대한수학교육학회지 <학교수학> 제 10 권 제 4 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.10, No.4, 625-648. Dec. 2008

역사 · 발생적 전개를 따른 증명의 의미 지도 - 피타고라스 정리를 중심으로 -[1)]

송 영 무* · 이 보 배**

본 연구는 중학교 3학년을 대상으로 Branford의 역사 · 발생적 기하교육을 활용하여 피타고라스 정리의 증명을 실제로 지도하여, 사례연구 과정에서 나타나는 학생들의 인식의 변화를 살펴보고, 이러한 방법이 학생들의 인식 변화에 어떠한 도움을 주는지에 대해 알아보고자 하였다.

Ⅰ. 서 론

증명은 고대 그리스 시대 이래로 수학의 핵심적인 부분으로서 학교 수학에서도 중심적인 위치를 차지해왔다. 19세기까지의 중등학교 수학교육은 대체로 Euclid 《원론》을 교과서로 하여 논증기하를 지도하였다. Euclid《원론》은 고대 그리스의 교육에서 가설 연역적 종합법의 입문서로, 수학적 진리가 영원하며 경험과 무관함을 설명해 주는 지도서로, 수학적 진리를 통해 이상향을 이해시키는 수단으로 이용되었고, 근대 이후 대학의 기초 교양 교육의 교재로, 18, 19세기에는 중등학교 기하교재로 사용되었다. 이와 같이, Euclid《원론》은 고대 그리스 이래 수학의 원형으로 여겨져 왔으며, 이에 기반을 둔 전통적인 수학교육은 과거 2000여 년 동안 학교수학의 주요 내용과 방법으로 뿌리 깊은 전통을 유지해 왔으며 오늘 날에도 중학교 논증기하의 내용적 근원이 되고 있다.(권석일, 2006, p.1)

또한, 전미수학교사 협의회(NCTM)는 「학교수학의 원리와 규준」(NCTM, 2000)에서 모든 학생들을 위한 주요한 수학적 소양의 하나로 수학적 추론과 증명 능력을 들고 있다. 또, 학교수학의 모든 분야에서 수학을 이해하는 부분으로 추론하고, 증명을 인식하도록 요구하고 있다.

증명은 정당화, 발견, 확신과 이해, 조직화, 분석과 종합 등의 여러 측면이 서로 밀접하게 관련되어 있는 복합적인 것이다. 그런데 증명의 복합적 측면이 학교 수학에도 적절히 반영되어야 함에도 불구하고, 대부분 학습자에게 수학적 발견의 맨 마지막 산물인 연역적 논리체계를 제시함으로써 수학적 발견 과정을 경험시키지 못하고 있다. 교사들은 학생들의 증명 이해를 돕기 위하여 나름대로의 지도 방안을 고안하지만, 학습자가 증명의 필요성을 인식하지 못하고 증명을 수행할 만한 논리적 성숙도를 갖추지 못하여 증명에 필요한 수학적인 생각을 하기보다 교사가 제시하는 증명절차를 따르게 되고, 증명이 끝난 후에도 증명의 의미를

* 순천대학교(ymsong@scnu.ac.kr)
** 순천대학교 대학원(kjklovein@hanmail.net)
1) 이 논문은 2008년 순천대학교 학술연구비 공모과제로 연구되었음.

이해하지 못하게 된다. (우정호, 권석일, 박미애, 2003)

이와 관련하여, 증명의 구성요소에 관하여 분석하고 조사를 통하여 증명 학습에서 학생들이 어려움을 겪게 되는 원인을 살펴보고, 어려움으로 인해 나타나는 오류 유형에 관한 연구들이 이루어 져왔다. 또한, 중학생들의 증명에 대한 관심과 흥미를 유발시키고 중학생들이 수학에 대한 긍정적인 태도를 갖도록 하기위한 효과적인 증명 지도 방법에 대하여 다양한 방법들을 소개하고, 증명 지도 개선 방향을 제시하고 있다. (서동엽, 1992; 류성림, 1993; 윤미영, 2005) 그리고, 학생들의 증명의 본질에 대한 이해나 증명 능력은 매우 낮은 수준으로 학생들은 증명의 의미와 필요성을 인식하지 못하고 기본적인 명제의 증명조차 잘 하지 못하며 증명의 가치를 인식하지 못하고 있음이 보고되고 있다.(우정호, 1994; 서동엽, 1999) 이러한 문제의식을 바탕으로 권석일(2006)은 기하학의 역사적 발생 과정을 Euclid 《원론》의 성립과정에 초점을 맞추어 살펴보고, Branford가 수십년간의 교수 경험을 바탕으로 수립한 3단계, 실험적, 직관적, 이론적 단계에 따른 학문의 발달 과정과 그에 따른 기하 지도 방법에 대하여 고찰하였다. 또, 중학교 1학년 학생들을 대상으로 그러한 방법이 학생들의 증명의 의미 인식의 전환을 가져오게 하여, 이론적 수준의 증명의 의미를 이해하는데 도움을 줄 수 있다는 것을 보였다.

그런데 현재의 교육과정에서 본격적인 의미에서의 증명을 다루는 것은 중학교 2학년이다. 명제 사이의 연역적 관계를 가정과 결론이라는 용어를 사용하여 형식화하는 경험은 중학교 2학년 이후에 이루어지는 것으로서, '증명'의 형식을 경험하지 않은 중학교 1학년 학생과 경험한 중학교 2학년 이후의 학생 사이에는 증명의 의미에 대한 인식에 있어 차이가 있을 것으로 보이며, 증명의 의미를 지도하기 위한 교수-학습 과정의 양상 역시 다를 것으로 예상된다.

본 연구에서는 중학교 3학년을 대상으로 하여 Branford가 말하는 3단계에 따라 증명의 의미를 새롭게 이해시켰을 때, 그 방법이 학생들이 증명의 본질을 이해하는데 어떠한 도움을 주는지를 알아보고자 한다.

본 연구의 목적을 위하여 다음과 같은 연구 문제를 설정하였다.

1. 증명의 의미에 대해 중학교 3학년 학생은 어떻게 이해하고 있는가?
2. 경험적인 확인과 연역적 증명에 대하여 중학교 3학년 학생은 어떻게 인식하는가?
3. Branford의 역사 · 발생적 전개에 따른 증명 지도 방법이 증명의 의미를 이해하는데 어떠한 도움을 주는가?

Ⅱ. 이론적 배경

1. Branford의 역사 · 발생적 수학교육론

19세기까지의 중등학교 수학교육은 대체로 Euclid《원론》을 교과서로 하여 논증기하를 지도하였다. Euclid《원론》은 그리스시대 이래 진리에 대한 '영혼'의 눈을 뜨게 하는 도야재로서, 추론에 엄밀성과 우아함과 힘을 부여하는 가설-연역적 방법의 지도를 위한 교재로 인식되었다. 현재 중등학교의 수학교육에서도 이러한 연역적 양식을 따른다. 그러나 수학적인 동기, 정리에 대한 실마리나 암시 및 수학적 지식의 사용처 등은 보여주지 않고, 최종적으로 잘 다듬어진 개념과 정리만을 논리적이고 조직적인 전개 순서에 따라 제시하고 있다. 이로

인해 학생들은 수학에 대해 생각할 때 현실과 분리된 내용을 다루고 있고 처음부터 완성되어진 것으로 생각을 갖게 된다.

발생적 양식은 발생적 학습-지도 원리와 연결되며, 그것은 심리·발생적 원리와 역사·발생적 원리로 분류된다. 역사·발생적 원리는 연역적 양식에 대한 대안으로 18세기의 Clairaut 이후 Cajori, Smith, Klein, Poincaré 등 여러 학자들에 의하여 지속적으로 주장되어 왔으며, La Cour, Branford, Toeplitz 등에 의하여 역사·발생적 원리에 따른 수학 교과서가 저술되기도 하였다.(민세영, 2002, p.3)

민세영(2002)은 역사·발생적 원리에 대한 관점의 차이는 수학에 대한 역사관의 차이와 수학교육학의 발전에 기인하는 것으로 보고, 수학의 발달을 연속적으로 이루어진다는 관점의 '고전적인 역사·발생적 원리', 불연속적으로 이루어진다는 관점의 '현대적인 역사·발생적 원리'로 나누어 고찰하고 있다.

Ramus는 연역적인 학문의 구조에 대한 비판과 연계하여 Euclid적 방법에 강하게 반대하였다. 또한, 기하학은 토지를 교묘하게 측량하는 기술이며, 직접 사물을 관측할 수 없을 경우에 간접 측정으로부터 논리적 연역을 통하여 바른 결과를 이끌어내게 된다고 보았다. 이러한 영향을 받아 프랑스에서 Arnauld와 Clairaut에 의하여 새로운 형식의 《원론》이 탄생되었다.

본격적으로 역사·발생적 원리가 드러나기 시작한 것은 Clairaut에 의해서라고 볼 수 있다. 그는 《Éléments de géométrie (1741)》 에서 수학의 역사적 발달을 학습 내용과 활동의 조직화를 위한 방법으로 사용하는 역사발생적 방법을 제시하였다. Clairaut는 정의나 공리, 정리 등을 확연하게 기술하지 않으면서도 자연스럽게 기하학적 지식을 배울 수 있도록 구성하였다. Clairaut의 역사발생적 방법은 수학 학습에 있어서의 수학사적 측면을 부각시켰고, 수학 학습-지도 원리인 역사·발생적 원리를 탄생시키는 계기가 되었다.

수학사를 교재 구성에 반영하고자 하는 역사·발생적 원리가 주장되는 가운데 역사·발생적 원리에 따른 교재들이 나오게 되었고, 대표적인 예로 Branford의 교재를 들 수 있다.

Branford는 개인의 발달은 인류의 발달과 동일한 과정을 거치지만 단지 좀 더 빠를 뿐이며, 역사·발생적 원리가 교육의 기초가 되는 것이 가장 중요하다고 생각하였다. 그는 역사·발생적 원리에 따른 교육과정을 구상하였고, 《A Study of Mathematical Education (1908)》 을 저술하였다. 이 책에서는 '개인에 있어서의 지식과 힘의 가장 효과적인 발전 경로는 그러한 특별한 지식과 힘을 발달시키는데 종족이 역사적으로 통과한 경로와 대체로 일치한다.'는 문화단계설을 수학교육의 중심원리로 수용하고, 수학의 역사를 개인의 발달로 재해석하여 학생을 안내하는 역사·발생적 원리의 정신을 실현하는 것을 수학교육연구의 중심과제로 삼고 있다.

