韓國數學教育學會誌 시리즈 C
<初等數學敎育>
2008. 11. 제 11권, 제 2호, 105-119

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. C:
Education of Primary School Mathematics
Nov. 2008, Vol. 11, No. 2, 105-119

초등학교 3학년 학생들의 함수적 사고 분석

김 정 원 (대전서원초등학교)
방 정 숙 (한국교원대학교)

함수적 사고(functional thinking)는 대수적 사고의 주요 요소로써 둘 또는 그 이상의 다양한 양들 사이의 관계에 초점을 두는 사고이다. 본 연구는 초등학교 3학년을 대상으로 함수적 상황을 제시하여 학생들이 함수와 관련된 대수적 사고를 어떻게 구성해 나가는지를 면밀하게 분석하였다. 연구 결과 학생들은 함수적 상황을 잘 이해하고 있을 뿐만 아니라 서술, 그림 등을 사용하여 양들의 대응 값에 대한 기록을 창안할 수 있었다. 그러나 학생들은 패턴을 찾고 일반화하는 활동에서 여러 가지 어려움을 겪었다. 본 논문은 이와 같은 연구 결과를 토대로 초등학교 저학년에서부터 학생들의 함수적 사고를 촉진시킬 수 있는 시사점을 탐색한다.

I. 시작하는 말

학교수학에서 산술과 대수는 오랫동안 초등수학과 중등수학을 대표하는 영역으로 자리 잡아 왔으며, 대수는 문자 기호를 도입하여 산술을 일반화하는 것으로 인식되어 왔다(김성준, 2004). 이러한 구분은 산술에서 대수로의 이행을 어렵게 하는 주요 원인이 되며, 대수를 문자 기호 도입의 측면으로만 파악하는 것은 산술과의 연결보다는 오히려 비약을 초래할 수 있다. 이에 1990년대 이후 많은 수학교육자들은 산술과 대수간의 연결 과정을 전반적으로 재검토할 필요가 있다는 의견을 제시하고 있다(Amerom, 2002; Boulton-Lewis, Cooper, Atweh, & Pillay, 1997; Kieran & Chalouh, 1999).

미국수학교사협의회(National Council of Teachers of Mathematics 〔NCTM〕, 2000)의 「학교수학을 위한 원리와 규준」에서는 모든 학생들은 대수를 배워야 하며 학교 교육을 통해 점차로 확장해 나아가야 한다고 강조하고 있다. 이는 대수 교육에 대한 장기적인 관점을 반영한 것으로, 대수를 고립된 하나의 과정으로 보는 것이 아니라 사고와 문제 해결의 한 부분으로 보는 것이라고 할 수 있다. Kaput(2008)은 유치원부터 12학년에 이르는 교육과정 전체에서 대수를 관련시키는 것은 학교 수학의 일관성, 깊이, 힘을 더할 수 있으며, 단절적이고 고립적이며 피상적인 고등학교 대수 과정을 강화시킬 수 있다고 강조해왔다.

Kaput(2008)에 의하면 초기 대수 교육은 기호조작이 아닌 사고의 대상으로써 대수를 다루어야 한다고 했다. 즉, 대수를 역사적으로 전해 내려온 문화적 산물로 보는 관점뿐만 아니라 인간의 활동으로 보는 관점을 더하여 대수적 추론을 강조해야 하는 것이다. Kaput은 대수의 세 가지 요소와 여기에 포함된 대수적 추론의 두 가지 핵심 양상을 정의했다. 대수의 세 가지 요소에는 (a) 산술의 일반화와 양적추론으로서의 대수, (b) 함수, 관계 그리고 이 변량 변수에 관한 연구로서의 대수, 그리고 (c) 대수적 활동으로서의 모델링이 있다. 두 가지 핵심 양상으로는 규칙성과 일반화를 기호화하는 것과, 관습적인 기호체계로 표현된 일반화를 구문론적으로 추론하고 조작하는 것이다.

이러한 대수적 사고의 개발을 위해서는 학생들이 가지고 있는 능력을 바탕으로 해야 한다. Mason(2008)에 따르면, 아동들은 대수적 사고를 위해 필요한 능력을 이미 가지고 있고 언어를 습득할 때부터 자연스럽게 발휘한다. 이러한 능력에는 상상하기와 표현하기, 초점 맞추기(focusing)와 초점을 바꾸기(defocusing), 구체화하기와 일반화하기, 추측하기와 확신하기, 분류하기와 특징 부여하기가 있다고 설명했다. 하지만 이러한 아동들의 능력은 자동적으로 발휘되는 것이라기보다는 표면화시켜 의도적으로 사용할 수 있게 해야 한다.

본 논문에서 집중적으로 탐색할 함수적 사고

* 접수일(2008년 11월 1일), 수정일(1차 11월 20일), 게재확정일(2008년 11월 23일).
* ZDM분류 : C32
* MSC2000분류 : 97C30
* 주제어 : 함수적 사고, 문제 해결, 대수적 사고, 초등수학교육, 사례 연구

(functional thinking)는 Kaput이 기술한 대수적 사고의 세 가지 요소 중 하나로 함수적 상황(functional situation)인 둘 또는 그 이상의 다양한 양들 사이의 관계에 초점을 두는 사고이다. 이는 특수한 관계들로부터 모든 예에 걸쳐 나타나는 바로 그 관계에 대한 일반화를 끄는 사고로 학생들이 다양한 양들 사이의 관계에 대한 일반화를 표현하기 위한 표현체제를 고안하거나 사용할 때 발생한다(Smith, 2008).

이러한 관점에서 볼 때 어린 학생들이라도 대수 및 대수적 추론을 할 수 있는 능력을 가지고 있으며 이러한 능력의 발현을 위해서 적절한 상황을 제시하는 것이 중요하다. 본 연구는 초등학교 3학년을 대상으로 함수와 관련된 상황을 제시하여 초등학생들이 함수와 관련된 대수적 사고를 어떻게 구성해 나가는지 면밀하게 분석한다. 최근 초등수학교육에서 대수적 사고에 관한 관심이 부각되어 왔지만, 학생들의 반응을 바탕으로 한 구체적인 연구물은 상대적으로 매우 부족한 실정이다. 이에 본 연구는 함수적 상황이 담긴 문제를 제시하고 두 양사이의 관계 및 규칙성을 탐구하고 일반화하는 과정에서 초등학생들이 변화하는 두 양을 확인하고 규칙성을 인식하는 방법의 특징, 함수적 상황을 말, 그림, 표 등으로 기록하는 방법의 특징, 이러한 기록에서 규칙을 찾고 확실성을 찾는 방법의 특징 등을 면밀하게 분석함으로써, 초등학교 학생들의 함수적 사고를 탐색하고자 한다. 구체적인 연구문제는 다음과 같다.

- 변화하는 두 양 사이의 관계를 이해하는 초등학교 학생들의 함수적 사고의 특징은 무엇인가?
- 변화하는 두 양 사이의 관계에 대한 기록을 창안하는 초등학교 학생들의 함수적 사고의 특징은 무엇인가?
- 변화하는 두 양 사이의 관계에 대한 패턴을 찾고 확실성을 가질 때 보이는 초등학생들의 함수적 사고의 특징은 무엇인가?

Ⅱ. 이론적 배경

1. 함수적 사고

함수적 사고란 둘 또는 그 이상의 다양한 양들 사이의 관계에 초점을 두는 사고로 특수한 관계들로부터 모든 예에 걸쳐 나타나는 관계에 대한 일반화를 이끄는 사고이다(Smith, 2008). 함수적 상황이란 두 변수 사이의 관계와 관련된 문제에 참여하는 상황이다. <표 1>은 Smith가 제안한 기본적인 함수적 사고의 여섯 가지 활동이다.

