 알지 못해 1.5스푼이라고 답했다. 면담자가 1.5스푼을 3배한 값이 2스푼이 되지 못한다는 것을 알려주자 1.5와 1보다 작아야 한다고 생각해서 0.5스푼이라고 답했다. 지호는 다음과 같이 답하였다.

지호 : 2스푼일 것 같은데 반 반씩 넣으면 마지막 반이 남잖아요. 그걸 세 개로 나누어서 넣는 것 아니에요?
면담자 : 다시 한 번 설명해 줄래요?
지호 : 그러니까 3개 컵이 있으면요 그 가루를요 여기다 반 여기다 반 여기다도 반을 넣으면요 그러면 가루의 양이 여기 반 넣고 여기 반 넣어줬으니 반이 남잖아요. 그걸 세 개로 나누어서 넣으면 되지 않아요?
면담자 : 그 양을 숫자로 표현하면 얼마에요?
지호 : 음…4분의 2

지호는 2스푼을 3컵에 반씩 담고 반이 남으면 그것을 3등분하여 나누어 주면 된다는 것을 알고 있으나 그 양을 숫자로 표현하지 못했다. 실제로 지호가 설명한 것을 식으로 나타내면 $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\div 3=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$가 되지만 지호는 그 양이 $\frac{2}{3}$임을 모르고 있었다. 즉, 문제가 요구하는 값이 어느 정도의 양인지는 알고 있었으나 그 값을 표현하는 수학적 기호와 연결시키지 못하고 있음을 알 수 있다. 수진이와 지호와 같이 가법적 전략을 사용하는 학생들은 정수배가 아닌 경우 단위량을 계산하는 과정에서 2를 3으로 나누지 못하였다.

비와 비례 과제에 제시된 수가 정수배가 아닐 때 1컵에 들어가는 오렌지 분말의 양을 구하지 못한다는 사실은 나눗셈과 분수 표현을 서로 관련짓지 못하고 있음을 보여준다. 구체적으로 나눗셈과 분수 표현을 어떻게 다루고 있는지 살펴보면 다음과 같다.

다. $a\div b$를 $\frac{a}{b}$가 아닌 소수로 표현한다.

지호는 2차면담 1-1번 문제 "7명의 여학생이 2판의 피자를 공평하게 나누어 먹고 3명의 남학생이 1판의 피자를 공평하게 나누어 먹으려고 한다. 더 많은 피자를 먹을 수 있는 사람은 누구인가?"와 같은 문제를 다음과 같이 해결하였다.

지호 : 이거를 2나누기 7을 해서 소수점 계산해도 될까요? (2를 7로 나누어 0.285.. 1을 3으로 나누어 0.333..으로 구함) 아닌데
면담자 : 이게 7로 안 나누어떨어지지 않아요? 2 나누기 7을 분수로 표현하면 얼마에요?
지호 : …
면담자 : 지금 지호가 계산하는 것은 소수로 계산하는 거고 물론 소수로 해도 비교할 수 있죠 이게 끝이 없이 나오긴 하지만 이만큼만 두고 1 나누기 3이 얼마였죠?
지호 : 1나누기 3을 하면 0.333…이렇게 계속
면담자 : 애네 둘을 비교하면 누가 더 많이 먹어요?
지호 : 남학생

지호는 2 나누기 7을 소수로 표현할 수는 있지만 분수로 표현하는 것은 하지 못했다. 즉, $a\div b$를 $\frac{a}{b}$로 표현하지 못함을 알 수 있으며 소수로 표현하지만 끝없이 계속되는 값을 어떻게 처리해야 할지 곤혹스러워했다. 수진도 상황이 서로 다르지만 나누기를 소수로 처리하는 모습은 유사하였다.

면담자 : 7분의 2 하고 3분의 1하고 비교하려면 어떻게 해야 해요?
수진 : 애(1/3)가 더 크기 않나요?
면담자 : 어떻게 한 거예요?
수진 : 그냥 나눴어요.
면담자 : 나누면 어떻게 되요?
수진 : 소수로 나오잖아요.

나누기의 결과를 분수가 아닌 소수로 처리하려는 경향은 다른 문제에서도 찾아볼 수 있다. 수진은 2차면담 3-1번 문제 "어떤 차가 3분에 8km를 달린다고 한다. 5시간 동안 몇 km를 달리겠는가?"를 다음과 같이 해결하였다.