Branford는 이와 같은 입장을 중심 원리로 하여 다음과 같은 부차적 원리가 나올 수 있다고 주장한다. 첫 번째 원리는 학생은 아주 초기부터, 역사가 보증하는 과정에 의해 즉, 필요한 정도로 알맞은 특별한 경우로부터 귀납함으로써, 정의, 정리, 연산의 규칙을 스스로 발견하도록 인도되어야 한다는 것이다. 두 번째 원리는 기호나 축약은 학생 자신이 어떤 축약을 제안할 준비가 되어 있거나 적어도 교사가 제공했을 때 그것의 이점을 평가할 정도로 필요성을 깊이 느끼기 전까지는 도입되어서는 안된다는 것이다. 세 번째 원리는 강의 요목의 범위는 적어도 학생이 교육을 받아 그 내용의 실제적인 효과적 숙달이 되는 정도로, 그 기초

를 합리적으로 파악하고, 뒤이은 적용에서 기계적인 기민성을 획득할 수 있는 정도로만 되어야 한다는 것이다. 네 번째 원리는 학생들이 점차 수학사에 등장하는 위대한 수학자의 이름과 그들의 오랜 투쟁, 자주 있는 실수, 수학을 건축한 조상들의 마지막 성공과 같은 흥미로운 사실과 친숙해지도록 만드는 것이다.(권석일, 2006, p.67)

Branford에 따르면 학생들은 다루고 있는 수학적 지식이 필요하다는 것을 느껴야하며, 또한 학생들이 이러한 요구를 느낄 수 있도록 하는 경험을 제공해야 한다고 보았다. Branford는 수학사를 통해 그러한 해답을 찾을 수 있을 것이라고 생각하였다.

Branford는 교육적인 목적을 위하여 기하학의 제재와 정신을 학생들에게 가장 효과적으로 제시하려면 대체적으로 기하학의 역사적 발달 순서에 따르게 된다는 것을 보이고자 하였다.

2. 기하학의 역사적발달 순서에 따른 논증기하 지도

Branford는 증명을 일반성이 확보된 명제가 상호 연결되는 체계화를 의미하는 것으로 보고 있다. 학교수학에서 체계화라는 것은 공리적 체계화보다 초보적인 수준에서 직관적인 준거에 의하여 수용된 기본 명제와 이미 일반성이 확보된 명제 사이의 국소적 조직화를 의미하는 것으로 해석할 수 있다. 아동이 증명을 학습함에 있어 수학적 개념의 정의, 기본적인 성질, 함의 관계, 일반성이 확보된 명제 사이의 상호 관련성을 초보적인 수준에서나마 이해하도록 하는 것은 교육적으로 매우 중요하다.(권석일, 2006, p.70)

그러나 증명의 의미 지도에 있어서 많은 문제점이 여러 선행 연구에서 지적된 바 있다. 학생들의 증명의 본질에 대한 이해나 증명 능력이 매우 낮은 수준이고, 학생들은 증명의 의미와 필요성을 인식하지 못하고 기본적인 명제의 증명도 잘 하지 못하며 증명의 가치를 인식하지 못하고 있음이 보고되고 있다. 또한, 정당화 수단으로서의 증명은 학생들에게 한계를 갖는다. 증명수업에서는 교과서에서 정의로 규정되지 않은 사실들을 반드시 증명 할 것을 요구하므로 학생들은 이미 참인 것으로 알고 있는 익숙한 사실을 왜 증명해야 하는가에 대해 의아해한다. 서동엽(1998)에 따르면, 학생들은 논리적인 증명보다 실험이나 측정을 통하여 결과를 확인하는 것을 더 선호하는 경향을 보인다고 한다. 증명 학습이 이전에 학습했던 직관기하에 비하여 질적으로 다른 수준으로의 사고수준의 비약을 통하여 이루어지는 것이라면 그 비약의 과정을 발생적으로 분해함으로써 그 이행을 도울 수 있는 방안을 찾아보아야 할 것이다.

현재 중학교에서 다루어지는 논증기하의 내용과 체계는 대부분 Euclid의 《원론》으로부터 핵심적인 아이디어가 유래하는 것이지만, 거기서 다루고 있는 많은 내용은 연역적인 형태로 체계화되기 훨씬 이전에 경험적 또는 직관적으로 알려져 있었을 뿐만 아니라, 소박하고 엄밀하지 못한 형식으로나마 어느 정도 정당화까지 이루어져 있었음이 역사적으로 확인되고 있다. (권석일, 2006)

Branford는 역사적으로 기하학은 바빌로니아와 이집트의 경험적 기하가 그리스 시대로 이어지면서 직관적인 기하 단계를 거쳐 과학적인 기하학으로 발전되어 왔으며, 그러한 기하학의 역사적 발생과정과 맥을 같이하여 증명 또한 실험적 증명, 직관적 증명, 과학적 증명의 세 단계를 거쳐 발전되었다고 보고 있다.(우정호, 권석일, 박미애, 2003, p408)

첫 번째 실험적 단계는 특수한 사실만을 입

증할 수 있지만 완전히 또는 절대적으로 보편적인 사실을 제안할 수 있는 것은 아니며, 주로 사용하는 정신활동은 감각-지각이다. 전 과정이 구체적인 단위로 측정하는, 즉 실험하는 것이며, 근사적으로 특정한 사실만을 보여주는 정당화 수준이다. 실험을 통한 입증을 통해 일반적인 사실을 유추 할 수는 있지만, 정당화할 수는 없다. 그러나 다음 단계의 증명의 본질을 이해시키기 위해서는 이 단계를 반드시 거쳐야 한다.

두 번째 단계인 직관적 증명은 일반적 혹은 보편적인 사실을 입증할 수 있고 증명의 과학적인 이상을 제시할 수 있으나 필요할 때마다 감각적 경험에 의존하는 단계이다. 직관적 증명에서는 개념적인 통찰이 작용하기 때문에 보편성과 일반성을 어느 정도 확보하는 것이 가능하다.

Wittmann은 Branford가 제시하는 증명의 세 수준을 설명하면서, '증명이 아닌 것'과 '증명'의 구획은 직관적 증명과 수학적 증명의 사이가 아니라 실험적 증명과 직관적 증명의 사이에서 이루어져야 한다고 하였다. Wittmann은 '직관적 증명'이라는 용어 대신, '내용적으로 직관적인 증명'이라는 용어를 사용하고 있는데, 이것이 함의하는 바는 그러한 증명이 증명의 '실체적인 내용이나 맥락을 보여주고 분명하게 한다'는 것이다. 즉, 직관적 증명은 실제적 소재를 통하기 때문에 완전히 형식화된 대상을 다루는 수학적 증명과는 구별되지만, 그 내용의 일반적인 본질을 지적하고 있다는 점에서 실험적 증명과 구별되며 그것 때문에 '증명'이라고 불릴 수 있는 자격을 갖게 된다는 것이다.(권석일, 2006, 재인용, p.72-73)

세 번째 단계인 형식적 증명은 이미 발견한 일반적인 사실을 상호적으로 연결하는 체계화를 의미한다. 완전한 학문적 증명은 새로운 감각-인식적 정리와 공리는 하나도 쓰지 않는다. 그러나 그 모든 것들을 가정된 기초로 시작할 때 놓고, 순수하게 논리적인 추론만을 사용한다. 우세한 정신 활동은 추상적인 개념이다. 그것은 후기 그리스 수학의 많은 부분과 현대 유럽 수학 대부분의 특징이다.

직관적 증명에 대한 Branford의 생각은 역사·발생적 관점에서 경험적, 실험적 증명과 논리 연역적 증명의 차이점을 분명히 함과 동시에 그 사이의 간극을 메워주고, 증명의 본질 지도 개선의 가능성을 제시하였다는 점에서 커다란 교육적 의미를 갖는다.

III. 연구방법 및 절차

1. 연구방법

본 연구는 증명을 이미 학습한 중학교 3학년 학생들이 증명의 의미에 대해 어떻게 이해하고 있는지, 경험적인 확인과 연역적 증명에 대하여 어떻게 인식하고 있는지 살펴보고, Branford의 역사·발생적 기하 교육을 활용한 증명 지도가 학생들이 증명의 의미를 이해하는데 어떠한 도움을 주는지에 대해 알아보는데 목적이 있다.

이러한 목적을 달성하기 위하여 다음과 같은 절차로 연구가 진행이 되었다. 먼저, 연구자가 거주하고 있는 곳의 근처에 있는 중학교 3학년 한 학급의 36명을 대상으로 사전 설문 조사를 실시하여 중학생들이 증명의 의미에 대해 어떻게 이해하고 있는지 살펴보았다.

사례연구를 진행하기 위해 사전 설문 조사 결과를 바탕으로 2명의 학생을 선정하였고, 피타고라스 정리의 증명을 실험적 방법, 직관적 방법, 형식적 방법의 서로 다른 방법으로 나누

어 새롭게 지도하였다. 이 과정에서 학생들은 활동지를 기록하였고, 연구자는 수업 중의 학생들과의 대화내용을 녹음하였다. 그리고 경험적인 확인과 연역적 증명에 대하여 어떻게 인식하고 있는지, 역사·발생적 증명 지도가 학생들이 증명의 의미를 이해하는데 어떠한 도움을 주는지 살펴보기 위해 사전·사후 면담을 실시하였다.

2. 연구 대상

연구 방법 및 목적에 맞도록 연구대상을 선정하기 위해 의도적인 표집 방법을 선택하였다. 여기서 연구 목적에 맞는 연구대상이라 함은 증명의 의미에 대한 이해와 관련된 것으로 추론의 연결 관계, 함의, 가정과 결론의 분리, 함의와 동치의 구분, 정리는 예외가 없음, 명백한 명제에 대한 증명의 필요성, 증명의 일반성과 밀접한 관련이 있다.(서동엽, 1998) 연구자가 거주하고 있는 곳과 가까운 S 중학교의 한 학급(36명)을 대상으로 사전 설문조사와 1차, 2차 증명능력 테스트를 실시하였다. 그 결과를 바탕으로하여, 수학에 관심이 있고, 증명단원을 어려워하지만 증명의 필요성을 인식하고 있는 학생들을 선별하였다. 그 중 학급에서 상위권 또는 중상위권에 있으면서 증명문제를 해결하는 과정에서 조금의 차이를 보이는 두 학생을 선정하였다.

3. 자료수집 및 절차

가. 사전조사 설문지

1) 증명의 의미에 대한 학생의 인식 조사

증명의 의미에 대한 설문지의 문항을 통하여 학생들이 수학 및 증명에 대해 가지고 있는 인식을 조사함으로써 현재 중학교 수학의 증명 지도가 어떻게 이루어지고 있으며 학생들이 증명을 어떻게 인식하고 있는지를 파악하고자 하였다.