Carraher와 Schliemann(2007)은 어린 학생들을 위한 초기 대수는 전통적으로 다루어지는 대수와는 다소 다른 접근이 필요하다고 주장하면서 그 중 한가지로 함수를 도입하여 초기의 수학 주제와 활동에 많이 존재하는 대수적 특징을 배울 수 있는 기회를 제공해야 한다고 하였다. 이와 관련하여 연구자들은 구체적으로 만 9세 학생들을 대상으로 한 연구에서 어린 학생들이라도 함수적 관계를 찾아내고 대수적 표기법을 사용할 수 있다는 것을 밝힌다(Brizuela & Schliemann, 2004)

함수는 더 높은 수준의 수학을 뒷받침하고 산술 과정을 좀 더 이해하는데 도움이 되며, 특히 덧셈과 뺄셈이나 곱셈과 나눗셈 사이의 역연산 관계를 이해하는데 도움이 된다(Warren, Cooper, & Lamb, 2006). 함수는 대수식 이외에도 다양한 방식으로 표현될 수 있으며, 여기에는 구어적 서술뿐만 아니라 그래프, 표, 화살표 도식 등이 있다. Malara와 Navarra(2003)은 이러한 표현 중 초등학교 수준에서의 구어적 서술을 ‘대수적인 중얼거림(algebraic babbling)’이라 불렀으며, Warren 외(2006)는 이것을 중등학교에서 정교한 수학

<표 1> Smith(2008)가 제안한 기본적인 함수적 사고 6가지

함수적 상황의 문제에 참여하기	1. 몇몇 유형의 물리적인 활동 또는 개념적인 활동에 참여하기
	2. 이러한 활동 과정에서 변화하는 둘 또는 그 이상의 양을 확인하고 이들 두 변수 사이에서의 관계에 초점을 맞추기
기록 창안하기	3. 이 양들에 대응하는 값을 (전형적으로 표, 그래픽 표현, 그림 표현 등으로) 기록하기
패턴과 수학적 확실성 찾기	4. 이 기록에서 패턴 확인하기
	5. 활동을 행함에 따라 변화하는 패턴을 확인해 정돈하기
	6. 관계 속에서 확인된 패턴의 표현을 창안하기 위해 정돈한 내용 이용하기

적 언어를 사용하기 위한 선구자로 여기기도 하였다.

2. 초등학교 교육과정에서의 함수적 사고

가. NCTM 규준에서 강조하는 내용

「학교수학을 위한 원리와 규준」에서는 모든 학생들은 대수를 배워야 한다고 주장하면서 유아원·유치원~12학년 학생들이 할 수 있어야 할 대수 규준을 제시하고 있다. 그 중 함수와 관련된 부분을 살펴보면 다음과 같다.

- 규칙성, 관계, 함수를 이해할 수 있다.
- 수학적 모델을 활용하여 양 사이의 관계를 표현하고 이해할 수 있다.
- 다양한 맥락에서 변화를 분석할 수 있다.

특히, 본 연구 대상을 고려하여 3학년부터 5학년을 위한 대수 규준 중 함수와 관련된 부분을 살펴보면, 다음과 같은 활동이 있다.

- 수 패턴과 기하 패턴을 알아내거나 만든다.
- 규칙성을 말로 기술하고 표나 기호로 나타낸다.
- 변하는 양들 사이의 관계를 탐구하여 적용하여 예측한다.
- 특정한 상황에서 성립한 내용을 일반화하여 설명한다.
- 그래프를 사용하여 규칙성을 기술하고 예측한다.
- 학생이 직접 발명한 표기법, 표준 기호, 변수를 사용하여 규칙성을 기술하고 일반화하고 상황을 설명한다.

3~5학년 학생들은 수 패턴과 기하 패턴을 탐구하고 문장이나 기호를 사용하여 수학적으로 표현해야 한다. 또한 패턴의 구조와 패턴이 증가하고 변화하는 방식을 분석하며, 분석 결과를 이용하여 패턴 속의 수학적 관계를 일반화하여야 한다. 특히 3학년 학생들은 주어진 예를 검토하여 후속 패턴을 예상할 수 있어야 한다.

나. 우리나라 교육과정에서의 함수 교육

최근 개정된 교육과정(교육인적자원부, 2007)에서는 대수와 관련된 '문자와 식' 및 '규칙성과 함수' 영역이 통합되어 '규칙성과 문제해결' 영역으로 바뀌었다. 이 중 대수적 사고와 관련하여 선행 연구에서(예, 김성준, 2004; 최지영, 방정숙, 2008) 주로 분석한 단원이 "문제 푸는 방법 찾기" 이므로, 본 연구에서도 이 단원을 중점적으로 함수와 관련된 문제들을 분석해 보았는데, 그 결과는 <표 2>와 같다. 교과서에 제시된 문제들은 학생들 스스로 두 양 사이의 관계를 찾기보다는 주어진 상황을 자세하게 그림이나 식, 표, 서술 등으로 안내하여 해결하도록 하였다.

III. 연구 방법 및 절차

1. 연구 방법

본 연구에서 적용한 방법론은 질적 사례연구이다. 본 연구의 목적은 학생들이 함수적 상황의 문제를 해결할 때 함수적 사고를 어떻게 하는지에 관심을 두기 때

<표 2> 함수와 관련된 교과서 문제

학년	단계	문제	내용	표현
3	나	바둑돌 문제	• 정사각형의 크기 - 필요한 바둑돌의 개수 사이의 관계	그림
4	가	정사각형 둘레에 꽃 놓기	• 한 변에 놓는 꽃의 수에 따른 전체 꽃의 개수 사이의 관계	그림, 식
	나	테이프 자르기	• 자른 횟수와 색 테이프 도막의 수 사이의 관계	그림, 표
		대응표	• 대응표를 보고 □와 △의 덧셈적, 곱셈적 관계 찾기	표
5	가	오목대회	• 학생 수와 오목 경기 횟수 사이의 관계	서술
		실 자르기	• 자른 횟수와 실 도막의 관계	그림
		연꽃 늘어나기	• 시간과 연꽃의 개수사이의 관계(매일 2배씩 증가)	서술
	나	선 잇기	• 그림에서 직선의 수와 만나는 점의 수사이의 관계	그림, 표
6	가	식탁문제	• 식탁의 수와 앉을 수 있는 사람의 수 사이의 관계	그림, (빈)표
	나	발야구 문제	• 학생 수와 발야구 경기 횟수 사이의 관계	그림

문에 사례연구를 선택하였다. 문제를 얼마나 이해하는지, 변하는 두 양을 찾아내고 두 양사이의 관계에 주목할 수 있는지, 발견한 일반화를 어떻게 표현하는지, 이러한 과정에서 학생들이 범하는 오류 및 인지적 장애는 무엇인지를 자세히 분석하는 것이므로 사례연구가 적합하다고 생각된다.

2. 연구 대상

본 연구를 위해 대전광역시에 위치한 D초등학교의 3학년 학생들을 연구 대상으로 선정하였다. 초등학교 3학년을 연구 대상으로 선정한 이유는, 아이들은 이미 대수적 사고를 위한 능력을 지니고 있다고 주장한 Mason의 이론을 바탕으로, 학생들의 대수적 사고 능력을 살펴보기 위해서이다. 초등학교 수준에서 초보적인 형태로서의 대수적 사고가 의식적으로 드러나는 학년이 4학년부터라고 할 수 있으므로(김성준, 2004), 본 연구에서는 바로 직전 학년인 3학년 학생들을 대상으로 대수적 사고와 밀접한 연관이 있는 단원을 집중적으로 학습하지 않은 상태에서 학생들의 능력이 어느 정도인지 분석하기 위해서이다.

D초등학교의 학생들의 학력수준은 대전광역시에서 중위수준이며 가정의 사회·경제적 수준도 대체로 중위수준에 해당된다. 3명의 학생들을 대상으로 연구를 실시하였는데 선정 과정은 우선 「구슬문제」를 3학년 한 반에 제시하고 학생들의 해결 과정 중 본 연구와 관련된 함수적 사고의 특징을 보이는 학생 3명을 선정하였다. 이 학생들을 대상으로 세 가지 과제를 3차에 걸쳐 제시하고 학생들의 과제 해결 과정을 문제지와 면담을 통해 상세하게 분석하였다(<표 3> 참조). 이 학생들은 다른 학생들에 비해 양 사이의 관계에 초점을 맞추고 특징적인 기록을 창안하며 일반화를 하기 위한 시도를 보였다. 3명의 학생들은 각각 학생 1, 학생 2, 학생 3으로 기술되며 모두 수학을 좋아하고 흥미를 느끼며 특히 패턴과 규칙성 찾기에 관심을 가지고 있었다. 하지만 담임교사와의 상담결과 학생들이 수학성적은 각각 중, 중상, 중상 정도였다.