수진 : 3분에 8킬로니까 1분에는 (8을 3으로 나누어 2.666…을 구함) 8 나누기 3 …아닌데
면담자 : 나누어떨어지지 않으면 어떻게 쓰죠?
수진 : 그냥 똑같은 수로 나오니까 2.6해도 되지 않나?

나눈 결과를 소수로 계산하는 습관은 무한소수에 대한 처리를 아직 학습하지 않은 중학교 1학년 학생들에게 계산의 어려움을 제공하고 있다.

라. 큰 수를 작은 수로 나눈다.

지호는 2차면담 1-1번 문제를 다음과 같이 해결하였다.

지호 : (7÷2=3…1, 3÷1=3이라고 쓰고 있음) 여기서는 3나누기 1에서 3해서 남학생들은 3개씩 먹을 수 있어서 똑같은 것 같아요
면담자 : 남학생하고 여학생하고 피자를 먹는 개수가 똑같다는 뜻이에요? 왜 7을 2로 나누었어요?
지호 : 7명이 2판을 나누어 먹어야 하니까

지호는 7명이 2판을 나누어 먹어야 한다는 것은 정확히 알고 있었지만 2 나누기 7을 하는 대신 7 나누기 2를 하고 있다. 이러한 경향은 3명이 1판을 나누어 먹는 상황에도 그대로 적용되어 3명이 1판을 나누어 먹어야 하는 상황에서 1명이 3개씩 먹게 되는 경우가 발생하였다. 수진이는 2차면담 1-3번 문제 "30장의 CD케이스를 차례로 쌓았더니 24cm가 되었다. 20장의 CD케이스를 차례로 쌓으면 몇 cm가 되는가?"를 다음과 같이 해결하였다.

수진 : 30장이 있으니까 …(30을 24로 나누어 1.25를 구했음) 한 장에 1.25니까 어? (1.25에 20을 곱해서 25센티미터가 나옴) 왜 더 크게 나오지?
면담자 : 지금 한 장의 높이를 구하고 싶은 거죠?
수진 : 네
면담자 : 그런데 지금 어떻게 계산하고 있어요?
수진 : 얘(30) 나누기 얘(24)를
면담자 : 어 30 나누기 24를 했잖아요. 30 나누기 24를 하면 한 장이 나오나요?
수진 : 네
면담자 : 30 나누기 24를 하는데 한 장이 나와요?
수진 : 30장을 쌓아서 24가 되었으니까
면담자 : 그렇죠. 30장을 쌓아서 24가 되었죠. 그럼 한 장은?
수진 : 1.25.. 아닌가?
면담자 : 왜 30을 24로 나누죠?
수진 : 30장이 다 모여서 24가 되었으니까 한 장의 높이를 구하려면 총 쌓아 놓은 높이가 24니까 30을 24로 나누면 ...

수진은 CD 한 장의 높이를 구하기 위해서 30 나누기 24를 계산하였다. 30장이 모여서 24cm가 되었다는 문제의 맥락은 분명히 알고 있었지만 24를 30으로 나누지 못하고 큰 수에서 작은 수를 나누는 방법을 고수하였다.

면담자 : 다섯 장을 쌓아서 15센티미터가 됐어요. 그럼 한 장에 얼마죠?
수진 : 아 그럼 어 24 나누기 30 …0.8… 그러니까 (20과 0.8을 곱하면서 소수점을 뒤에서 두 칸 보내서 1.6이 됨) 엥?
면담자 : 왜 또 1.6이 되었어요? 20 곱하기 0.8을 하는데 … 소수점이 몇 개 에요?
수진 : 아 한 개 16

수진은 5장을 쌓아서 15센티미터가 될 때 한 장의 높이를 묻는 예를 제시하기 전까지 무엇이 잘못되었는지 찾지 못했다. 또한 30을 24로

나누거나 24를 30으로 나누는 과정에서도 여전히 소수로 그 결과를 나타내고 있어 나누기의 결과를 소수로 표현하는 경향을 고수하고 있다. 한 장의 높이를 정확히 구한 다음에는 20을 곱하는 과정에서 소수 계산에 오류를 범해 정확한 답을 얻는 과정이 쉽지 않음을 보여주고 있다.