설문지는 기초 자료 조사 4문항, 인식 조사를 위한 9문항으로 구성하였다. 인식 조사를 위한 문항에서는 증명에 대한 어려움, 증명의 필요성과 일반성에 대해 학생들이 어떻게 인식하고 있는지 알아보고자 하였다.

2) 증명 능력 테스트

증명 능력 테스트를 통하여 학생들의 기본적인 증명 능력을 알아보고, 함의관계, 추론의 연결 관계, 가정과 결론의 분리 능력을 알 수 있는 문항으로 구성하였다. 문항의 구성 범위는 '피타고라스 정리'를 학습하지 않은 중학교 3학년 학생들을 대상으로 하기위하여, 중학교 8-나 단계[2] 교과서 도형 영역에서 선정하였다.

① 1차 증명 능력 테스트

1차 증명 능력 테스트는 크게 6문항으로 구성하였다. 상세히 살펴보면, 1번 문항은 가정과 결론으로 나누기와 괄호 채우기이고, 2번 문항은 가정과 결론으로 나누기와 증명 과정 서술하기, 3번 문항은 괄호 채우기, 4번~6번 문항은 증명 과정 서술하기이다.

② 2차 증명 능력 테스트

2차 증명 능력 테스트는 크게 7문항으로 구성하였다. 상세히 살펴보면, 1번 문항은 괄호 채우기를 객관식으로 제시하였고, 2번과 4번 문항은 괄호 채우기를 보기에서 찾아 쓰기, 3번, 5번, 6번 문항은 괄호 채우기, 7번 문항은 증명 과정 서술하기이다.

위 같은 구성으로 이루어진 설문지는 S중학

2) 중학교 8-나 수학, (주)도서출판디딤돌, 2006 - Ⅱ.삼각형의 성질, Ⅲ. 사격형의 성질, Ⅳ. 도형의 닮음 단원의 '선생님과 함께'에 소개된 문제

교 3학년 학생들의 아침 자율학습시간에 이루어졌다. 2007년 3월 17일에는 증명의 의미에 대한 학생의 인식 조사와 1차 증명 능력 테스트가 실시되었고, 2007년 4월 7일에 2차 증명 능력 테스트가 실시되었다. 두 번의 테스트를 실시한 시간이 아침 자율학습 시간이었기 때문에 지각한 학생 5명을 제외한 31명의 결과를 바탕으로 자료를 분석하였다.

나. 역사·발생적 전개를 따른 '피타고라스 정리' 증명 지도

1) 실험적 단계

실험적 단계는 주로 감각-지각적인 정신활동을 사용하고, 근사적인 사실만을 보여주는 정당화 수준이다. 또한, 일반적 사실이 유추 가능하다는 점에서 의미를 가지는 단계이다.

이 단계에서는 필요한 정도로 알맞은 특별한 경우로부터 귀납함으로써, 정의, 정리, 연산의 규칙을 스스로 발견하도록 하기위해 '세 변은 삼각형을 결정하는데 충분할까?'라는 발문을 시작으로 삼각형의 결정 조건에 대하여 먼저 알아보았다. 피타고라스 정리는 특수한 삼각형(직각삼각형)의 세 변사이의 관계를 나타내고 있다.

마찬가지로 삼각형의 결정 조건이 삼각형의 세 변사이의 관계를 나타내고 있기 때문에 삼각형의 결정 조건에서 피타고라스 정리를 유추할 수 있도록 하기 위해, 삼각형의 결정 조건을 먼저 실험적으로 살펴보았다.

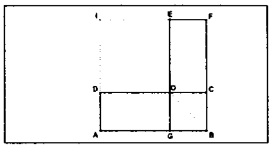
첫 번째 활동은 학생들이 자유롭게 여러 모양의 삼각형 10개를 그리도록 하고, 그 삼각형들의 변의 길이를 자로 측정을 하도록 하였다. 두 번째로는 3개의 숫자를 한 쌍으로 하여 10쌍을 기록하도록 한 후, 그 숫자들로 삼각형을 그려보도록 하였다. 이러한 활동을 통해 삼각형의 결정 조건을 발견할 수 있도록 하였다. 마지막 활동으로는 이전 활동에서 그려둔 여러 가지 삼각형을 활용하여 변의 길이를 측정한 후, 조작하여 세 변 사이의 관계를 발견하도록 하였다. 그리고 예각삼각형, 둔각삼각형, 직각삼각형 일 때에 따라 세변 사이의 관계가 어떻게 되는지 살펴보도록 하였다.

2) 직관적 단계

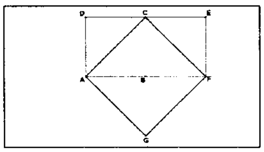
직관적 단계는 감각-지각적 활동에 의존을 하지만 일반성을 확보하는 단계이다. Branford는 기호나 축약이 학생 스스로가 어떤 축약을 제안할 준비가 되어 있거나 적어도 교사가 제공했을 때 그것의 이점을 평가할 정도로 필요성을 깊이 느끼기 전까지는 도입되어서는 안된다고 주장한다.

따라서 이 단계에서는 실험적 단계에서 근사적으로 알아낸 $a^2=b^2+c^2$이라는 결과를 기호를 사용하지 않고 그림을 통해 시각적으로 확인을 해보았다. Clairaut[3]는 측정을 통하여 기하를 조직을 하고 있다. 그 중 피타고라스 정리에 관한 부분만 살펴보면 다음과 같다.

① 한 직사각형을 높이가 주어진 다른 직사각형으로 바꾸기

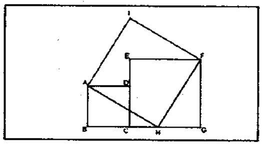


② 한 정사각형의 두 배인 정사각형 만들기

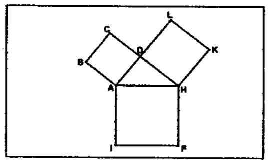


3) 장혜원(2006)은 Clairaut의 《Éléments de géométrie (1741)》를 번역하였다. 본 연구자는 장혜원(2006)의 《끌레로의 기하학원론》을 참고하였다.

③ 서로 다른 두 정사각형의 합과 같은 정사각형 만들기



④ 직각삼각형의 빗변을 한 변으로 하는 정사각형은 다른 두 변을 각각 한 변으로 하는 두 정사각형의 합과 같다.

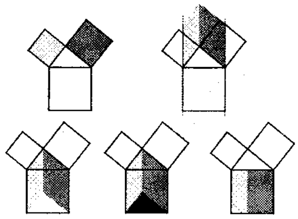


⑤ 직각삼각형의 세 변이 세 개의 닮은 도형의 밑변이 된다면, 빗변 위에 만들어진 도형은 다른 두 도형의 합과 같다.

이러한 과정은 필요에 의해서 생긴 특수한 상태에서 일반화 되어 가고 있다.

본 연구자는 학생들에게 고대 그리스 시대 사람들이 토지 측량을 하기위해 이러한 활동을 하였음을 소개하여, 이러한 활동이 전혀 쓸모없는 것이 아닌, 필요에 의해 만들어 졌다는 것을 강조하였다. 특히, 위 과정 중 ③의 내용을 학생들과 함께 그림을 그려 확인을 해보았다.

클레로의 기하학 원론에서 소개한 것처럼 ③의 그림에서 사각형들을 적당히 이동시켜서 ④의 그림을 유도하였다. 그 후에 컴퓨터를 이용하여 다음 과정을 보여주면서, 시각적으로 '서로 다른 두 정사각형의 넓이의 합과 큰 정사각형의 넓이가 같다.'라는 사실을 한 번 더 확인을 하였다. 여기서 '빗변의 제곱은 다른 두 변의 제곱의 합과 같다.'는 명제를 보장하여 주는 것은 '작은 두 정사각형의 넓이의 합이 큰 정사각형의 넓이와 같다.'는 것이다.

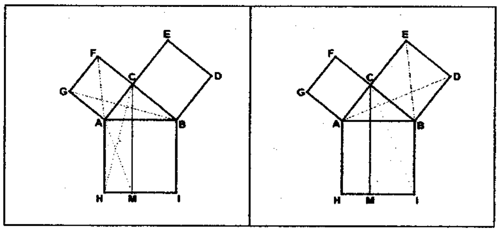


[그림 Ⅲ-1] 직관적 단계 후 시각적으로 확인시킨 그림

3) 형식적 단계

형식적 단계는 일반성이 확보된 사실들이 상호 연결이 되어 체계화가 되는 단계이다. 공리나 기본적인 정리들로부터 논리적인 추론만을 사용하여 완전하게 연역하는 증명이 여기에 해당된다.

이 단계에서는 ④번 그림에 기호를 사용하고 다른 기본적인 정리들을 사용하여 아래 그림을 이용하여 Euclid의 피타고라스 정리 증명법으로 증명 하였다.



다. 면담

수업 전에 학생들의 증명에 대한 인식과 기본적인 증명 능력을 파악하기 위해 사전조사 설문을 실시하였으며, 보다 자세한 이해를 위하여 사전 면담을 실시하였다. 또한 수업이 이루지는 과정에서 의문이 생기는 사항을 수업 후에 면담을 실시하였으며 모든 면담 과정은 녹음되었다.

Ⅳ. 연구 결과 및 논의

1. 사전 조사 설문 결과

가. 증명의 의미에 대한 학생의 인식 조사 설문 결과

이 설문을 통하여 학생들이 증명의 의미에 대해 어떻게 인식하고 있는지를 파악하고자 하였다. 전체 학생을 대상으로 한 설문 결과부터 살펴보면 다음과 같다.

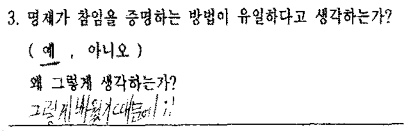
<표 Ⅳ-1> 증명의 의미에 대한 인식 조사 결과

증명이 어려움	매우 그렇다	4명
	그렇다	14명
	보통이다	10명
	그렇지 않다	1명
	매우 그렇지 않다	2명
증명이 필요함	매우 그렇다	4명
	그렇다	6명
	보통이다	11명
	그렇지 않다	8명
	매우 그렇지 않다	2명
증명 방법 유일성	유일하다	8명
	유일하지 않다	19명
	무응답	4명
올바르다고 생각하는 증명 방법 택하기	①	1명
	②	3명
	③	15명
	①, ②	1명
	①, ③	1명
	②, ③	7명
	①, ②, ③	2명
	무응답	1명

전체 응답자 중 58%의 학생들이 증명을 어렵다고 생각하고 있었다. 이와 반대로 증명의 필요성에 대해서는 약 30%정도의 학생들만이 증명이 필요하다고 답을 하였다. 증명 방법의 유일성에 대해서는 '유일하다'와 '유일하지 않다'의 비율이 약 1 : 2.4로 증명 방법이 유일하지 않다고 하는 학생들이 많았다. 하지만, '유일하지 않다'고 응답한 학생들(19명) 중 9명의 학생은 '삼각형의 세 내각의 합은 180°이다.'라는 명제를 증명하는 방법 중 자신이 올바르다고 생각되는 증명을 중복하여 택할 수 있게 한 문항에서 한 가지의 답을 택하였다. 여기서, 학생들이 증명에 대한 인식이 정착하지 못했다는 사실을 알 수 있었다.