<표 3> 연구 대상 선정 방법

	과제	대상	방법
1차	「구슬문제」	1학급 (28명)	문제지, 면담
↓ 학생 선정(3명)			
2차	「구슬문제」	3명	문제지, 면담
3차	「식탁문제」		
4차	「주사위문제」		

3. 자료 수집 및 분석

함수와 관련된 교과서 문제를 분석한 결과, 대부분 함수적 상황이라 부를 수 있는 양들 사이의 관계에 주목하여 규칙을 찾고 일반화해야 하는 과제보다는 문제를 간단한 상황으로 바꾸어 해결하는 문제 해결 전략에 초점을 맞추어 지도 하도록 과제가 구성되었음을 알 수 있었다. 따라서 본 연구의 목적에 맞도록 선행연구 결과를 참조하여 각각 「구슬문제」, 「식탁문제」, 「주사위 문제」를 추출하여 변형하였다. 각각의 과제에 대한 문제 상황 및 활동은 <표 4>와 같으며, 각 과제에는 함수적 사고를 위한, 변하는 두 양과 그 관계가 내재되어 있다.

<표 4> 문제 상황 및 활동 내용

문제	문제 상황	활동 내용
구슬문제	두 가지 방법 중 구슬을 더 많이 얻을 수 있는 경우 선택하기	• 변하는 두 양 사이의 관계 주목하기 • 관계 표현하기 • 패턴을 찾고 수학적 확실성 갖기
식탁문제	식탁의 수와 앉을 수 있는 사람의 수 사이의 규칙 찾기	
주사위문제	주사위의 개수와 스티커의 개수 사이의 규칙 찾기	

세 과제를 간단히 살펴보면 첫 번째 「구슬문제」는 「Best Deal!」(Brizuela & Earnest, 2008) 문제를 수정한 것으로 현재 가진 구슬의 개수가 몇 개냐에 따라 더 많은 구슬을 가지게 되는 경우가 달라지는 문제이다. 현재 가진 구슬의 개수와 방법 1 또는 방법 2와의 함수를 알고 또 이들을 서로 비교하는 문제로 3학년 학생들에게는 다소 생소한 문제일 수 있다. 하지만 상황을 이해한다면 충분히 해결할 수 있을 것이라 예상하고 이 문제를 포함시켰다.

「식탁문제」는 식탁의 수에 따라 앉을 수 있는 사람의 수가 달라지는 문제이다. 즉 식탁이 1개씩 늘어날 때마다 2명씩 늘어나며, 식탁의 수에 2를 곱하고 2

를 더하면 앉을 수 있는 사람의 수가 나오는 문제이다. 세 번째로 제시한 「주사위 문제」는 주사위가 1개씩 늘어날 때마다 스티커는 4개씩 늘어나며, 주사위의 수에 4를 곱하고 2를 더하면 붙일 수 있는 스티커의 수가 나오는 문제이다. 과제2와는 변수가 2개 인 점, 일정한 수가 늘어난다는 점(과제 2는 2, 과제 3은 4)이 비슷하나 과제 2는 평면상에서 그림을 그리면 모든 사람을 표현할 수 있었으나, 과제 3은 주사위가 입체이기 때문에 평면에 학생 스스로 스티커를 그리는데 혼동이 있어 머릿속으로 이미지를 그려보거나 규칙을 빨리 찾아 해결하는 것이 유리한 문제이다.

본 연구에서는 학생들이 이와 같은 문제를 푼 활동지와 면담에서 드러난 함수적 사고를 분석하였는데, 분석틀은 Smith(2008)의 함수적 사고과정 6개를 본 연구에 맞게 <표 5>와 같이 재구성 하였다.

IV. 연구결과

1. 함수적 상황의 문제에 참여하기 과정에서 보이는 함수적 사고 분석

가. 문제 상황과 변량에 대한 이해

함수적 사고의 시작은 문제 상황에 참여하여 둘 또는 그 이상의 변화하는 양과 그 관계에 초점을 두기 시작할 때 발생한다. 따라서 학생들이 두 변수 사이의 관계와 관련된 문제 상황을 이해하고, 변하는 두 양을 찾을 수 있는지 살펴보았다. 대체적으로 학생들은 문제 상황을 잘 이해하고 있었다. 무엇을 묻고 있는지, 문제를 통해 알 수 있는 사실은 무엇인지를 잘 파악하고 그러한 사실 중 초점을 두어야 할 것은 무엇인지 잘 찾아낼 수 있었다. <에피소드 1>은 학생 2가 어느 정도 식탁문제를 이해하고 있는지 보여준다.

<에피소드 1: 문제 상황에 대한 학생의 이해>

교 사: 이 문제에서는 묻고 있는 것은 무엇이지?

학생2: 식탁이 2개, 3개, 4개, 10개, 100개일 때 몇 명이 앉을 수 있는지 묻고 있어요.

교 사: 우리가 알고 있는 것은 무엇이지?

학생2: 식탁이 1개 있으면 사람 4명이 앉을 수 있다는 것이요.

다른 과정과 비교해 대부분 학생들이 문제를 이해하는데 큰 어려움을 겪지 않았으나 문제에 따라 그 상황을 이해하는데 걸리는 시간이 달랐다. 식탁문제, 주사위문제는 문제에 그 상황이 그림으로 제시되었고, 변하는 두 양을 비교적 쉽게 찾을 수 있는 문제이다. 반면 구슬문제는 그림 없이 모두 서술로 문제가 진술되었으며, 구슬의 수와 방법1, 구슬의 수와 방법2 각각의 관계를 알아야하고 또 그 양을 서로 비교하여 어느 방법이 좋은지 선택해야하기 때문에 학생들이 문제를 이해하는데 상대적으로 오랜 시간이 걸렸다. 총 4번의 면담 후 학생들의 전반적인 과정에 대한 소감을 이야

<표 5> 분석의 초점

함수적 사고과정	내용	분석의 초점
함수적 상황의 문제에 참여하기	▪ 문제 이해하기 ▪ 변하는 두 양을 확인하기 ▪ 두 변수사이의 관계에 초점 맞추기	• 문제 상황을 이해할 수 있는가? • 변하는 두 양이 무엇인지 찾아낼 수 있는가? • 두 변수사이의 관계를 찾아 낼 수 있는가? • 하나의 양의 값이 변함에 따라 다른 양의 값이 어떻게 변하는지 인식하고 말로 설명할 수 있는가?
기록 창안하기	▪ 표, 그래프, 그림, 서술 등의 형태로 기록하기	• 두 양사이의 관계를 자신만의 형태로 표현할 수 있는가? • 표현된 기록을 보고 다시 설명할 수 있는가?
패턴과 수학적 확실성 찾기	▪ 기록에서 패턴 확인하기 ▪ 변화하는 패턴을 확인하여 정돈하기 ▪ 패턴의 표현을 다시 창안하기	• 표현된 기록에서 패턴을 찾아낼 수 있는가? • 두 양사이의 관계를 일반화할 수 있는가? • 일반화된 식에 구체적인 수를 대입하여 정당화하고 구체화할 수 있는가?

기해보았는데 이 때 문제 이해와 관련하여 학생들은 다음과 같은 어려움을 이야기 하였다.

- 교과서에 나온 문제랑 비교하면 문제가 너무 복잡해서 처음에 어떻게 해야 할지 모르겠다. 또 글이 너무 길다.
- 글로만 되어 있어서 이해하는데 너무 오래 걸렸다.
- 교과서에는 하나씩 풀어가면서 문제를 푸는데 이 문제는 그런 과정들이 없어서 어려웠다.
- 지금까지 풀어보지 않은 문제들이여서 어려웠고 이해하는데 헷갈렸다.

이 같은 사실의 원인은 제시된 문제들이 학생들이 그 동안 교과서에서 보아온 문제들과 다르기 때문이라고 생각된다. 교과서에 제시된 문제들은 그림, 표 등을 첨부하여 그 상황을 자세히 진술하고 있고 구슬 문제처럼 복잡한 문제가 없기 때문에 학생들 스스로 처음에 문제를 이해하는데 비교적 많은 노력을 기울이지 않아도 된다. 반면 본 연구에서 제시한 문제들은 교과서 문제들과는 그 유형이 다르고 따라서 학생들에게 익숙하지 않기 때문에 다소 오랜 시간이 걸린 것 같다. 하지만 처음 구슬문제를 제시하고 그 이후 2차와 3차 면담에서 식탁문제와 주사위 문제를 제시했을 때는 상황을 이해하는데 걸린 시간이 현저히 줄어들었다. 이와 같은 사실을 통해 학생들에게 이와 같은 유형들의 문제를 자주 제시하고 해결하도록 한다면 어린 학생들이라도 함수적 상황이 포함된 문제를 스스로 이해할 수 있을 것이라는 예상을 할 수 있다.