지호도 30을 24로 나누어 계산하였으며 "5장을 쌓아서 15센티미터가 되었다"는 구체적인 예를 보여주기 전까지 무엇이 잘못되었는지 찾지 못했다. 더구나 "CD 한 장의 길이가 1센티미터가 안 넘는다는 거예요?"라고 질문하여 길이에 대해 1보다 작은 길이가 나오는 상황을 자연스럽게 인지하지 못했다. 따라서 학생들이 큰 수에서 작은 수로 나누는 것은 1보다 작은 값을 인정하기 쉽지 않음을 보여준다고 할 수 있다.

3. 가법적 전략에서 승법적 전략으로의 전환

가법적 전략을 사용하는 학생들에게 단위화 전략을 사용할 수 있도록 유도하면 표현 과정에서 실수가 발생하고 계산 과정에서 오류가 발생하기도 하지만 승법적 전략을 사용할 수 있게 된다. 수진이는 2차면담 1-2번 키다리씨와 난장이씨 문제를 다음과 같이 해결하였다.

<2차면담 1-2번 문제>
어떤 동화책에 난장이씨와 키다리씨가 그려져 있다. 난장이씨의 키는 페이퍼 클립 6개의 길이와 같다. 성냥개비를 이용하여 키를 재어 보았더니 난장이씨의 키는 성냥개비 4개의 길이와 같고 키다리씨의 키는 성냥개비 6개의 길이와 같았다. 페이퍼 클립을 이용하여 키다리씨의 크기를 재려고 할 때, 페이퍼 클립은 모두 몇 개가 필요한가? 그 이유를 설명하여라.

면담자 : 어떻게 구하면 되요?
수진 : 아 난장이다 키다리가 여섯 개니까 난장이는 페이퍼 여섯 개 성냥개비가 네 개니까 얘(키다리)는 여덟 개일 것 같아요
면담자 : 여덟 개요? 어떻게 구했어요?
수진 : 그냥 얘가 페이퍼 클립이 여섯 개인데 성냥개비가 네 개니까 두 개가 차이 나서
면담자 : 두 개가 차이 나서요? 그렇게 하면 되요?
수진 : …
면담자 : 수진의 계산이 맞는 거예요?
수진 : 모르겠는데요.

수진은 페이퍼 클립과 성냥개비 개수 사이에 개수가 두 개 차가 난다는 것을 인지하고 성냥개비 여섯 개에 두 개를 더하여 여덟 개라고 답했다. 면담자는 수진에게 성냥개비 한 개의 길이가 페이퍼클립 한 개의 길이보다 길다는 것을 이용하여 성냥개비의 길이가 페이퍼 클립의 길이의 몇 배에 해당하는지 질문하였다.

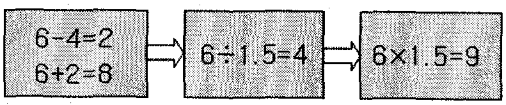
면담자 : 페이퍼 클립이 길어요? 성냥개비가 길어요?
수진 : 성냥개비요
면담자 : 성냥개비가 더 길어요? 어떻게 알 수 있어요?
수진 : 그냥
면담자 : 여기 나타난 글에서 뭘 보고
수진 : 페이퍼 클립이 여섯 개인데 성냥개비가 네 개니까 성냥개비가 더 길죠.
면담자 : 성냥개비가 더 길죠. 성냥개비가 페이퍼 클립의 몇 배에요?
수진 : 몇 배요? ..1.5배
면담자 : 1.5 배 그렇죠?
수진 : 아 그러면 6 곱하기 1.5가 아닌데 6 나누기 1.5?
면담자 : 6 나누기 1.5? 왜 6 나누기 1.5에요?
수진 : 이게 1.5배니까
면담자 : 6 나누기 1.5하면 얼마에요?
수진 : 4…

수진이는 성냥개비 1개의 길이가 페이퍼 클

립 1개의 길이의 1.5배라는 사실은 이해했지만 이를 성공적으로 이용하지 못했다. 이 상태에서는 더 이상 진전이 없을 것 같아 면담자는 방향을 바꾸어 키다리씨의 키가 난장이씨의 키보다 얼마나 더 큰지를 질문하였다.