위의 문항에서 ③번에 답을 한 학생(중복응답을 포함하여)이 81%를 차지하고 있다. 이것은 중학교 2학년 과정에서 이미 증명을 접해보았기 때문에 형식적인 단계의 증명 즉, 연역적 증명을 택한 학생이 가장 많은 것으로 보인다.

증명 방법이 '유일하다'고 한 학생들의 대부분은 그 이유에 대해서는 답을 하지 못하였고, 한 학생은 그 이유를 '그렇게 배웠기 때문에'라고 답을 하였다([그림 Ⅳ-1]). 이것은 대부분의 학교 현장에서 증명 지도 방식이 학생들의 활동이 거의 배제된 교사의 일방적인 지시적 수업으로 이루어지기 때문일 것이다. 따라서 교사가 다양한 방법으로 증명을 지도 한다면 학생들의 논리적 사고를 향상 시키는데 도움이 될 것이라 생각된다.


3. 명제가 참임을 증명하는 방법이 유일하다고 생각하는가?
(예 , 아니오)
왜 그렇게 생각하는가?
그렇게 배웠기때문에!!

[그림 Ⅳ-1] 증명 방법 유일성에 대한 한 학생의 답

영재와 지훈이는 증명을 어려워하는 점은 같았지만, 증명의 필요성이나 증명 방법에 대해

서는 다른 생각을 가지고 있었다. 두 학생(영재, 지훈)에 대한 사전 설문 조사 결과는 다음과 같다.

<표 Ⅳ-2> 증명의 의미에 대한 인식 설문 결과

문항 \ 이름	영재	지훈
증명이 어려움	그렇다	매우 그렇다
증명이 필요함	X	O
증명 방법	유일하지 않다	유일하다
올바르다 생각하는 증명 방법 택하기	③	③

영재는 증명이 필요하지 않을 때가 있기 때문에 증명이 꼭 필요한 것은 아니라고 하였다. 반면, 지훈이는 증명 과정이 있어야만 (주어진 명제에 대해) 이해가 쉽기 때문에 증명이 필요하다고 하였다.

증명 방법에 대해서 영재는 유일하지 않다고 하였고, 지훈이는 유일하다고 하였다. 지훈이는 그 이유에 대해서 '내가 배운 것이 이것이 유일한 방법이기 때문에'라고 하였다.

'삼각형의 세 내각의 합은 180°이다.' 라는 명제가 참임을 증명한 방법 중 올바르다고 생각하는 증명 방법을 중복가능하게 택하라는 문항에는 두 학생 모두 교과서에 나오는 형식적인 증명방법을 택하였다. 특히, 영재는 증명방법이 유일하지 않다고 답을 하였지만 위의 문항에서는 한 가지의 증명방법을 택하였다는 것을 알 수 있다.

나. 1차 증명 능력 테스트 결과

이 증명 능력 테스트는 기본적인 증명을 할 수 있는 학생을 선정하기 위하여 실시되었다. 전체 학생을 대상으로 한 테스트 결과는 다음과 같다.

<표 Ⅳ-3> 1차 증명 능력 테스트 결과

문항 유형	문항	해결한 학생	해결 못한 학생
가정과 결론으로 나누기	1. (1)	11명	20명
	2. (1)	11명	20명
괄호 채우기	1. (2)	15명	16명
	3	13명	18명
증명 과정 서술하기	2. (2)	3명	28명
	4	3명	28명
	5	2명	29명
	6. (1)	1명	30명
	6. (2)	3명	28명

증명 단원을 시작하면서 가장 먼저 가정과 결론으로 나누기를 학습하는데 가정과 결론으로 나누기를 해결하지 못하는 학생들이 많았다. 그 이유에 대해서 알아보기 위해 면담을 하였다.

연구자 : 명제를 보면은 가정하고 결론은 구별해낼 수 있어?
지 훈 : 네. 그거는. ~이면 ~이다. 끊고. ~은, ~을...은는이가 그걸로 또 끊고.
영 재 : 그것은 우리들 수준이 되면 누구나 할 수 있는 것이죠. 우리와 같은 수준이 되면요.

'~이면 ~이다.', '~은(는)~이다.', '~이(가)~이다.'의 형태를 가진 명제는 가정과 결론으로 나누기가 쉽다고 하였다. 하지만, 1차 테스트에 있는 명제들이 위의 형태가 아니었기 때문에 학생들이 가정과 결론으로 쉽게 나누지 못한 것으로 보인다.

괄호 채우기 문항의 경우는 다른 유형에 비해 해결한 학생 수가 많았다. 그리고 해결하지 못한 학생들 중 소수의 학생들만 아무것도 기록하지 않았고 대부분의 학생들은 증명 시작

부분이나 끝부분은 괄호를 채웠다. 문항 유형 중 괄호 채우기의 경우 학교 시험에 자주 출제가 되는 유형이기 때문에 학생들이 낯설어 하지 않았고, 쉽게 접근을 하였다.

1차 증명 능력 테스트에서는 증명 과정 서술하기 유형이 가장 많이 있었다. 결과를 보면 몇 몇 학생들은 증명을 시도 하였지만, 중도에 포기를 하였다. 하지만, 많은 학생들이 아무 것도 적지 않은 채 빈 공간으로 두거나, 문제에 ☆표를 해두었다.

학교 시험에서는 증명 과정을 모두 서술하는 유형의 문제를 출제하지 않는 경향이 있다. 학생들은 학교 시험에 출제되지 않는 증명 과정 서술하는 것을 자발적으로 연습하지 않기 때문에 증명 과정을 서술하는 것에 대한 두려움과 거부감을 가지고 있었다.

사전 설문 조사를 바탕으로 선정한 영재와 지훈이는 1차 증명 능력 테스트에서 차이를 보이고 있다. 그 결과는 다음과 같다.

<표 Ⅳ-4> 두 학생의 1차 증명 능력 테스트 결과

문항 유형	문항	영재	지훈
가정과 결론으로 나누기	1. (1)	O	O
	2. (1)	O	X
괄호 채우기	1. (2)	O	O
	3	O	O
증명 과정 서술하기	2. (2)	X	X
	4	O	X
	5	X	X
	6. (1)	X	X
	6. (2)	X	O

영재는 가정과 결론으로 나누기 문제와 증명 과정의 빈칸 채우기 문제는 모두 해결하였으나, 증명 과정 서술하기 문제는 5문제 중 4번 한 문제만 서술하였다. 지훈이는 증명 과정의 빈칸 채우기 문제는 모두 해결하였고, 가정과 결론으로 나누기의 2.(1)에서 가정은 찾았고, 주어진 명제의 '한 점'이 외심이라는 사실은 알았지만, 결론을 기호로 적지는 못하였다. 그리고 증명 과정 서술하기 문제는 6.(2)번 한 문제만 해결하였다. 두 학생 모두 증명 과정 서술하기 문제를 한 문제씩 해결하였지만, 4번과 6.(2)번 문제는 6.(1)의 결과를 활용하여 증명하는 문제로 난이도가 4번보다 낮다. 그렇기 때문에 두 학생의 기본적인 증명 능력에 차이가 있다고 판단되었다.

다. 2차 증명 능력 테스트 결과

1차 증명 능력 테스트에서 증명 과정 서술하기 유형의 문항을 많은 학생들이 해결하지 못하였기 때문에 학생들의 기본적인 증명 능력에 대해 파악을 할 수가 없었다. 그래서 문항의 난이도를 낮추어 2차 증명 능력 테스트를 실시하게 되었다. 테스트 문항 중 4문항은 중학교 8-나 단계에서 발췌하였고, 3문항은 응용문제로 구성하였다.

2차 증명 능력 테스트에 대한 전체 학생들의 결과는 다음과 같다.

<표 Ⅳ-5> 2차 증명 능력 테스트 결과

문항 유형		문항	해결한 학생수	해결 못한 학생수
가정과 결론으로 나누기		6. (1)	10명	21명
괄호 채우기	객관식	1	29명	2명
	보기에서 골라 쓰기	2	29명	2명
		4	25명	6명
	괄호 채우기	3	26명	5명
		5	16명	15명
		6. (2)	20명	11명
증명 과정 서술하기		7	4명	27명

2차 증명 능력 테스트에서는 가정과 결론으로 나누는 문제를 해결하지 못한 학생이 해결한 학생보다 더 많았다. 해결하지 못한 학생들은 가정에 주어진 조건들을 모두 적지 않고 한 가지만 적어 두는 경향이 있었다.

괄호 채우기는 유형을 세분화하여 객관식 1문항, 보기에서 골라 쓰기 2문항, 괄호 채우기 3문항으로 하였는데, 모든 유형에서 해결한 학생 수의 비율이 높았다. 괄호 채우기의 5번에서 해결하지 못한 15명의 학생 중 4명의 학생만 아무 것도 적지 못하였고, 11명의 학생들은 세 곳의 괄호를 모두 채웠지만, 기호를 쓰는 순서를 틀리는 등의 경우로 1곳 또는 2곳이 틀렸다. 2차 테스트에서도 1차 테스트와 마찬가지로 괄호 채우기 유형의 문항은 해결 비율이 높게 나왔다.

증명 과정 서술하기 유형은 학생들이 많이 어려워하는 유형이므로 난이도가 낮은 문제를 출제하였다. 그럼에도 불구하고 4명의 학생만이 이 문항을 해결하였다.

증명의 의미에 대한 인식 조사 설문과 1차 증명 능력 테스트에서 차이를 보였던 영재와 지훈이의 2차 증명 능력 테스트 결과는 다음과 같다.

<표 Ⅳ-6> 두 학생의 2차 증명 능력 테스트 결과

문항 유형		문항 번호	영재	지훈
가정과 결론으로 나누기		6. (1)	O	O
괄호 채우기	객관식	1	O	O
	보기에서 골라 쓰기	2	O	O
		4	O	O
	괄호 채우기	3	O	O
		5	O	O
		6. (2)	O	O
증명 과정 서술하기		7	O	X

영재는 2차 테스트의 7문항을 모두 해결하였고, 지훈이는 증명 과정 서술하기 유형의 7번 문항을 해결하지 못하였다. 따라서 영재와 지훈이의 증명 해결 능력에 조금의 차이가 있음을 확인 할 수 있었다.