나. 결과에 대한 예측

학생들에게 문제를 어떻게 해결하면 좋을지와 계산하지 말고 그 결과를 예측하고 설명해 보도록 했을 때 학생들은 나름대로의 이유를 제시하며 결과를 예측했으며 그 방법은 문제에 따라 다르게 나타났다. 예를 들어, 구슬문제의 경우 학생들은 문제에 드러난 언어적 단서를 이용하여 결과를 예측하거나(<에피소드 2>참조), 머릿속으로 자신이 좋아하는 수나 작은 수를 대입하여 결과를 예측했다. 이 같은 상황은 학생들이 함수적 상황을 이해했지만 그 해결방법은 직관에 의하거나 경험에 의해 해결하려는 경향을 나타낸다고 볼 수 있다.

<에피소드 2: 구슬문제의 결과에 대한 학생의 예측>

교 사: 이 문제에서 지훈이가 더 많은 구슬을 가지게 되는 경우는 언제 일 것 같니?
학생1: (즉각적으로)첫 번째 방법이요.
교 사: 왜 그렇게 생각하니?
학생1: 음...두 번째 방법에서는 7개를 다시 가져가잖아요.
교 사: 그래도 두 번째 방법에서는 3배를 하고 첫 번째 방법에선 2배를 하는데?
학생1: (잠시 생각)그래도 3보다 7이 더 크잖아요.

또한 학생들은 문제의 구조를 파악할 수도 있었다. 즉, 식탁문제와 주사위문제는 식탁 또는 주사위가 1개씩 증가할 때마다 그에 따라 늘어나는 사람이 2명 또는 스티커의 수가 4개로 변하는 것으로, 각각 그 구체적인 수는 다르지만 변하는 두 양사이의 관계는 식으로 나타낼 때 $y=2x+2$, $y=4x+2$로 그 구조가 거의 유사하다. 학생들은 스스로 이와 같은 사실을 발견해냈으며 <에피소드 3>에서 볼 수 있듯이 주사위문제를 제시했을 때 그 전에 해결한 식탁문제에 비추어 결과를 예상하는 모습을 보였다. 이는 초등학교 3학년 학생들이라도 비슷한 문제 유형끼리 분류할 수 있으며 유사한 문제를 풀 때 이전 경험을 이용할 수 있는 능력이 있음을 예상할 수 있다.

<에피소드 3: 식탁문제와 주사위문제의 유사한 구조 인식>

교 사: 주사위가 1개씩 늘어날 때마다 스티커가 몇 개 필요할 것 같니?
학생2: 음...5개? 4개?
교 사: 주사위 1개에 붙일 수 있는 스티커는 몇 장이니?
학생2: 6장이요.
교 사: 그런데 왜 5장 또는 4장이 필요할 것 같니?
학생2: 식탁문제에서도 식탁이 1개 늘어나는데 사람이 4명 늘어나지 않았잖아요. 그래서 이번에도 6개가 아니라 그 것보다 작을 것 같아요.

다. 함수적 상황의 문제에 참여하기 과정에서 학생들이 겪는 어려움

학생들은 대체로 함수적 상황 그 자체는 잘 이해할

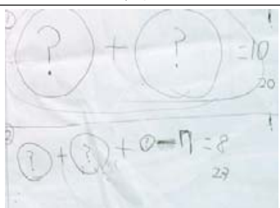
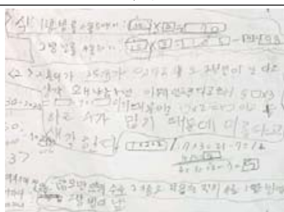
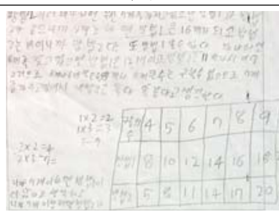
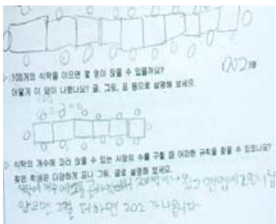
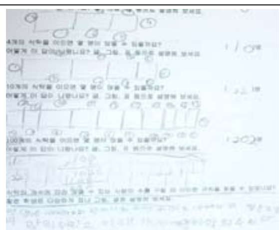
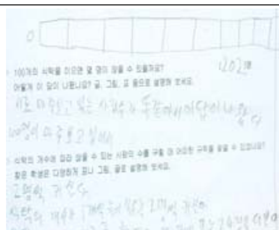
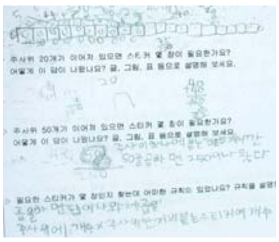
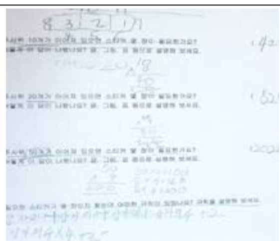
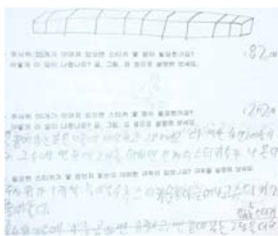
수 있었으나 스스로 문제를 이해하는데 다소 오랜 시간이 걸렸다. 또한 결과를 예측하는 과정에서 함수적 사고를 하지 못하고 경험이나 직관에 의해 즉각적으로 결과를 예측했다. 예를 들어 구슬문제에서 학생 1은 경험상 자신이 주로 가졌던 구슬이나 카드의 개수 몇 개를 생각하고 암산하여 결과를 예측해보았다. 초등학교 3학년까지의 수학교과서만 보더라도 초등학교 3학년 학생들은 아직 함수적 상황의 문제에 익숙하지 않고 함수적 사고를 할 기회도 많지 않았기 때문에 이와 같은 어려움을 드러낸다고 해석할 수 있다.

2. 기록 창안하기 과정에서 보이는 함수적 사고 분석

가. 두 양 사이의 관계에 대한 다양한 표현

학생들이 과제에 포함된 두 양 사이의 관계를 어떻게 표현하는지, 기록된 표현을 다시 어떻게 설명하는지 살펴보았다. 학생들은 서술, 그림, □를 사용한 식, 표를 이용하여 기록을 창안하였다. 이 때 과제에 따라 하나의 형태의 기록만 만든 경우도 있고 두 개 이상을 만든 경우도 있다. 또한 대부분 과제가 어떤 형태로 주어지느냐에 따라 학생들의 기록도 달라졌다. 즉, 구슬문제는 서술형으로 진술되어 있는데 학생들의 기록도 대부분 서술의 형태를 포함하고 있었다. 한편, 식탁문제와 주사위문제는 그림이 포함되었고 학생들도 대부분 그림을 이용하여 두 양사이의 관계를 표현했다 (<그림 1>참조). 아직 어린 학생들이기 때문에 다양한 형태의 기록을 학습하지 못했으며 따라서 새로운 형태의 기록을 창안해내기 보다 문제와 유사한 방법으로 기록하는 것이라 생각된다.

한편, 하나의 과제 내에서도 하위과제에 따라 창안

문제 종류	제시 형태	학생들이 창안한 기록		
		학생 1	학생2	학생3
구슬 과제	서술	 그림	 서술 + □를 포함한 식	 서술 + 표
식탁 과제	그림 + 서술	 그림 + 서술	 그림 + 세로셈 + 서술	 그림 + 서술
주사위과제	서술 + 그림	 그림 + 세로셈 +서술	 그림 + 세로셈 + 서술	 그림 + 서술

<그림 1> 문제에 따른 학생들의 기록

해 내는 기록이 달랐다. 예를 들어 식탁문제에서 식탁의 개수에 따라 같은 학생이라도 다르게 기록을 창안하여 문제를 해결했다. 학생 2의 경우 식탁의 개수가 2, 3, 10개일 때는 그림을 그려 해결했으나, 식탁의 개수가 100개일 때는 세로셈을 하여 해결했다(<에피소드 4> 참조). 이와 같은 사실은 어린 학생이라도 문제에 따라 융통성 있게 기록을 창안할 수 있다는 것을 알 수 있다. 따라서 교사가 문제에 따라 어떤 기록과 표현을 그리는 것이 좋은지 제시하기보다 학생들이 직접 문제를 푸는 과정에서 융통성있게 기록을 창안하는 경험을 하고 무엇이 문제해결에 효율적인지 스스로 습득하도록 하는 것이 좋을 것이라는 예상을 할 수 있다.