면담자 : 그리고 키다리 씨는 성냥개비가 6개 필요하죠. 난장이씨하고 키다리씨하고 누가 커요?
수진 : 키다리가 더 커요
면담자 : 얼마나 커요?
수진 : 두 개 더 1.5배 더 커요
면담자 : 네 그러면 페이퍼 클립이 몇 개 필요해요?
수진 : 육(6) 곱하기 1.5?
면담자 : 육(6) 곱하기 1.5?
수진 : 아홉 개

수진이의 문제해결과정은 [그림Ⅳ-2]와 같이 나타낼 수 있다.



[그림Ⅳ-2] 수진이의 문제해결과정

성냥개비 1개의 길이가 페이퍼 클립 1개의 길이의 1.5배라는 해석은 옳았지만 이를 나눗셈과 연결시켜 문제를 잘못 해결하였고 다시 키다리씨가 난장이씨의 1.5배가 되었을 때 옳은 답을 구할 수 있었다. 수진이의 표현이 더하기에서 나누기로, 나누기에서 다시 곱하기로 바뀐 것은 숫자의 차이에 초점을 맞추었던 것에서 두 수 사이의 승법적 관계에 초점을 맞출 수 있도록 문제의 의미를 다시 해석할 수 있도록 유도하였기 때문이다. 두 번째 예에서 성냥개비 1개의 길이가 페이퍼 클립 1개의 길이의 1.5배라는 해석은 옳았지만 이를 곱셈이 아닌 나눗셈과 관련시켜 성공하지 못했고 이를 곱셈과 연결시킬 수 있도록 대상을 전환시켰을 때 옳은 답을 구할 수 있었다. 지호는 같은 문제를 다음과 같이 해결하였다.

면담자 : 보통 성냥개비가 길어요? 클립이 길어요?
지호 : 성냥개비가 길어요.
면담자 : 성냥개비가 길죠? 성냥개비가 클립보다 몇 배 더 커요?
지호 : 두 배 정도
면담자 : 두 배?
지호 : 두 배나 세 배 정도

수진이는 "성냥개비가 클립의 몇 배예요?"라는 질문을 던졌을 때 1.5배라는 답을 바로 구했지만 지호는 성냥개비가 긴 것을 알고 있었지만 몇 배인지 구하지 못했다.

면담자 : 지금은 클립 여섯 개랑 성냥개비 네 개랑 똑같아요. 이 길이가 같잖아 두 개가
지호 : 근데 육(6)에서 사(4)가 나올 수 없잖아요.
면담자 : 아 육(6)에서 사(4)가 나오는 방법 요 그러네요. 성냥개비가 똑같은 게 여섯 개가 있으면 이게 키다리씨죠 키다리씨는 난장이씨보다 얼마나 더 커요?
지호 : 성냥개비 두 개만큼
면담자 : 성냥개비 두 개가 클립의 얼마에 해당하는지만 알면 나올 수 있지 않겠어요? 클립 여섯 개가 성냥개비 네 개랑 같아요. 그러면 성냥개비 두 개는 클립의 몇 개에 해당하겠어요?
지호 : 네 개요
면담자 : 네 개요? 왜 네 개가 나왔어요?
지호 : 왜냐면 두 개 차이나니까
면담자 : 그러면 이게 여덟 개여야 말이 되잖아요. 하나에 두 개씩 딱딱 떨어지는 건 아니죠?
지호 : 하나 반씩
면담자 : 그렇죠. 하나 반씩이죠.

지호 : 하나 반 씩이면 …
면담자 : 어떻게 하나 반씩이 바로 나왔어요?
지호 : 두 개씩 하면요 한 개가 남거든요 그런데 하나 반씩 가지면 정확하게 나누어져요.