영재는 증명 과정이 주어져 있고, 그 과정을 보면서 유추하여 괄호를 채우는 문제는 쉽게 해결하였으며, 증명 과정이 간단한 명제의 증명은 스스로 해결할 수 있었다. 지훈이는 전체 증명 과정이 주어졌을 때, 유추하여 괄호를 채우는 문제는 잘 해결하지만, 증명 과정을 스스로 해결하는 문제는 어려워하였다.

2. 중학생들이 인식하는 증명의 의미

Branford는 증명을 일반성이 확보된 명제가 상호 연결되는 체계화를 의미한다고 보고 있다. 여기서 체계화라는 것은 넓게 보면 공리체계화를 의미하지만 학교수학에서는 직관적인 준거에 의하여 수용된 기본 명제와 이미 일반성이 확보된 명제 사이의 국소적 조직화를 의미하는 것으로 볼 수 있다.(우정호, 권석일, 박미애, 2003)

역사·발생적 전개에 따른 수업과 수업 후의 심층면담을 통해 첫 번째 연구문제인 '중학생들이 증명의 의미에 대해 어떻게 이해하고 있는가?'에 대하여 살펴보고자 하였다.

다음은 역사·발생적 전개에 따른 수업을 진행하기 전의 면담과정에서 나누었던 대화내용이다.

연구자 : 증명의 의미를 알고 있니?
지 훈 : 명제가 어떻게 성립되는지를 설명하는 것
연구자 : 영재는?
영 재 : 어떤 공식이 참인가를 밝혀내는 근거. 아니면 어떤 사실이 참인가를 밝혀내는 근거라든가.

위 대화내용에서 교사의 질문에 지훈이는 '설명'하는 것, 영재는 어떤 사실이 참인가를 밝혀내는 '근거'라는 답을 하였다. 두 학생의 '설명'과 '근거'라는 표현에서 증명의 의미에 대해 다른 사람을 확신시키거나 이해시키기 위한 설명으로 증명을 인식하고 있다는 것을 알 수 있다. 이것은 유클리드적 체계를 따른 연역주의적 사고이다. 학생들은 중학교 2학년 과정에서 이미 증명에 대한 학습을 하였기 때문에 기본적으로 연역주의적 사고를 하고 있는 것으로 보인다.

다른 대화 내용에서 지훈이가 증명에 대해 또 다른 생각을 가지고 있다는 사실을 알 수 있었다.

연구자 : (사전 조사 설문지의)마지막 문제에서 3000개의 이등변삼각형의 밑각의 크기를 측정해봤다는 것은 직접 다 재봤다는 거잖아. 그것이 이등변삼각형의 두 밑각이 같다는 것을 증명했다고 생각하니?

지 훈 : (중략) 그깐 그사람 누군가 보면은 그것은 증명 됐다고 생각해요.

'이등변삼각형의 두 밑각이 같다'라는 사실을 증명하기 위해 3000개의 이등변 삼각형의 밑각의 크기를 측정하는 것이 증명일까라는 질문에 지훈이는 '누군가 보면 증명 됐다.'라고 답을 하고 있다. 이것은 '객관성은 사회적 성격을 가지고 있다는 사실에 근거하여 수학적 지식을 공표 후에 공인된 객관적인 수학적 지식으로 구성하는데 사회적인 상호작용 과정이 필요하다'라고 보는 구성주의적 사고임을 알 수 있다.

연구자 : 둘 다 증명이 필요하다고 답을 했네. 왜 필요할까요?

영 재 : 당연히요. 어떨 때는 증명이 필요할 때가 있지요. 특히요. 어려운 것은요. 어떤 사람이든 공식을 구해내잖아요. 그러면 그 공식이 참인지 거짓인지 알 수가 없잖아요. 그럴 때 있으려고 증명이 필요한 거 아녜요?

연구자 : 지훈이는?

지 훈 : 저는, 어...증명이...말 할려고 했는데...(웃음)...까먹었어요...(웃음) 답이...그렇게...증명이...의미대로....된...되는지. 검산 같은 걸로 검산해 보는 것

연구자 : 그럼 참인 것으로 알고 있는 사실을 왜 증명하는지 잘 모르겠어?

모 두 : 네

지훈이는 "증명이 왜 필요할까?"라는 질문에 답을 하는 중간에 '까먹었어요.'라는 말을 하였다. 학원을 다니고 있는 지훈이는 중학교 2학년 때 학원 선생님께서 증명의 의미에 대해 말씀해 주셨다고 하였고, 너무 오래 되서 기억이 잘 나지 않는다고 하였다. 그래서 지훈이에게 정답이 없으니 자신의 생각을 말해 보라고 하였다. 한참 생각을 하고 난 후 지훈이는 증명이 '검산'해 보는 것이라고 하였다. 이것으로 지훈이가 증명을 사고실험 과정으로 보는 준경험주의적인 경향으로도 인식하고 있음을 알 수 있었다. 반면, 영재는 증명의 필요성에 대한 질문에서도 '참과 거짓을 판단하는 근거'로 증명을 인식하였다. 영재는 증명을 연역주의로 보는 일관된 모습을 보이고 있었다.

영재는 사전 설문 조사에는 증명이 필요하지 않다고 했었다. 그러나 면담에서는 어려운 명제에 대해서는 증명이 필요하다고 하였다. 지훈이는 사전설문 조사에서 '이해가 쉽기 때문에' 증명이 필요하다고 하였다. 하지만 두 학생은 명백한 명제에 대한 증명의 필요성은 잘 모르겠다고 하였다. 이것은 두 학생 모두 증명의 필요성에 대해서 확실히 인식하지 못하고 있음을 보여준다.

두 학생은 이미 증명에 대해 학습한 경험이 있기 때문에 증명에 대해 기본적으로 연역적인 사고를 가지고 있었다. 영재는 일관되게 연역적인 사고로 증명을 인식하고 있는 반면, 지훈이는 증명을 사회적 구성주의, 준경험주의적으로도 인식하고 있었다. 또한, 증명의 필요성에 대해서 분명하게 인식하지 못하고 있었으며, 명백한 명제의 증명에 대한 필요성을 모르겠다고 하였다.

3. 경험적 확인과 연역적 증명에 대한 인식

가. 역사·발생적 전개에 따른 수업 전

다음은 역사·발생적 전개에 따른 수업 전의 대화내용 중 일부이다.

지 훈 : 어떤 사람이 보고 있으면 그건 증명한 거 같애요. (중략) 실제로 해보는 것을 보면은 그 사람도 보면서 그게 밑각이 같다는 것을 알게 되잖아요.

영 재 : 제 경우에는요. 아니요. 아무리 그래봤자요. 아무소용이 없다. 게다가요. 3000개를 모두 했다고 해도요. 수학이라는게 가능성이 있는게 0.0001%라도 정답일 가능성이 있어요.

'이등변삼각형의 밑각의 크기를 측정한 것이 이등변삼각형의 두 밑각이 같다는 것을 증명했다고 생각하느냐?'라는 질문에 지훈이는 '예'라고 답을 하였고, 영재는 '아니요'라고 하였다. 지훈이는 측정과 같은 경험적인 확인도 증명이 될 수 있다고 한 반면, 영재는 경험적 확인은 아주 작을지라도 또 다른 가능성이 분명 존재하기 때문에 증명이라고 할 수 없다고 하였다.

여기서, 지훈이는 증명의 의미에 대한 인식 조사에서 증명 과정이 유일하다고 답을 하였고, 마지막 문항에 형식적인 증명 방법을 택하였는데, 면담에서는 형식적인 증명 방법 이외에 경험적인 확인 또한 증명이 될 수 있다고 답을 하고 있다. 또, 다음 대화내용에서도 지훈이는 증명 방법이 유일하지 않다고 생각하는 사실을 알 수 있다.

연구자 : 둘 다 수학에는 정답이 하나라고 생각해?

지 훈 : 푸는 방법은 여러 가진데, 답은 하나라고 생각해요.

위 대화들을 통해 지훈이가 증명에 대한 인식이 분명하지 않음을 알 수 있었다.

따라서 지훈이에게 경험적인 확인이 증명이 될 수 없다는 사실을 인식시킬 필요가 생겼다. 그래서 '3000개 말고 또 다른 이등변삼각형을 누군가가 가지고 왔을 때는 어떻게 해야 할까?'라는 발문을 지훈이에게 하였다. 지훈이의 답은 아래와 같다.

연구자 : 만약에 지훈아. 3000개의 이등변삼각형을 측정했자나. 근데 그 3000개 말고, 또 다른 누군가가 가지고 왔어. 이등변삼각형을. 그랬을 경우에는 어떻게 되는 거지?

지 훈 : 갖고 오니까 이것도 밑각이 같냐고 물어보면, 딱 누가 보니까 측정을 할 수 있잖아요. 그때는.
근데 계속 측정하기는 힘들 수도 있으니까...

지훈이의 목소리는 처음에는 자신에 찬 목소리였지만, 뒤로 갈수록 점점 작아졌다. 이것은 자신의 대답에 문제가 있음을 인식하는 과정이라고 사료된다. 즉, 지훈이는 계속되어지는 경험적인 확인에는 한계가 있음을 인식하게 되었다.

나. 역사·발생적 전개에 따른 수업 중

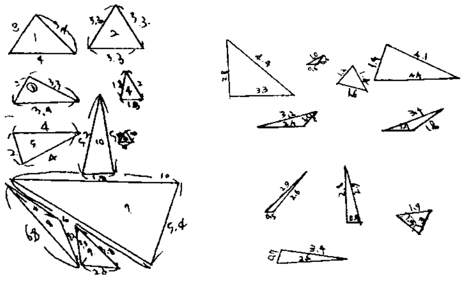
역사·발생적 전개에 따른 수업에서의 학생

들의 반응과 대화 내용들을 통하여 학생들의 생각을 알아보고자 하였다.

Branford는 특별한 경우로부터 귀납함으로써, 정의, 정리, 연산의 규칙을 스스로 발견하도록 해야 한다고 주장한다. 따라서 본 연구자는 실험적 단계에서 학생들이 스스로 피타고라스 정리를 발견 할 수 있도록 진행하였다.

피타고라스 정리는 특수한 삼각형(직각삼각형)의 세 변 사이의 관계를 나타내고 있다. 삼각형의 결정 조건이 삼각형의 세 변 사이의 관계를 나타내고 있기 때문에 삼각형의 결정 조건에서 학생들이 피타고라스 정리를 유추할 수 있도록 하기 위해, '세 변은 삼각형을 결정하는데 충분할까?'라는 발문을 시작으로 하여 삼각형의 결정 조건에 대하여 먼저 알아보았다.