<에피소드 4: 하위 과제에 따른 기록 창안의 융통성>

교 사: 너는 그림도 그리고 글로 풀어서도 쓰고 여러 가지 방법으로 문제를 풀었구나. 선생님한테 설명해 볼래?

학생2: 식탁이 10개일 때까지는 식탁그림을 그렸어요. 그리고 100개일 때는 식으로 풀었어요.

교 사: 왜 식탁이 100개일 때는 그림을 그리지 않았니?

학생2: (당연한 듯이)언제 그걸 다 그려요?

교 사: 그럼 처음엔 왜 그림을 그려서 풀었니?

학생2: 그게 편하니까요. 그런데 식탁이 많아지니까 점점 그리기도 힘들고 규칙이 있는 것 같아서 100개일 때는 그냥 계산해서 풀었어요.

같은 과제라도 학생에 따라 기록을 창안한 방법이 달랐다. <그림 1>과 같이 구슬문제의 경우 학생1은 그림을 그려서, 학생2는 □를 사용한 식과 서술로, 학생3은 서술과 표를 그려서 두 양 사이의 관계를 표현했다. 특히 학생 3은 표를 그리고 왼쪽 칸에 구슬의 개수, 방법 1, 방법 2라 쓴 후 구슬의 개수에 따라 칸을 채워나갔다. 처음에 가운데에 7을 쓰고 7의 왼쪽에 6,5,4, 7의 오른쪽에 8,9를 쓴 후 각각의 방법에 대한 구슬의 개수를 암산하여 적어갔다. 표라는 기록의 창안은 함수적 사고의 발달에서 중요한 역할을 하는데[1] 표를 통해 변수들 사이의값을 대응시킬 수 있고 이를 통해 패턴을 발견하고 일반화로 나아갈 수 있기 때문이다.

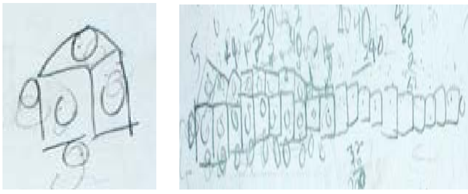
또한 같은 과제에 대해 학생들이 창안한 기록의 유형이 같더라도 그 방법은 서로 약간씩 달랐다. 식탁과제에서 세 학생은 모두 그림을 창안하여 문제를 해결하고자 하였다. 하지만 <그림 1>에서 볼 수 있듯이 학생마다 문제 상황을 그림으로 나타낸 정도가 달랐다. 학생 1은 우선 식탁을 그린 후 사람을 ○로 표시하고 ○의 개수를 셌다. 학생 2도 비슷하나 ○대신 번호를 매겨 식탁 변마다 배치한 후 마지막 숫자를 필요한 사람의 수라 했다.

학생 3은 식탁만 그린 후 필요한 사람의 수는 머릿속으로 계산하는 듯 했다. 학생1은 ○을 이용하여 사람의 수와 그려진 도형의 수 사이의 일대일 대응관계를 기반으로 수를 나타냈다. 반면 학생2는 좀 더 정교한 형태인 형식적인 기호인 수를 사용하여 사람의 수를 나타냈다. 이 같은 사실은 학생들이 서로 같은 종류의 기록을 창안했더라도 그 기록 안에 포함된 기호나 표현 등을 보면 그 수준이나 방식에서 차이가 있으며 이와 같은 차이는 곧 문제해결에서도 효율성의 측면을 비롯한 차이를 발생시키는 등의 영향을 미칠 수 있을 것이라 생각된다.

나. 기록 창안하기 과정에서 학생들이 겪는 어려움

학생들은 세 가지 과제에서 자신만의 기록을 창안하여 문제를 해결하였으나 그 과정에서 몇 가지 어려움이 드러났다. 첫째, 기록의 창안이 곧바로 올바른 문제 해결로 이어지지 않았다. 세 가지 과제에서 학생들은 모두 두 양 사이의 관계를 표현할 수 있었는데 그 표현 방법에 따라 바르게 문제를 해결할 수도, 그렇지 않을 수도 있었다. 과제 3의 경우, 학생 1은 <그림 2>와 같이 주사위를 그린 후 각 면에 붙여야 하는' 스티커를 ○로 나타내었다. 이 과정에서 학생은 주사위 뒷면을 간과하고 주사위 1개 당 필요한 스티커를 5장으로 헤아렸으며 결국 필요한 스티커의 개수를 올바르게 구하는데 실패했다. 이와 같은 사실은 문제 상황을 어떻게 기록하느냐가 문제 해결에 있어서 중요한 역할을 하며 문제에 적합한 기록을 창안해내는 것이 올바른 문제 해결로 이어질 수 있음을 유추할 수 있다. 따라서 학생들이 다양한 기록을 창안할 때 교사는 이를 독려해주기도 해야 하지만 반면 학생들이 창안한 기록이

1) 학생들이 함수와 관련된 문제 해결에 참여할 때 시작하는 가장 보편적인 방법은 표를 만드는 것이다(Confrey & Smith, 1994). 이러한 표의 고안은 함수적 사고의 발달에 중요한 역할을 한다.



<그림 2> 주사위 문제에 대한 표현

제대로 되었는지 모순은 없는지 점검할 필요가 있다.

둘째, 학생들의 기록 내에는 아직 대수적인 이해를 하지 못했음이 드러난 경우가 있다. <그림 2>에서 학생 2는 수의 크기에 따라 □의 크기를 다르게 그렸다. 즉, 구슬문제에서 학생은 $\boxed{} \times \boxed{} = \boxed{} - \boxed{} = \boxed{}$ 와 같이 기록을 창안하기 전 구슬의 개수로 특정한 몇 개의 수를 정하고 식에 들어가야 하는 수의 상대적인 크기에 따라 네모의 크기도 다르게 나타냈다. 따라서 □의 크기가 더 크면 거기에는 그것보다 작은 □보다 더 큰 수가 들어가야 한다고 생각하고 대입 가능성이 있는 수인데도 그 안에 넣지 않았다. 이는 □를 미지수나 변수로 생각하지 못하고 어떤 특정한 수를 대신하는 것으로 파악하고 있음을 드러낸다.

마지막으로 수를 대입하는 과정이나 식을 계산하는 과정에서 등호(=)의 개념을 올바로 이해하지 못하여 잘못된 등식을 이끌어 내는 경우도 있었다. '$35 \times 3 = 105 - 7 = 98$'과 같이 학생 2는 세 문제의 해결과정에서 모두 잘못된 의미의 등호를 사용하는 모습을 보였다. 이는 학생이 아직 등호의 양변이 같아야 한다는 인식을 가지지 못하고 등호를 왼쪽의 식을 계산하여 그 결과를 등호의 오른쪽에 나타내는 것으로 해석하여 잘못된 등식을 이끌어 내는 경우이다. 결과는 맞지만 풀이 과정에서 이와 같이 등호를 잘못 사용하는 것은 분명히 지도될 필요가 있겠다.

3. 패턴과 수학적 확실성 찾기에서 보이는 함수적 사고 분석

가. 패턴 인식

학생들 모두 다양한 기록을 창안하고 그 기록물을 통해 문제를 해결했다. 세 문제에서 학생들은 모두 한 변수가 특정값일 때 다른 변수의 값을 구하는 문제는 잘 해결하였다. 반면 두 변수 사이의 관계를 파악하는 문제에서는 학생들 간에 많은 차이점이 있었다. 즉, 학생에 따라 변화하는 양 사이의 패턴을 찾지 못한 경우도 있었고, 패턴을 찾더라도 그 시기나 정도의 차이가 있었다. 예를 들어 주사위 문제에서 학생 2는 주사위의 수가 각각 2개, 3개일 때의 스티커의 수를 구해 본 후 주사위의 수와 스티커의 수 사이의 패턴을 찾아내고 그 이후에 주사위의 수가 10, 20, 50개인 경우는 찾은 패턴을 이용하여 스티커의 수를 찾아냈다. 반면 학생 1은 주사위의 수가 20개일 때까지 그 패턴을 확실하게 찾지 못하고 그림을 그려 해결했으며 서로 모순된 2가지 패턴을 찾아내어 하위 문제마다 다르게 적용하여 해결했다(<에피소드 5>참조).