면담자가 "성냥개비 두 개가 클립의 얼마에 해당하는지만 알면 나올 수 있지 않겠어요?"라고 이야기할 때는 네 개의 성냥개비와 여섯 개의 페이퍼클립이 같은 길이로 주어진 상황에서, 성냥개비가 네 개일 때 페이퍼 클립이 여섯 개이니 두 개는 여섯 개의 반이므로 여섯 개의 반인 세 개임을 쉽게 구할 수 있으리라 생각하고 있었다. 그러나 지호는 주어진 길이를 똑같이 반으로 나눈다는 생각을 하지 못했고 여전히 차에 주목하고 있었다. 지호는 다시 성냥개비 한 개의 길이가 페이퍼클립의 한개 반에 해당한다는 것을 깨닫고 6에 1.5를 곱하여 9를 구하였다.

수진이는 성냥개비 한 개의 길이가 클립의 1.5배임을 알고 있지만 6과 1.5를 곱하는 것이 아니라 나눗셈을 하여 원하는 결과를 얻지 못하고 대상을 바꾸어 질문해야 했다. 반면 지호는 성냥개비 한 개의 길이가 클립의 1.5배임을 구하는 과정에서 상당한 혼란을 느꼈다. 수진이는 그림이 없이도 1.5배임을 계산했지만 지호가 성냥개비 네 개의 길이와 페이퍼 클립의 여섯 개의 길이와 같게 그려진 그림을 이용해서 성냥개비 한 개의 길이가 클립의 1.5배임을 이해하였다.

따라서 수진이와 지호가 가법적 전략에서 승법적 전략으로 전환시키는 과정을 살펴보면 단위화 전략을 적용하는 것도 학생들에 따라 받아들이는 방법이 조금씩 다르게 받아들이므로 학생들의 다양한 경우를 감안하여 단위화 전략을 적용하는 방법을 연구할 필요가 있음을 알 수 있다.

V. 논의 및 결론

본 연구에 참여한 수진이와 지호는 숫자들 사이에 관계가 있음을 인지하고 있었으나 그 관계를 "차가 같음"이라고 해석하여 뺄셈을 이용한 연산을 하고 있었다. 그 유형은 크게 네 가지 경우(첫째, 단위에 대해 고려하지 않고 빼기, 둘째, 전체에서 부분을 뺀 값을 부분과 비교하기, 셋째, 차만큼 더하기, 넷째, 차만큼 빼기)로 나누어 졌다. 학생들의 전략을 승법적 전략으로 전환시키기 위해 단위량을 구하도록 하였더니 다음과 같은 특징을 찾을 수 있었다. 나눗셈을 사용하지 않는 경우 두 수 사이의 관계가 정수배가 아닌 경우 똑같이 곱하고 빼어서 원하는 수를 만들거나, 자연수와 자연수 사이의 중간값으로 표현한다. 나눗셈을 사용하는 경우에는 $a \div b$를 $\frac{a}{b}$와 연결시키지 않고 소수와 연결시키거나, 문제의 맥락과 관계없이 큰 수를 작은 수로 나누려는 경향이 있다. 이와 같이 문제 상황에서 요구하는 나눗셈 연산과 분수 표현을 잘 관련짓지 못하는 것이 가법적 전략에서 승법적 전략으로의 전환을 어렵게 하고 있음을 볼 수 있다.

$\frac{a}{b}$는 $a \div b$의 몫을 나타낼 수 있다. 이 때, a, b는 $a = bx$라는 방정식을 만족시키는 정수이다. Kerslake(1986)는 유리수를 이렇게 해석하는 것은 학생들에게 친숙하지 않고 잘 받아들여지지도 않는다고 하였다. 그 이유로 $3 \div 4$와 같이 작은 수를 큰 수로 나누는 것이 학생들에게 자연스럽지 않기 때문이라고 하였다. 그러나 본 연구에 따르면 나눗셈을 사용할 경우 나눗셈을 분수가 아닌 소수로 표현하는 것이 학생들에게 더 자연스럽기 때문이라고 해석할 수 있다. 분수 개념을 이해하는데 효과적인 방법으로 제시되고 있는 분할하기 개념은 비와 비

례에서는 단위량을 구하는 것으로 연결할 수 있다. 따라서 가법적 전략을 사용하는 학생들에게 승법적 전략을 사용할 수 있게 하려면 그 전에 단위량을 계산할 수 있어야 한다. 이를 위해서는 식의 표현이 차가 아닌 곱셈이나 나눗셈이 되도록 해야 하고 학생들이 곱셈이나 나누기 연산을 분수 표현과 연결시킬 수 있는 것이 필요하다.