첫 번째 활동은 학생들이 자유롭게 여러 모양의 삼각형 10개를 그리도록 하였고, 그 삼각형들의 변의 길이를 자로 측정하여 삼각형의 변 옆에 기록하도록 하였다.

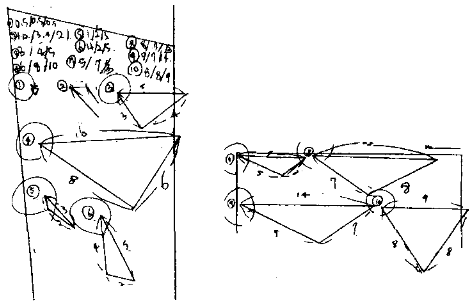


지훈 영재

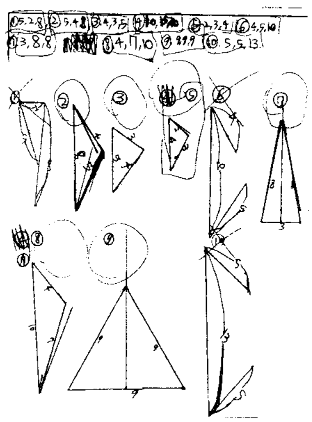
[그림 Ⅳ-2] 두 학생이 무작위로 그린 10개의 삼각형

영재는 예각 삼각형 3개, 둔각 삼각형 5개, 직각 삼각형을 2개를 작게 그렸다. 지훈이는 예각 삼각형 7개, 둔각 삼각형 3개를 다양한 크기로 그렸고, 직각 삼각형은 그리지 않았다.

두 번째로는 3개의 숫자를 한 쌍으로 하여 10쌍을 기록하도록 한 후, 그 숫자들로 삼각형을 그려보도록 하였다. 영재와 지훈이는 3개의 숫자를 가지고 삼각형을 그릴 때, 될 것 같은데 안 되는 경우에 안타까워하였고, 각을 여러 번 수정을 해가면서 삼각형을 만들었다.



[그림 Ⅳ-3] 지훈이가 기록한 숫자와 삼각형 그림



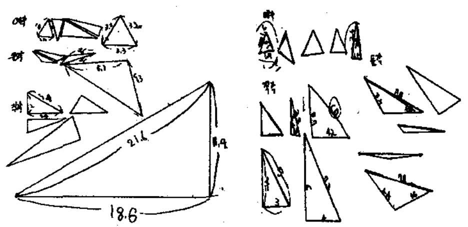
[그림 Ⅳ-4] 영재가 기록한 숫자와 삼각형 그림

영재가 그린 10개의 삼각형 중에는 ①, ⑥, ⑩이 삼각형이 되지 않았고, 지훈이의 삼각형 중에는 ②가 삼각형이 되지 않았다. 학생들은 이 네 가지 경우와 다른 삼각형들을 비교하여 삼각형의 결정조건이 '세 변 a, b, c 중 가장 긴 변을 a라고 하였을 때, $a < b + c$이다.' 라는 사실을 발견하였다.

학생들은 삼각형의 결정 조건을 발견 한 후, "이거 아는 건데."라는 말을 하였다. 이미 알고

있는 사실이었지만, 두 학생 모두 삼각형을 그리는 활동에서 이 사실을 적용하지 못하였다. 그렇지만, 직접 측정 활동을 통하여 스스로가 발견을 한 사실이었기 때문에 즐거워하고 뿌듯해 하였다.

실험적 단계의 마지막 활동으로는 예각 삼각형, 둔각 삼각형, 직각 삼각형을 5개씩 그려보고 그 중 각각 2개씩 골라 변의 길이를 측정하였다([그림 Ⅳ-5]). 학생들이 측정한 삼각형의 세 변을 예각, 둔각, 직각삼각형으로 나누어 칠판에 기록하였다.



지훈 영재

[그림 Ⅳ-5] 두 학생이 그린 예각, 직각, 둔각 삼각형

이 숫자들로 예각삼각형, 둔각삼각형, 직각삼각형 일 때에 따라 세 변 사이의 관계가 어떻게 되는지 살펴보도록 하였다. 다음은 측정한 삼각형 변의 길이들을 연산하면서 나누었던 대화내용이다.

연구자 : 이것들은 모두 삼각형이었으니까 저 조건(삼각형의 결정 조건)은 모두 만족하겠다. 그렇지?
학생들 : 네.
연구자 : 그러면, 변들의 길이를 제곱을 하면 어떻게 될까?
지 훈 : 예각삼각형에서요?
연구자 : 응. 한번 해보자. 계산기 있어?
지 훈 : 네.
연구자 : 처음에 1.8, 1.8, 1.5 나왔네. 이거 한번 제곱 해보자.
연구자 : 2.56. 1.5의 곱은 2.25겠네. 이거(삼각형의 결정조건)랑 비슷하게 한번 더해봅시다. 그러면 어떻게 되나요?
지 훈 : 5.49
연구자 : 이거(두번째 예각삼각형)는?
지 훈 : 4.81
연구자 : 이번에는 둔각삼각형. 가장 긴 변이 3.6이네. 제곱!
지 훈 : 3.6이요? 12.96. 그 다음은 6.76. 그 다음에 1.21.
연구자 : 또 다른 거는?
지 훈 : 7의 제곱은 49, 그 다음에 3.4 제곱은 11.56, 다음은 20.25.
연구자 : 그럼 이제 합해보자.
지 훈 : 첫 번째 거는 7.97, 두 번째는 31.81
연구자 : 그 다음에 직각삼각형. 그 전에 직각삼각형에 직각이 맞는지 각도기로 확인해 보자.
지 훈 : 직각 맞을 거예요. 여기(자의 꼭지점 부분) 대고 그렸어요.
지 훈 : 가장 긴 변이 15.21, 그 다음이 11.56, 다음이 4.
영 재 : 그 다음에 3, 4, 5 해요.
지 훈 : 9, 16, 25.
연구자 : 예각삼각형부터 봅시다. 두 변을 합한 값이 5.49니까, 가장 긴 변을 제곱한 것 보다 어떻지?
영 재 : 커요.
연구자 : 그러네. 다른 예각삼각형도 볼까? 합한 값이 더 크네?
지 훈 : 네.
연구자 : 그 다음에 둔각삼각형은?
지 훈 : 합한 것이 더 작아요.
연구자 : 그러네. 합한 것이 더 작네. 직각삼각형의 경우는 어떻게 될까? 한번 볼까? 두 변을 더한 값이 15.56이고, 가장 긴 변을 제곱한 값이 15.21 이네.
지 훈 : 어! 비슷하네.
연구자 : 어! 그러네. 3, 4, 5인 경우는 9하고 16을 더하면 25가 되네. 확실히 같아졌다. 그지?
지훈, 영재 : 네

위 대화내용에서 보는 것처럼 학생들은 자신이 그린 삼각형 변의 길이를 측정하고 그것들을 연산하여 예각삼각형일 때는 $a^2 < b^2 + c^2$, 둔각삼각형일 때는 $a^2 > b^2 + c^2$라는 사실을 발견하였다. 하지만 직각삼각형일 때는 $a^2 = b^2 + c^2$ 인 경우와 근사적으로 같아지는 경우가 있었다. 학생들은 직각삼각형일 때 세 변 사이의 관계가 근사적으로 $a^2 = b^2 + c^2$가 된다는 사실을 발견하였다.

다음은 역사·발생적 전개에 따른 수업 중 실험적 단계를 마친 후의 대화 내용이다.

연구자 : 우리가 6개의 직각삼각형으로 'a2=b2+c2 (a : 빗변의 길이)'라는 규칙을 찾았는데, 지금까지 한 것(자로 길이를 측정하고 계산한 것)을 증명이라고 할 수 있을까?
지 훈 : 안돼요.
영 재 : 아~~ 슬프다.
연구자 : 왜 그렇지?
지 훈 : 소수점 때문에...
영 재 : 도구가 마땅치 않아서...

두 학생은 모두 실험적 단계에서 한 측정활동을 통해 규칙을 찾았지만 그 규칙이 '항상 참이다.'라는 것은 알 수 없다고 하였다. 그리고 그 이유가 학생들이 사용한 측정 도구로는 소수 첫째자리까지만 측정할 수 있었고, 계산과정에서도 근사하게 $a^2 = b^2 + c^2$이 나왔지만 정확히 일치하는 값이 나오지 않았기 때문이라고 하였다. 이로 인해서 학생들은 $a^2 = b^2 + c^2$이라는 사실을 확신하기 위해서 일반화 할 수 있는 증명이 필요하다는 사실을 인식하게 되었다.

4. 증명의 의미 이해

역사·발생적 전개에 따른 각 단계 중 일반성을 가지느냐 그렇지 않느냐에 따라 실험적 단계와 직관적 증명의 단계에서 나뉘어 진다. 이 단계를 따라 피타고라스 정리의 증명을 지도하였을 때, 이러한 방법이 증명의 의미를 이해하는데 어떠한 도움을 주는지 학생들과의 면담을 통해 알아보고자 하였다.

Branford는 기호나 축약이 학생 스스로가 어떤 축약을 제안할 준비가 되어 있거나 적어도 교사가 제공했을 때 그것의 이점을 평가할 정도로 필요성을 깊이 느끼기 전까지는 도입되어서는 안 된다고 주장한다. 그렇기 때문에 직관적 단계에서는 실험적 단계에서 근사적으로 발견한 $a^2=b^2+c^2$이라는 규칙을 기호를 사용하지 않고 그림을 통해 시각적으로 확인 해보았다. 연구자는 학생들에게 고대 그리스 시대 사람들이 토지 측량을 하기위해 이러한 활동을 하였음을 소개하고, '서로 다른 두 정사각형의 넓이의 합과 같은 정사각형을 만들기'를 학생들과 함께 그림을 그려 확인을 해보았다. 그리고 인터넷을 이용하여 여러 가지 피타고라스 정리의 증명 방법 중 넓이와 연관이 있는 Euclid의 증명방법을 보여주었고, [그림 Ⅳ-1]과 같은 순서로 서로 다른 두 정사각형의 넓이가 큰 정사각형의 넓이의 합과 같아지는 과정을 시각적으로 확인하였다. 이것을 보면서 학생들은 신기해하였다. 그리고 기호를 사용하지 않았지만, 그림은 일반적인 경우를 대표하기 때문에 실험적 단계보다는 일반성을 가지고 있다고 할 수 있다.