<에피소드 5: 주사위의 개수마다 다른 패턴 활용>

교 사: 어떻게 문제를 해결했는지 설명해볼래?

학생1: 우선 주사위가 3개일 때 스티커가 15개 있어야 해요. 그리고 주사위가 10개면 이 그림에서처럼 42장 필요해요.

교 사: 그리고 주사위가 20개일 때는?

학생1: 그 때는 (잠시 고민하면서 주사위 10개일 때의 그림을 응시하다가) 앞 뒤 40장, 위 아래 40쪽 양 끝 2장하면 (세로셈을 하며) 82장이 필요해요.

교 사: 주사위 50개면?

학생1: 아까 주사위 2개는 10개이고, 주사위가 3개일 때 15장 필요하니까, 주사위 하나에 붙는 것은 5개예요. 그러니까 (세로셈을 하며)50에 5를 곱하면 250장이 나와요.

학생 1은 구슬 문제에서 필요한 스티커가 몇 장인지 찾는데 어떤 규칙이 있냐는 마지막 질문에 대해 '(주사위의 개수) × (주사위 한 개에 붙는 스티커의 개수)'라고 적었다. 이 학생은 한 문제에서 변화하는 두 양 사이에 존재하는 규칙이 모든 경우에 걸쳐 적용되어야 한다는 사실을 인식하지 못하고 있었다. 또한 자신이 찾은 규칙이 확실한지 검토하려고 시도하지 않았다. 이는 학생들이 아직까지 스스로 패턴을 찾는 문제를 다룬 경험이 부족하고 평소 문제 해결 시 그 답의 정당성을 확보하는 경험이 부족한데서 기인한 것으로 유추된다.

이와 같이 패턴을 찾지 못하거나 찾더라도 틀린 패턴을 찾은 학생이 있는 반면, 한 가지 이상의 패턴을 찾아낸 학생도 있었다. 예를 들어, 학생 3은 주사위 문제에서 다음과 같은 두 가지 패턴을 찾아냈다.

- 주사위 개수에 4를 곱하고 맨 끝에 있는 2장을 더하면 되요.
- 만약에 주사위가 5개면 처음 주사위는 5장이 붙고 그 다음엔 4장, 4장, 4장, 마지막은 이쪽까지 5장이니까 $5+4+4+4+5$가 되요. 이것처럼 주사위가 있으면 처음이랑 맨 마지막은 5장씩 붙고 그 사이는 4장씩 붙어요.

또한 학생들은 구체적인 수를 예로 들어 형식이 다른 두 가지 패턴의 결과가 같음을 확신했다. 변화하는 두 양 사이에 존재하는 패턴에 대해 학생이 기술하는 방식이 학생이 사용하는 언어를 통해 이루어지긴 했지만 이를 조금만 다듬으면 전형적인 대수식 ($y=4x+2$, $y=5+4(x-2)$)으로 나타낼 수 있을 것으로 보인다. 학생의 이와 같은 모습은 식의 변형을 통해 동치인 식을 만들어 낼 수 있다는 것을 보여준다.

학생들의 차이는 구슬의 개수가 음수일 때도 드러났다. 즉, 구슬문제의 경우 구슬의 개수가 1개와 2개일 때는 방법 2에서 음수가 나오게 되는데 구슬이 1개일 때는 -4, 구슬이 2개일 때는 -1이 나온다. 구슬이 1개와 2개일 때는 어떤 방법이 좋을 것이냐는 질문에 대한 학생들의 응답은 다음의 <에피소드 6>과 같이 다양했다. 학생 1과 학생 2는 문제 해결에 있어서 문제 상황을 염두에 두고 결과를 연결시키는 반면, 학생 3은 상황을 배제하고 결과 그 자체의 수에만 초점을 둔 것이라 할 수 있다.

<에피소드 6: 구슬문제에서 구슬이 1개, 2개일 때의 학생들의 반응>

학생1: (당황하며) 어떻게 이런 상황이 있어요? 말도 안돼요.

학생2: 구슬이 1개일 때는 2, -4, 구슬이 2개일 때는 4, -1이 나와요. 하지만 실제로 이런 상황 자체는 없으니까 상황자체가 말이 안돼요.

학생3: 둘 다 방법 1이 더 크니까 방법 1이 더 좋아요.

한편, 학생이 창안한 기록의 형태가 패턴을 찾는데 영향을 미치는 경우도 있었다. 학생들은 대개 서술, 그림, □를 포함한 식, 표를 이용하여 문제를 해결했다. 물론 학생 간의 수준 차이도 있겠지만 표를 이용한 학생 3의 경우 변수사이의 관계를 금방 찾고 문제를 해결할 수 있었다. 즉, 학생 3은 구슬문제에서 표를 만들고 구체적인 수를 대입하여 계산한 후 다시 그 표를 보고 변수 사이에 존재하는 패턴을 찾았는데 이 때 표가 패턴 찾기에 중요한 역할을 한 것으로 보인다. 이 학생은 다른 학생들보다 빨리 구슬의 개수에 따라 방법 1과 방법 2를 선택해야 하는 경우가 다름을 파악하였으며 그에 따라 일반화를 했다.

기록의 형태 외에도 문제의 구조가 패턴 찾기에 영향을 주었다. 학생들은 문제들 사이의 구조가 유사함을 인식하고 이를 적용하여 다른 문제의 패턴을 찾는데 이용했다. 학생 2는 식탁문제 해결 후 주사위 문제에서 그 패턴이 서로 유사함을 금방 인식하고 해결했다. 또한 문제 간의 유사성과 차이점도 발견해냈다. 이 학생은 식탁문제와 주사위 문제에서 같은 점은 양옆을 더하는 수가 2라는 것, 다른 점은 식탁은 위아래 앉을 수 없으니까 2를 곱하지만 주사위는 위아래까지 붙여야 하니까 4를 곱해야 한다고 설명했다. 이와 같이 어린 학생들이라도 문제의 구조를 볼 수 있으며 이는 패턴을 쉽게 발견하는데 도움이 된다.

또한 학생들이 변수들 사이의 관계를 구성할 때 대응(corresponding) 접근 보다는 공변동(covariation) 접근[2)]을 더 우선적으로 발견하는 특징이 드러났다. 예를 들어 <에피소드 7>과 같이 구슬 문제에서 학생 3은 표를 만들고 그 표를 보고 패턴을 찾아낼 때 구슬의 수와 방법1 또는 구슬의 수와 방법2 간의 대응보다는 방법1에서 구슬의 수가 2씩 증가하는 것, 방법 2는 3씩 증가하는 것을 먼저 발견해냈다. 학생 3은 여기서 더 나아가 이것을 문제 해결과 연관 지을 수 있었다. 식탁문제에서 학생 2도 식탁이 한 개 늘어날 때마다 사람의 수가 2명씩 증가하는 패턴을 먼저 발견하여 문제해결 시 식탁의 개수를 1씩 증가시키고 그 때마다 사람 수에 2씩 더하여 문제를 해결하였다.

<에피소드 7: 구슬문제에서 자신이 창안한 표를 보고 규칙을 발견하는 과정>

2) 대응접근은 변수들의 대응하는 쌍들 사이의 관계를 강조하는 것이며, 공변동 접근은 각 변수의 변화량에 초점을 두는 것이다. 예를 들면 식탁문제에서 식탁의 수를 x, 사람의 수를 y라 하면 대응접근은 y=2x+2에 초점을 두는 것이고, 공변동 접근은 x가 1씩 증가함에 따라 y는 2씩 증가하는 것에 초점을 두는 것이다.

구슬 수	4	5	6	7	8	9	10
방법 1	8	10	12	14	16	18	20
방법 2	5	8	11	14	17	20	23

학생3: 선생님, 여기에 규칙이 있어요.

교 사: 어떤 규칙?

학생3: 여기(방법 1의 행을 가리키며) 여긴 2씩 커지구요, 여기(방법2)는 3씩 커져요.

교 사: 또 무엇을 발견할 수 있을까?

학생3: 7일 때는 이 두 개(방법 1, 방법 2)의 수가 같은데요, 7보다 작으면 방법1이 더 많고 7보다 크면 방법 2가 커요.