초등학교 과정에서 다루어지는 비와 비례는 나누기를 소수와 연결시켜도 큰 무리가 없이 이루어지도록 숫자가 잘 조정되어 있거나 어림하여 자연수로 다루도록 되어 있어 비를 분수로 표현해야 하는 문제가 많지 않다. 그러나 중학교에서는 나누기를 소수와 연결시키면 무한소수로 표현되는 경우가 생기기도 하고 어림하여 구하는 것을 요구하지 않으므로 주로 분수를 사용하여 계산한다. 비와 비례 개념은 초등학교에서 학습하고 중학교에서 따로 학습하지 않지만 선형함수, 직선의 기울기, 확률, 닮음비, 삼각비 등 중학교의 많은 수학적 개념이 비와 비례 개념과 관련 있다. 따라서 학생들이 비와 비례 문제를 성공적으로 해결하기 위해서는 문제에 제시된 숫자가 아닌 맥락상의 의미에 초점을 맞추어야 하며 이와 더불어 나누기 연산과 분수 표현을 관련지을 수 있어야 한다.

그러나 면담 과정에서 스스로 단위량의 값을 구한 것이 아니라 면담자의 조언에 의해 단위량을 구하였고, 단위량을 구하는 과정도 학생들 마다 다르며, 한 문제에서 단위량의 값을 구했다 하더라도 다음 문제로 넘어가면 다시 가법적 전략을 사용하는 모습을 찾아볼 수 있어 단위량의 값을 구하는 필요성을 스스로 인식하고 구하는 것이 쉬운 일이 아님을 보여주고 있다. 본 연구는 비와 비례 과제에서 가법적 전략을 사용하는 학생들의 문제해결과정에서 나타나는 수학적 표현의 특징을 기술한 연구이며 가법적 전략에서 승법적 전략으로의 전환은 학생에 따라 다양한 경우가 발생할 수 있으므로 어떻게 전환시킬 수 있는지에 대해서는 앞으로 더 많은 후속 연구가 더 필요하다.

참고문헌

김해숙(2002). **중학교 기초 학습 부진아를 위한 분수 학습-지도 자료 개발,** 이화여자대학교 석사학위 청구논문.

이대현 · 서관석(2003). 초등수학 예비교사들의 분수에 대한 표상의 분석, **한국수학교육학회지 시리즈 C, <초등수학교육>, 7**(1), 31-41.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M.S., & Marino, M.S. (1985). The role of implicit models in solving problems in multiplication and division, *Journal for Research in Mathematics Education, 16,* 3-17.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* The Netherlands: D. Reidel Publishing Company.

Goldin, G. (2000). A scientific perspective on structured, task-based interviews in mathematics education Research. In A. Kelly, & R. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (p.517-545). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Hart, K. (1988). Ratio and proportion. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number-concepts and operations in the middle grades* (pp. 198-219). Reston, VA: National

Council of Teacher of Mathe- matics.

Inhelder, B. & Piaget, J. (1958). *The Growth of Logical Thinking: From Childhood to Adolescence.* New York: Basic Books, Inc.

Irwin, K. (2001). Using everyday knowledge of decimals to enhance understanding. *Journal for Research in Mathematics Education, 32*, 4, 399-420.

Kaput, J. & West, M. (1994). Missing-value proportional reasoning problems : Factors affecting informal reasoning patterns. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp.235-287). Albany, NY: SUNY Press.

Karplus, E., Karplus, R., & Wollman, R. (1974). Intellectual development beyond elementary school Ⅳ: Ratio, the influence of cognitive style. *School Science and Mathematics, 74*(6), 476-482.

Karplus, E., Karplus, R., Formisano, M. & Paulsen, A.C. (1979). Proportional reasoning and control of variables in seven countries, In J. Lockhead, & J. Clement (Eds.), *Cognitive Process Instruction* (pp.47-105). Philadelphia Pennsylvania.

Karplus, R., Polos, S., & Stage, E. K. (1983). Early adolescents' proportional reasoning on 'rate' problems. *Educational Studies in Mathematics, 14*, 219-233.

Kerslake, D. (1986). *Fractions: Children's Strategies and Errors*, London: NFER-Nelson.