연구자 : 방금 한 것은 증명이라고 할 수 있을까?
지 훈 : 될 것 같아요.
영 재 : 반반이요. 될 것 같지만, 수학적으로는 아니에요. 기호로 나타내지 않았기 때문에 증명이 아닐 것도 같아요.

위는 직관적 단계를 마치고 나누었던 대화내

용이다. 두 학생 모두 직관적 단계의 증명방법이 증명이라고 할 수 있을 것 같다고 하였다. 하지만 영재는 기호를 사용하지 않았기 때문에 증명이 아닐 것도 같다고도 하였다. 이것은 실험적 단계 보다는 직관적 단계의 증명이 일반성을 가지기 때문에 증명이라고 인식되고 있음을 알 수 있다. 또한, 증명을 이전 학년에서 학습하였기 때문에 증명에는 기호가 사용되어야 한다는 생각을 이미 가지고 있었다.

마지막 형식적 단계에서는 직관적 단계의 증명과 [그림 Ⅳ-1]의 과정을 통해 학생들에게 자연스러운 것이 된 그림4)을 사용하였다. 이 단계에서는 그림에 보조선을 긋고, 기호를 사용하였다. 기호를 사용하기 시작하자 학생들은 약간의 거부반응을 보였다.

연구자 : 이제는 기호를 써서 한번 증명 해보자.
지 훈 : 헉!
영 재 : 아~이런..

하지만, 학생들은 발견하였던 규칙에 일반성이 필요하다는 것을 알고 있었기 때문에 학생들에게 연역적 증명을 지도 하였다. 연역적 증명을 시작하기 전에 거부반응을 보였던 학생들에게 연역적 증명이 끝난 후에 다시 대화를 나누어 보았다.

연구자 : 이 증명이 어려웠어?
영 재 : 아니요. 어렵지는 않은데요. 선도 많고, 기호를 쓰니깐 복잡해 보여요.
지 훈 : 저도요. 증명 과정이 어렵지는 않아요. 좀 전에 했던 거 있잖아요. 거기에서 작은 거 두 개 합하면 큰 거랑 같다고 했으니까...

직관적 단계를 마친 후 기호가 증명을 할 때 필요하다는 것은 인식하였지만 형식적 단계에서는 보조선이 많고, 기호가 많이 사용되었기 때문에 증명이 복잡하다고 느끼는 것 같았다. 하지만 직관적 단계에서의 증명이 연역적 증명을 이해하는데 도움이 되었다고 말하고 있다.

영 재 : 음... 역시나 이거는(연역적 증명) 어려워요. 차라리 이것이(직관적 증명) 더 좋아요.
지 훈 : 저도요. 이거는(직관적 증명) 그냥 받아들여졌는데, 이거는(연역적 증명)... 좀... 그래요.

두 학생은 형식적 단계의 연역적 증명보다 직관적 단계의 증명이 피타고라스 정리를 이해하는데 더 쉬웠다고 하였다. 그 이유는 연역적 증명에 사용되었던 보조선과 기호가 그림을 복잡하게 하였기 때문이다. 기호의 사용이 준비되지 않은 상태에서 진행되는 증명의 도입이 증명을 어렵게 만드는 요인이 된 것으로 보인다.

다음은 역사·발생적 전개에 따른 수업을 마친 후 나누었던 대화이다.

연구자 : 증명이 어떤 거다라는 생각이 들었어?
영 재 : 왜 그런가. 왜라는 질문에 답을 하는 거요. 증명의 첫 시작은 '왜'인 것 같아요. 증명은요 이러한 공식에 대해 분명히 밝히는 역할을 하잖아요. 그리고요. 증명이 필요하지 않을 때도 있다고 생각했는데, 지금은 꼭 필요한 것 같아요.
지 훈 : (끄덕끄덕)

영재와 지훈이는 역사·발생적 전개에 따른 수업을 하기 전에 증명의 필요성에 대해서 확실히 인식하지 못하고 있었고, 명백한 명제에 대한 증명의 필요성을 잘 모르겠다고 하였었

4) Clairaut (2006)의 《끌레로의 기하학원론》(장혜원, 역)에서 '직각삼각형의 빗변을 한 변으로 하는 정사각형은 다른 두 변을 각각 한 변으로 하는 두 정사각형의 합과 같다.' 내용에 나오는 그림

다. 하지만 이 수업을 마친 후, 경험적 확인은 일반성을 가지고 있지 않기 때문에 증명이라 할 수 없다는 것을 인식하였고, 경험적 확인과 직관적 단계의 증명의 차이를 분명히 인식하게 되었다. 이를 통해 모든 명제에 대해 증명이 반드시 필요하다는 사실도 확실히 인식하게 되었다.

Ⅴ. 결론 및 제언

이 논문은 증명의 의미 지도에 대한 연구로서, Branford의 역사·발생적 기하교육을 이론적 배경으로 하여 증명의 의미 지도에 대한 방안을 모색하고자 하였다. 이에 Branford의 역사·발생적 기하교육을 활용하여 피타고라스 정리의 증명을 실제로 지도하여, 사례연구 과정에서 나타나는 학생들의 인식의 변화를 살펴보고, 이러한 방법이 학생들의 인식 변화에 어떠한 도움을 주는지에 대해 알아보고자 하였다.

다음은 사전 설문 조사를 통하여 중학교 3학년 학생들의 증명에 대한 인식을 알아본 결과이다.

첫째, 학생들은 증명을 어려워하고 증명의 필요성에 대해 인식하지 못하고 있다. 증명에 대한 인식 조사에서 전체 응답자 중 58%의 학생들이 증명을 어려워하였다. 그리고 약 30%정도의 학생들만이 증명이 필요하다고 응답하였다. 또한, 증명이 필요한 이유에 대해서 답을 하지 못한 학생들이 있었고, '그렇게 배웠기 때문에'라고 응답한 학생도 있었다. 증명이 필요하지 않다고 응답한 학생 중에는 '쉬운 명제에 대해서는 증명이 필요하지 않다'라고 한 경우도 있었다. 이것으로 보아 학생들은 증명의 필요성에 대하여 분명히 인식하지 못하고 있음을 알 수 있었다.

둘째, 증명 방법의 유일성에 대한 학생들의 인식은 불분명하였다. 증명 방법의 유일성에 대해서 '유일하다'라도 응답한 학생은 26%, '유일하지 않다'라도 응답한 학생은 61%였다. 하지만, '유일하지 않다'고 응답한 학생들 중 47%의 학생들은 올바르다고 생각하는 증명방법을 중복하여 택할 수 있게 한 문항에서 한 가지의 증명 방법만을 택하였다. 또한, 증명 방법이 '유일하다'고 답한 학생들 중 13%가 위의 문항에 중복하여 답을 택하였다. 이것은 증명에 대한 학생들의 인식이 아직 불분명하다는 사실을 보여준다.

셋째, 학생들은 증명과 관련된 여러 유형의 문항 중 괄호 채우기는 쉽게 해결하였다. 괄호 채우기 유형은 학생들이 수업시간에 선생님께서 해주신 증명 과정을 바탕으로 하여 증명을 암기하거나 이해하는 증명 학습 방법과 관련이 있다. 또한, 괄호 채우기 유형은 학교 시험에 다양한 형태로 자주 출제되는 유형이기 때문에 학생들에게 익숙하다. 따라서 학생들은 이러한 유형의 문제는 다수의 학생들이 잘 해결하였다.

넷째, 학생들은 익숙하지 않은 명제에 대해서는 가정과 결론으로 나누지를 못하였다. 증명을 학습하기 전에 명제 단원에서 다양한 명제들을 가정과 결론으로 나누는 연습을 한다. 그러나 명제 단원에서는 '~이면 ~이다.'인 모양의 명제만 다루고 있다. 이로 인해 학생들은 '~이면 ~이다.' 형태의 명제는 가정과 결론으로 잘 나누지만, 그렇지 않은 경우에는 가정과 결론으로 잘 나누지 못하였다.

다섯째, 증명 과정 서술하기 유형의 문항은 다수의 학생들이 해결하지 못하였다. 학교수업에서 학생들은 교사가 하는 증명을 모방하여 증명을 학습하고, 암기하거나 이해를 한다. 하지만 스스로 증명을 해보는 학생은 드물다. 그

리고 증명 과정 서술하기 유형의 문제는 학교 시험에도 잘 나오지 않는 유형이다. 그 결과 증명 과정 서술하기 유형의 문제는 학생들이 해보려고 시도조차 하지 않는 경우가 대부분이었다.

전체 응답자 중 수학에 흥미가 있고 기본적인 증명능력은 있지만, 증명을 어려워하고 증명 문제를 해결하는 과정에서 차이를 보인 두 학생을 대상으로 사례연구를 진행하였다.

이 연구의 연구문제 1은 증명의 의미에 대해 중학생들은 어떻게 이해하고 있는지 알아보기 위한 것으로 그 결론은 다음과 같다.

첫째, 연구대상자 두 학생은 증명의 의미에 대해 기본적으로 연역적인 사고를 가지고 있다. 이것은 중학교 2학년 과정에서 명제와 증명에 대해 이미 학습을 하였기 때문인 것으로 보인다. '설명' 또는 '근거'라는 표현에서 학생들이 다른 사람을 확신시키거나 이해시키기 위한 설명으로 증명을 인식하는 연역적 사고를 가지고 있음을 알 수 있었다.

둘째, 연구대상자 두 학생은 증명의 의미에 대해 다양한 관점으로 인식하고 있다. 기본적으로 증명을 Euclid 체계를 따른 연역적 사고로 보는 한편, 학생들은 대화 중 증명에 대해 '누군가 보면'이나 '검산' 등과 같은 단어를 사용하고 있다. 이것은 다른 사람이 인정하는 것만을 진정한 증명으로 인정하는 사회적 구성주의, 증명을 사고실험의 과정으로 보는 준경험주의적으로도 인식하고 있었다.

셋째, 중학생들은 증명의 필요성에 대하여 분명히 인식하지 못하고 있다. 사전 조사에서는 증명이 필요하다고 하였지만 면담에서는 쉬운 명제에는 증명이 필요하지 않다고 답을 하는 경우가 있었다. 또한, 명백한 명제의 증명에 대해서는 필요성을 잘 모르겠다고 하였다.

이 연구의 연구문제 2는 경험적인 확인과 연역적 증명에 대하여 중학생들이 어떻게 인식하는지를 알아보기 위한 것으로 그 결론은 다음과 같다.