교 사: 왜 그럴 것 같니?

학생3: 음...(얼마간 생각하다) 처음(구슬의 수가 4일 때)에 여기(방법1)는 8이고 여기(방법2)는 5잖아요, 근데 이거(방법1)는 2씩 커지고 이거(방법2)는 3씩 커지니까 이 밑에 있는 방법(방법2)이 더 많이씩 커지잖아요. 그래서 나중엔 방법 2가 커지는 것 같아요.

이와 같은 결과는 Smith(2008)의 연구에서 첫 번째 변수가 인덱스 변수일 때 학생들은 공변동 접근을 더 많이 한다는 사실과 일치한다. 즉, 세 문제에서 하나의 변수가 모두 1씩 증가하므로 학생들은 자연스럽게 나머지 변수에만 초점을 맞추면 되므로 이러한 결과를 예상할 수 있다. 또한 이런 유형의 추론은 학생들이 기록한 내용의 외형에 의존하며 기록된 표를 이용하여 다양한 형태의 변수간의 관계를 이끌어낼 수 있음을 유추할 수 있다.

세 가지 과제에 대한 학생들의 반응을 살펴본 결과 패턴 찾기 활동이 자연스럽게 함수적 사고로 나아가지 않음을 알 수 있었다. 패턴 찾기 활동은 학생들이 독립변수에 주의를 기울이지 않고도 찾을 수 있다. 학생들은 식탁문제에서 2씩 증가한다는 패턴을 쉽게 찾아낼 수 있었다. 하나의 항이 전항으로부터 어떻게 획득되는지를 생각하고 패턴을 찾는 것은 반복하는 사고의 시작이며 이와 같은 학생들의 반응이 틀린 것은 아니지만 이는 함수적 사고가 되기에는 아직 불충분하다. 이는 식탁의 개수가 50개일 때와 같이 독립변수가 매우 큰 값일 때는 그 전항을 모두 알아 거기에 2씩 더하여 값을 구해야 하므로 비효과적이라 할 수 있다. 만약 학생들이 패턴을 찾는데 성공을 했다면 이를 표로 나타내보는 연습을 하는 것은 함수적 사고로 나아가는데 도움이 될 것이라 파악된다.

나. 일반화

일반화하는 능력에 있어서도 학생마다 차이를 나타냈다. 학생에 따라 자신이 찾은 패턴이 언제나 성립할 것이라는 사실을 확신하지 못하고 자신이 구한 수의 범위 내에서 일반화하여 결론을 내리기도 했다. <에피소드 8>에서 볼 수 있듯이 구슬 문제에서 학생1은 1부터 11까지의 수를 해본 후 그 수의 범위 내에서만 일반화를 내렸으며, 학생 2도 수의 범위에서만 차이가 있지만 유사한 일반화를 했다. 또한 이 과정에서 학생들은 수의 크기에 대해 느끼는 주관적인 이미지를 바탕으로 일반화를 하기도 했는데 '수가 크면 방법 2가 좋고, 수가 작으면 방법 1이 좋아요.'가 이러한 예에 해당한다. 학생들은 아직 일반화에 대한 경험과 수의 범위의 학습이 제한적이므로 자신이 찾은 규칙이 구한 수의 범위 외에도 성립할 수 있다는 확실성을 가지는데 무리가 있을 것으로 생각된다.

<에피소드 8: 구슬문제에서 학생들의 일반화>

교 사: 어떤 방법이 더 좋을까?

학생1: 구슬이 3,4,5,6개까지는 방법 1이 더 좋고, 구슬이 8,9,10,11개까지는 방법 2가 구슬이 더 많아요.

교 사: 지금 말하지 않은 다른 수에서는 어떤 방법이 더 좋을까?

학생1: 그건 계산해 봐야하는데...

교 사: 너(학생 2)는 어떤 방법이 더 좋다고 생각하니?

학생2: 십의 자리보다 작을 때는 많으면 많을수록 2번이 좋고, 작으면 작을수록 1번이 좋아요. 10의 자리는 2방법이 나아요. 또 100의 자리는 2방법이 나아요.

교 사: 십의 자리보다 작을 때에서 많은 수는 얼마니?

학생2: (조금 생각하다가)한...5?

교 사: 한번 계산해볼까?

학생2: (5부터 계산해보면서) 안되네, 그럼 6? 7? (계산하더니) 8부터는 2번이 더 좋아요.

교 사: 10의 자리, 100의 자리에서는 항상 방법 2가 좋으니? 어떻게 알 수 있지? 모든 수를 계산

해 보았니?

학생2: 그런건 아니지만 그럴 것 같아요. 10이랑 100만 해봤는데 한번 다른 수를 넣어 볼게요. (127을 대입해보며)항상 그럴 것 같아요.

학생들이 이와 같이 산술적 맥락에서 일반화를 하는데, 이는 단지 수치적 계산에 그치는 것이 아니라 충분히 대수로 나아가는 발판이 될 수 있다. 즉 학생1은 식탁문제에서 규칙을 표현하는 과정에서 100×2+2=202라 표현하고 일상 언어를 이용하여 '식탁의 개수에 2를 곱하고 양 옆의 2명을 더하면 202가 나온다.'라고 설명하였는데 이 때 100, 2, 2는 단순한 수가 아니라 암시적인 변수 역할을 할 수 있다. 이는 Fuisi와 Stephen (2001)이 말한 준-변수(Quasi-variable)[3]라 할 수 있으며 대수로 나아가는 통로가 될 수 있다. 여러 문제들을 통해 산술을 이와 같이 표현해보는 연습은 산술적 연산을 통해 일반화로 나아갈 수 있는 밑바탕이 될 수 있을 것이다. 또한 처음부터 학생들에게 그들이 경험하지 않은 수의 범위까지 일반화를 하도록 요구하는 것보다 학생이 점차 수의 더 넓은 범위를 학습하다보면 그들 스스로 자연스럽게 수의 범위를 확장시켜 일반화할 수 있을 것이라 생각된다.

다. 패턴과 수학적 확실성 찾기 과정에서 학생들이 겪는 어려움

함수적 사고 과정 중 패턴과 수학적 확실성 찾기 과정에서 학생들은 가장 많은 오류 및 어려움을 드러냈다. 우선 학생들은 함수적 상황에 담긴 변하는 두 양 사이에 패턴이 있음을 인식하는데 어려움을 겪었다. 학생들은 주로 패턴을 찾고 그 패턴에 구체적인 수를 대입하여 문제를 해결하는 대신, 문제에서 요구하는 특정한 수들에서의 결과를 해결하는데 더욱 초점을 맞추었다. 아직 학생들은 패턴에 대한 인식이나 패턴을 찾는 효율성을 충분하게 경험하지 못했다. 함수적 상황이 담긴 다양한 문제를 통해 패턴을 찾아 문제를 해결하는 경험을 한다면 보다 효율적으로 문제를 해결할 수 있을 것이라 예상된다.

3) 준 변수란 산술적 맥락에서 사용되는 것처럼 보이는 암시적인 변수로 준 변수는 특정 수이지만 기초적인 수 관계를 나타내어 대수식에서의 변수의 역할을 한다.

둘째, 학생들은 자신이 찾은 패턴을 일반화하는데 어려움을 겪었다. 학생들은 주로 자신이 찾은 수의 범위 내에서만 그 패턴이 성립할 것이라 생각하며 그 외의 범위까지 확장하지 못했다. 학생들은 지금까지 학교 수학 교육을 통해서 일반화해 본 경험이 적고 표나 그래프 등으로 그 패턴을 나타내 본 경험이 거의 없기 때문에 일반화의 범위를 자신이 경험한 수 이외로 확장하는 것이 어려웠을 것으로 유추된다.

V. 맺는 말

본 연구는 함수적 상황이 담긴 문제를 제시하였을 때 초등학교 3학년 학생들이 변화하는 두 양을 확인하고 규칙성을 인식하는 방법, 함수적 상황을 말, 그림, 표 등으로 기록하는 방법, 이러한 기록에서 규칙을 찾고 일반화하는 방법을 분석하였다. 연구 결과 초등학교 3학년 학생들은 함수적 상황이 담긴 문제를 잘 이해하고 자신만의 기록을 창안하여 해결할 수 있었다. 분석 결과를 바탕으로 한 논의는 다음과 같다.