Kieren, T. (1976). On the mathematical, cognitive, and instructional functions of rational numbers. In R. Lesh (Ed.), *Number and measurement: Papers from a research workshop* (pp. 101-144). Columbus, OH: ERIC/SMEAC.

Lamon, S. (1993). Ratio and proportion : Connecting content and children's thinking, *Journal for Research in Mathematics Education, 24*(1), 41-61.

Lamon, S. (1999). *Teaching fractions and ratios for Understanding : Essential content knowledge and instructional strategies for teachers.* Mahwah, NJ : Lawrence Erlbaum Associates.

Lappan, G. Fey, J., Fitzgerald, W. Friel, S. & Phillips, E. (1997). *Comparing and Scaling : Ratio, Proportion, and Percent.* Palo Alto, CA : Dale Seymour Publishing Co.

Lechance, A., & Confrey, J. (2002). Helping students build a path of understanding from ratio and proportion to decimal notation. *Journal of Mathematical Behavior, 20*, 503-526.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1988). Proportional reasoning. In M. Behr, & J. Hiebert (Eds.), *Number concepts & operations for middle graders* (pp. 93-118). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lo, J.J., & Watanabe, T. (1997) Developing Ratio and Proportion Schemes: A Story of a Fifth Grader, *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(2), pp. 216-236.

Mack, K. (1995). Learning fractions with understanding :Building on informal knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*, 422-441.

Moss, J. & Case, R. (1999). Developing

children's understaning of the rational numbers: A New Model and an experimental curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(2), 122-147.

Noelting, G. (1980). The development of proportional reasoning and the ratio concept Part I -Differentiation of stages, *Educational Studies in Mathematics, 11*, 217-253.

Post, T.R., Behr, M.J., & Lesh, R. (1986). Research-based observations about children's learning of rational number concepts. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 8*(1), 38-48.

Radford, L.(2000). Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: A semiotic analysis, *Educational Studies in Mathematics, 42*(3), 237-268.

Sfard, A. & McClain, K. (2002). Analyzing tools: perspectives on the role of designed artifacts in mathematics learning. *The Journal of the Learning Sciences, 11*(2&3), 153-161.

Singh, P. (2000). Understanding the concepts of proportion and ratio constructed by two grade six students, *Educational Studies in Mathematics, 43*, 271-292.

Sowder, J., Philipp, R., Armstrong, B., & Schappelle, B. (1998). *Middle-grade teachers' mathematical knowledge and its relationship to instruction.* Albany, NY: SUNY Press.

Tourniaire, F. & Pulos, S. (1985). Proportional Reasoning : A Review of the Literature. Educational Studies in Mathematics, 16, 181-204.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), Acquisition of mathematics concepts and processes (pp. 127 - 174). New York: Academic Press.

Characteristics of Students' Problem Solving Using Additive Strategy in Ratio and Proportion Tasks

Park, Jung Sook (Graduate School, Seoul National University)

The purpose of this research was to gain a better understanding of the characteristics of students' mathematical representations using additive strategy in ratio and proportion tasks. The additive strategy is the erroneous one used most often among the strategies reported in solving ratio and proportion tasks. It is a problem solving strategy that preserves the difference from one ratio to another. Students' additive strategies were categorized into four parts: subtracting without considering units of quantities, comparing the numbers that represent the whole subtracted from the part and same part, adding the difference, and subtracting the difference. In order to change from additive strategy to multiplicative strategy, the researcher asked to find out the unit quantity and found the characteristics of students' mathematical notations in the following: Firstly, the students made the number which they wanted by multiplying and adding same numbers. Secondly, they represented the mid-points between natural numbers. Thirdly, they related $a \div b$ to decimal number, not $\frac{a}{b}$. Fourthly, they were inclined to divide the larger number with the smaller number without understanding the context of the problem. These results are interpreted as showing that lower level of performance in the dividing operation with the notations of fraction hinders the transformation from additive strategy to multiplicative strategy.

* key words : ratio(비), proportion(비례), additive strategy(가법적 전략), mathematical representation(수학적 표현)

논문접수 : 2008. 10. 20
논문수정 : 2008. 12. 4
심사완료 : 2008. 12. 12