첫째, 학생들은 경험적인 확인도 증명이라고 인식하고 있다. 학생들은 사전 면담에서 경험적 확인과 연역적 증명이 모두 증명이 될 수 있다고 답을 하였다. 하지만 '3000개 말고 또 다른 이등변삼각형을 누군가가 가지고 왔을 때는 어떻게 해야 할까?'라는 발문을 하였을 때, 경험적인 확인의 한계를 인식하였다.

이 연구의 연구문제 3은 역사·발생적 전개에 따른 증명 지도 방법이 증명의 의미를 이해하는데 어떠한 도움을 주는지 알아보기 위한 것으로 그 결론은 다음과 같다.

첫째, 학생들은 Branford의 역사·발생적 전개에 따른 수업을 통해 경험적인 확인이 증명이 될 수 없다는 것과 연역적 증명이 반드시 필요하다는 사실을 분명히 인식하였다. 수업 전에는 경험적인 확인도 증명이라 할 수 있다고 하였었다. 하지만 실험적 단계의 활동을 통해 근사적으로 $a^2=b^2+c^2$이라는 사실은 발견하였지만, 정확히 일치하지는 않았기 때문에 경험적인 확인을 증명이라 할 수 없다고 인식하였고, 연역적인 증명의 필요성을 인식하게 되었다. 이와 더불어, 학생들은 '증명은 어떠한 공식을 분명히 밝히는 것이기 때문에 증명이 꼭 필요하다'라고 하였다. 즉, 명백한 명제에 대한 증명에 대해서도 증명이 필요하다는 것을 인식하게 되었다.

둘째, 역사·발생적 전개에 따른 수업에서 직관적 단계의 증명은 학생들에게 증명의 의미에 대한 인식의 전환을 가져오게 하였다. 역사·발생적 전개를 따른 수업을 통해 경험적인 확인에는 한계가 있음을 인식하였다. 또한, 경험적 확인과 직관적 단계와의 경계를 분명히 함으로써 정리에는 예외가 없음을 인정하고,

증명은 일반성을 가져야 한다는 사실을 인식하게 되었다.

셋째, 직관적 단계의 증명이 연역적 증명을 이해하는데 도움이 되었다. 학생들은 역사·발생적 전개에 따른 수업을 진행하는 중에 직관적 단계의 증명은 쉽게 수용하였다. 형식적 단계인 연역적 증명은 논리적으로 이해가 되고 기호를 사용하여 증명을 해야 한다는 필요성도 느끼지만, 기호의 사용과 많은 보조선이 학생들에게 거부감을 일으켰다. 기호사용에 대해 학생들이 준비 되지 않은 상태에서 증명이 도입 되는 것이 증명을 어렵게 만드는 요인이 되었다. 하지만 직관적 단계의 증명을 통해 초보적인 수준으로라도 개념의 정의, 성질, 함의관계, 일반성이 확보된 명제 사이의 상호관련성을 인식 시킨 것이 연역적 증명을 이해하고 수용하는데 도움이 되었다.

본 연구의 결론을 바탕으로 다음과 같은 제언을 하고자 한다.

첫째, 역사·발생적 기하교육을 활용한 수업에서 초보적 수준의 직관적 단계의 증명이 연역적 증명 과정을 수용하는데 도움을 주었다. 따라서 학교 현장에서도 연역적 증명을 도입하기 이전에 직관적 단계의 증명을 사용하여 학생들에게 함의관계에 대해 먼저 이해시키는 것이 증명 지도의 하나의 방법이 될 수 있겠다.

둘째, 본 연구는 역사·발생적 전개를 활용하여 '피타고라스 정리'의 증명을 지도하였지만, 수학의 다른 영역에서도 활용할 수 있을 것이다.

참고문헌

권석일(2006). **중학교 기하 교재의 '원론' 교육적 고찰**. 서울대학교 대학원 박사학위 논문

김남희·나귀수·박경미·이경화·정영옥·홍진곤(2006). **수학교육과정과 교재연구**. 서울: 경문사

나귀수(1998). **증명의 본질과 지도 실제의 분석 - 중학교 기하 단원을 중심으로**. 서울대학교 대학원 박사학위논문

류성림(1993). **중학생의 기하 증명 능력과 오류에 대한 연구**. 한국교원대 석사학위논문

민세영(2002). 역사발생적 **수학 학습-지도 원리에 관한 연구**. 서울대학교 대학원 박사학위논문

박은조·방정숙(2005). 수학 교사들의 증명에 대한 인식. **한국학교수학회논문집** 8(1). pp.101-116

서동엽(1992). **증명 지도에 관한 연구**. 서울대학교 석사학위논문

______(1998). **증명의 구성 요소 분석 및 학습-지도 방향 탐색**. 서울대학교 박사학위논문

우정호(1994). 증명지도의 재음미. **대한수학교육학회지 논문집** 4(1)

______(1998). 학교수학의 교육적 기초. 서울: 서울대학교 출판부

우정호·권석일·박미애(2003). 역사발생적 수학교육 원리에 대한 연구(1)-증명의 의미 지도의 역사발생적 전개. 대한수학교육학회지 학교수학 5(4). pp.401-420

우정호·민세영·정연준(2003). 역사발생적 수학교육 원리에 대한 연구(2)-수학사의 교육적 이용과 수학교사 교육. **대한수학교육학회지 학교수학** 5(4). pp.555-572

윤미영(2005). **중학교 수학의 증명지도에 관한 연구**. 대구카톨릭대학교 대학원 석사학위논문

이종우(1998). **기하학의 역사적 배경과 발달**. 서울: 경문사

이준열 외 4명 공저(2006). **중학교 수학 8-나**.

서울: (주)도서출판 디딤돌
Harold P. Fawcett 지음. 장경윤 · 류현아 · 한세호 옮김(2006). **증명의 본질.** 서울: 경문사
장혜원(2003). Clairaut의 <기하학 원론>에 나타난 역사발생적 원리에 대한 고찰. 대한수학교육학회지 **수학교육학연구** 13(3). pp.351-364
조완영 · 권성룡(2001). 학교 수학에서의 '증명'. **대한수학교육학회지 수학교육학연구** 11(2). pp.385-402
National Council of Teachers of Mathematics (2000). Principles and Standards for School Mathematics. Reston, VA: The Autho

Teaching of the Meaning of Proof Using Historic-genetic Approach - based on Pythagorean Theorem -

Song, Yeong Moo (Sunchon National University)
Lee, Bo Bae (Geaduate School,Sunchon National University)

We collected the data through the following process. 36 third-grade middle school students are selected, and we conducted ex-ante interviews for researching how they understand the nature of proof. Based on the results of survey, then we chose two students we took a lesson with the Branford's among the 36 samples. After sampling, historic-genetic geometry education, inspected carefully whether the Branford's method helps the students.

* key words : historic-genetic approach(역사발생적 전개), teaching of the meaning of proof(증명의 의미 지도)

논문접수 : 2008. 10. 29
논문수정 : 2008. 12. 1
심사완료 : 2008. 12. 9

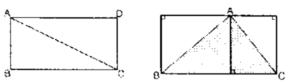
(부록 1) 증명에 대한 인식조사 설문지

1. 증명이 어렵다고 생각합니까?
   ① 매우 그렇다 ② 그렇다 ③ 보통이다
   ④ 그렇지 않다 ⑤ 전혀 그렇지 않다

2. 도형의 성질들을 증명할 때 증명 과정이 필요하다고 생각합니까?
   ① 매우 그렇다 ② 그렇다 ③ 보통이다
   ④ 그렇지 않다 ⑤ 전혀 그렇지 않다
   왜 그렇게 생각합니까?
   ____

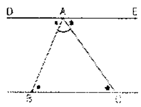
3. 명제가 참임을 증명하는 방법이 유일하다고 생각하는가?
   (예 , 아니오)
   왜 그렇게 생각하는가?

4. 다음은 "삼각형의 세 내각의 합은 180°이다."라는 명제가 참임을 증명한 것이다. 다음 방법 중 자신이 생각하는 올바른 증명 방법은? (중복선택 가능)
   ① 여러 가지 다른 모양의 삼각형의 각을 각도기로 재어보았더니, 세 내각의 합이 180°가 되었다. 그러므로 "삼각형의 세 내각의 합은 180°이다."라는 명제는 참이다.
   ②



직사각형은 두 개의 직각삼각형으로 이루어져있다. 직사각형의 내각의 합은 360°이므로 한 개의 직각삼각형의 내각의 합은 180°이다.
또한, 모든 $\triangle ABC$는 두 개의 직각 $\triangle ABD$와 직각 $\triangle ADB$로 나누어 나타낼 수 있다. $\triangle ADB$와 $\triangle ADC$는 직각삼각형이므로 내각의 합은 각각 180°이다. 그리고 $\angle ADB = 90° = \angle ADC$ 이므로 $\angle ABD + \angle BAD = 90°$ 이고 $\angle ACD + \angle CAD = 90°$이다.
따라서 $\triangle ABC$의 내각의 합은 180°이다.

③

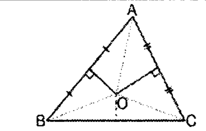


$\triangle ABC$에서 변BC와 평행하고 점A를 지나는 선분을 그리자. 그러면 $\angle DAB + \angle BAC + \angle EAC = 180°$이다. 그런데, $\angle DAB = \angle ABC$, $\angle EAC = \angle ACB$ (∵엇각)
이므로, $\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = 180°$이다.
즉, $\triangle ABC$의 내각의 합은 180°이다.

(부록 2) 1차 증명 능력 테스트

2. 다음은 삼각형 ABC의 세 변의 수직이등분선은 한 점에서 만남을 다음 순서에 따라 증명하여라.

(1) 왼쪽 그림을 보고 주어진 명제를 가정과 결론으로 나누어라.

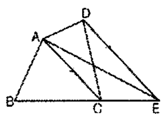


$\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$의 중점을 각각 D, E, F라고 하자. 그러면

$\overline{AD} = \overline{DB}$, ______ , ____

(결론) ____________________

4. 다음 그림에서 $\overline{AC} // \overline{DE}$일 때, $\square ABCD$와 $\triangle ABE$의 넓이가 같음을 증명하여라.

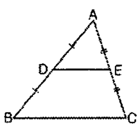


(증명)

____

____

6. 다음 그림과 같이 $\triangle ABC$에서 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$의 중점을 각각 D, E라고 할 때, 다음을 증명하여라.



(1) $\overline{BC} // \overline{DE}$

____

(2) $\overline{DE} = \frac{1}{2}\overline{BC}$

____

(부록 3) 2차 증명 능력 테스트

7. $\angle A = 90°$인 직각삼각형 ABC의 꼭지점 A에서 빗변에 내린 수선의 발을 H라고 할 때, $\triangle ABC \backsim \triangle HAC$임을 증명하여라.

[증명]

____

____