첫째, 본 연구에 참가한 초등학교 3학년 학생들은 문제에 내재된 함수적 상황을 비교적 잘 이해하고 있었다. 특히 과제 1은 현재 가진 구슬의 양과 방법 1의 조건, 현재 가진 구슬의 양과 방법 2의 조건을 각각 구한 후 이들의 차이를 구하여 문제를 해결해야 하는 것으로 과제 2, 3에 비해 한 단계 복잡한 문제였음에도 불구하고 학생들은 문제를 잘 이해하여 해결했다. 교과서에 제시된 함수 관련 문제들은 대부분 두 변량을 그대로 제시하고 있어 학생들 스스로 찾아낼 필요가 없으며 학생들은 이러한 문제를 많이 접했다. 이와 같은 사실에도 불구하고 학생들은 본 연구의 과제들에서 스스로 문제에 내재된 변하는 양이 무엇인지, 이 둘 사이의 관계가 어떻게 변하는지 찾아낼 수 있었다.

하지만 여기서 주의할 것이 있다. 본 연구에 제시된 문제들은 교과서 문제와는 다른 유형으로 자주 접해보지 못하였기 때문에 본 연구에 참여한 학생들 역시 처음엔 당황해하였으며 특히 과제 1을 이해하는데 다른 과제들에 비하여 오랜 시간이 걸렸다. 또한 학생들이 이렇게 개별적으로 문제를 이해하는 것도 중요하지만 본 연구를 통해 살펴 본 결과 연구자와의 면담을 통해 문제를 더욱 뚜렷하게 인식하는 점이 보였다. 이런 측

면에서 함수적 상황이 내재된 다양한 문제를 제시하고 교사와 학생 간 또는 학생들 사이의 적절한 의사소통을 바탕으로 할 때, 초등학교 저학년 학생들도 이와 관련된 능력이 좀 더 수월하게 발현될 수 있을 것으로 기대된다.

둘째, 학생들은 문제에 대한 자신의 아이디어나 양들 사이의 관계를 표현하는데 있어서 대부분 서술, 표, 그림, 식 등을 이용하였는데, 그 중 서술 형태가 가장 많았고, 표를 그린 경우는 아주 드물었다. 하지만 같은 서술 형태라고 하더라도 수준이 다양하여 일상 언어를 그대로 옮겨 적은 경우가 있는가하면 정련되고 세련된 형태로 서술하여 일반화한 경우도 있었다.

현재 교과서의 함수 관련 문제들은 문장제 상황을 그림으로 나타내어 학생들이 충분히 이해할 수 있게 하고, 여러 하위 질문들을 제시하여 그 단계만 차근차근 밟아 가면 문제를 해결할 수 있도록 제시되었다. 따라서 학생들은 스스로 기록을 창안해야할 필요성을 느끼지 못했을 수 있고 다양한 표현 수단을 접해 볼 기회가 적었을 것이다. 하지만, 여러 가지 기록을 창안하는 과정이 함수적 사고 개발에 도움이 된다는 측면에서, 학생들 스스로 초보적인 형태로나마 문제에 담긴 아이디어나 관계를 다양한 형식으로 표현해보고 공유해 보는 경험을 가지는 것이 중요하다고 생각된다.

셋째, 학생들은 변하는 두 양 사이의 관계를 일반화하는데 어려움을 겪었다. 구체적인 수를 가지고 조작하고 계산하는 데에는 능숙했으나 이러한 관계가 모든 수의 경우에서도 성립하는지에 대해서는 확신하지 못했으며, 일반화를 추구하는 경우에도 구체적인 수를 예로 들어 설명하는 정도에 그쳤다. 또한 변하는 양 사이의 관계를 나타낼 때, 대응되는 두 양 사이의 관계보다는 각각의 개별적인 양의 변화에 관심을 두어 하나의 양이 변할 때 다른 양도 그에 따라 변한다는 정도를 발견하였다.

변하는 두 양 사이의 관계를 발견하여 일반화하고 이에 대해 확실성을 갖는 것은 함수적 사고에 있어 매우 중요한 부분이다. 물론 초등학교 3학년 학생들에게 수학적으로 정교하거나 엄밀한 의미에서의 일반화나 이에 기초한 확실성을 추구하는 것은 가능하지도 않을 수 있고 바람직하지 않을 수도 있다(NCTM, 2000). 특히 일반화는 학생들이 접하는 수의 범위가 확장됨에 따라 자연스럽게 확장될 필요가 있겠다. 하지만, 함수적 사고의 신장을 위해서 함수적 상황이 담긴 문제를 제시하고 학생들 스스로 변수 사이의 대응 관계를 구성하는 경험은 강조할 필요가 있다. 실제 본 연구를 통해 초등학교 3학년 학생들이 특정 문제 상황을 이해하고 문제를 해결하는 과정에서 함수적 사고를 드러낸다는 점을 감안해 볼 때, 초등학교 저학년 학생들에게 함수적 상황을 경험할 수 있는 적절한 학습 기회를 제공하는 것이 필요하다고 생각된다.

참 고 문 헌

김성준 (2004). 대수의 사고 요소 분석 및 학습-지도 방향 탐색. 서울대학교 대학원 박사학위논문.

최지영・방정숙 (2008). 초등학교 4학년 학생들의 대수적 사고 분석. 수학교육논문집, 22(2), pp.137-164.

Amerom, B. A. van (2002). *Reinvention of early algebra: Developmental research on the transition from arithmetic to algebra.* Freudenthal Institute.

Boulton-Lewis, G. M., Cooper, T. J., Atweh, B., & Pillay, H. (1997). The transition from arithmetic to algebra: A cognitive perspective. *Proceeding of 21st conference of International Group for the PME.* 2. pp.185-192.

Brizuela, B. M., & Schliemann, A. D. (2004). Ten-years-old students solving linear equations *For the Learning of Mathematics,* 24(2), pp.33-40

Brizuela, B. M., & Earnest, D. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp.57-94). New York: Lawrence Erlbaum.

Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp.669-705). Chalotte, NC: Information Age.

Fujii, T., & Stephens, M. (2001). Fostering an understanding of algebraic generalization through numerical expressions: The role of quasi-variable. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent

(Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra. Proceedings of the 12th ICMI Study Conference* 1 (pp.258-264). The University of Melbourne, Australia.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp.5-17). New York: Lawrence Erlbaum.

Kieran, C., & Chalouh, L. (1999). Prealgebra: The transition from arithmetic to algebra. In B. Moses (Ed.), *Algebraic thinking, grades K-12* (pp.59-70). Reston, VA: NCTM.

Malara, N., & Navarra, G. (2003). *ArAl project: Arithmetic pathways towards favouring pre-algebraic thinking*. Bologna, Italy: Pitagora Editrice.

Mason, J. (2008). Making use of children's power to produce algebraic thinking. In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp.57-94). New York: Lawrence Erlbaum.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: The Author. 류희찬 외 5인 공역 (2007). 학교수학을 위한 원리와 규준. 서울: 경문사.

Smith. E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp.133-160). New York: Lawrence Erlbaum.

Warren, E. A., Cooper, T. J., & Lamb, J. T. (2006). Investigating functional thinking in the elementary classroom: Foundation of early algebraic reasoning, *Journal of Mathematical Behavior*, 25, pp.208-223.

An Analysis of Third Graders' Functional Thinking

Kim, JeongWon
Daejeon SeoWon Elementary School
MoonJeong-ro 341, Seo-gu, Daejeon 302-827, Korea
E-mail: nymph019@hanmail.net

Pang, JeongSuk
Korea National University of Education
Gangnae-myeon, Cheongwon-gun, Chung-buk 363-791, Korea
E-mail: jeongsuk@knue.ac.kr

Functional thinking, which focuses on the relationship between two or more varying quantities, is one of the key strands of algebraic thinking. This article is a case study that aimed to investigate how 3rd grade elementary students might make their functional thinking. The results showed that students not only understood the functional situation well but also created a record of the corresponding values of quantities, typically using descriptive writings and pictures. But when they tried to find a pattern and make a generalization, the students showed various difficulties. This paper concludes with implications on how to promote students' functional thinking from early grades in the elementary school.

* ZDM Classification : C32
* 2000 Mathematics Subject Classification: 97C30
* Key Words : functional thinking, problem solving, algebraic thinking, elementary mathematic education, case study