

Ranque-Hilsch 보텍스 튜브의 에너지 분리 과정에 대한 수치적 고찰

손 창 호[†]

울산대학교 기계자동차공학부

Numerical Investigation of the Energy Separation Process in a Ranque-Hilsch Vortex Tube

Chang Ho Son[†]

School of Mechanical and Automotive Engineering, University of Ulsan, Ulsan 680-749, Korea

(Received October 19, 2007; revision received November 26, 2007)

ABSTRACT: A numerical simulation has been conducted to investigate the physics of the Ranque-Hilsch vortex tube. Even though currently available turbulent models cannot predict such complex flow accurately, it was expected that the simulation would enlighten underlying physics qualitatively. The balance of energy on a fluid particle moving along some typical streamlines through shear work and heat transfer was investigated to explain the physics of energy separation process. It was found that the heat transfer cancels major part of the energy separation done by shear work. It was also found that the most of energy separation occur near inlet and hot outlet.

Key words: Vortex tube(보텍스 튜브), Energy separation(에너지 분리)

기 호 설 명

- v_r : 반경방향 속도성분
- v_θ : 원주방향 속도성분
- v_z : 축방향 속도성분
- p : 정압 [Pa]
- T : 온도 [K]
- \dot{m} : 공기의 질량유량 [kg/s]
- Y_c : 저온공기의 질량유량비
- k : 난류운동에너지 [m^2/s^2]
- ϵ : 난류소산률 [m^2/s^3]
- μ_{eff} : 유효 점성계수 [$kg/m \cdot s$]
- k_{eff} : 유효 열전도율 [$W/m \cdot K$]

1. 서 론

Ranque-Hilsch 보텍스 튜브(vortex tube)는 운동하는 부품이 없는 간단한 구조의 튜브에 고속의 기체를 유입시켜 강하게 선회하는 유동을 만들어 고온과 저온의 유동으로 분리하는 장치이다. 이 장치의 냉동 성능은 다른 냉동장치에 비해 현저히 낮음에도 불구하고 압축공기 이외의 다른 동력원을 필요로 하지 않으며 구조가 단순하고 크기가 작기 때문에 다양한 산업현장에서 사용되고 있다. 보텍스 튜브의 에너지 분리 효과는 1933년 Ranque에 의해 처음 소개되었으나 1946년 Hilsch에 의해 체계적인 연구결과가 발표된 후에야 비로소 많은 연구자들의 관심을 받아 왔다.^(1,2) 보텍스 튜브의 낮은 냉동성능을 개선하기 위하여 기하학적인 형태나 작동조건에 따른 에너지 분리

[†] Corresponding author

Tel.: +82-52-259-2588; fax: +82-52-259-1680

E-mail address: chson@ulsan.ac.kr

특성을 파악하는 많은 연구가^(3,4) 실험적으로 이루어져 왔으며 에너지 분리의 원리에 관한 다양한 이론들이 제안되어 왔지만 아직은 완전하게 이해되지는 못하고 있는 형편이다. 그 이유 중의 하나는 에너지 분리의 원리를 이해하는데 필수적인 보텍스 튜브 내부의 복잡한 유동의 여러 가지 물리적인 양들을 간섭이 없어 정밀하게 측정하기가 매우 어렵기 때문에 에너지 분리의 과정을 이해하는데 필요한 실험 자료들이 부족하기 때문이다.

최근에 이르러 CFD를 사용한 연구들이 활발히 이루어지기 시작하였는데 Frohlingsdorf and Unger⁽⁵⁾는 통상적인 난류모델 대신에 고속의 와류 실험으로부터 얻은 난류 와점성계수(eddy viscosity)의 상관식을 사용하여 측정치에 가까운 계산결과를 얻었고 Skye et al.⁽⁶⁾은 표준 $k-\epsilon$ 모델을 적용하여 측정치에 가까운 고온과 저온 출구온도를 예측하였으나 이는 측정치와의 비교 대상이 한정되어 있고 실험결과와 맞추기 위한 인위적인 조정이 포함되어 있어 튜브 내부의 유동을 정량적으로 정확히 모사하였다고 보기는 어렵다. Behera et al.⁽⁷⁾도 표준 $k-\epsilon$ 모델을 사용한 CFD 계산을 이용하여 보텍스 튜브의 최적설계에 적용해 보려는 시도를 하였으나 부분적으로 가능성을 확인하는데 그쳤다. 이러한 CFD 계산은 보텍스 튜브 내 유동의 정량적인 예측에서 아직 부족하지만 튜브 내에서 일어나는 현상을 정성적으로 이해하는데 있어서는 유용한 도구가 될 수도 있을 것으로 기대할 수 있다. Aljuwayhel et al.⁽⁸⁾은 $k-\epsilon$ 모델을 사용한 CFD 계산에서 고온구역과 저온구역 및 재순환구역을 각각 검사체적으로 하여 그들 사이의 경계면에서의 열전달 및 전단일에 의한 에너지의 이동을 계산하여 이들 검사체적 사이에서의 에너지 이동이 균형을 이룸을 보여주어 전단일과 열전달이 에너지 분리의 가장 중요한 원리임을 확인시켰다. Eiamsa-ard and Promvonge⁽⁹⁾은 대수적 Reynolds 응력 모델(ASM, algebraic Reynolds stress model)을 사용하여 에너지방정식의 3개의 원천항(source term)의 영향을 각각 따로 평가하여 평균유동의 운동에너지 확산항이 에너지 분리에 가장 큰 역할을 담당함을 보여주었다. 물리적으로 이 운동에너지의 확산을 전단일의 결과 중의 하나로 이해할 수 있으므로 결국 전단일에 의한 에너지 전달이 에너지 분리의 중

요한 원리임을 확인한 것으로 볼 수 있다. Aljuwayhel et al.⁽⁸⁾의 연구가 전단일과 열전달의 중요한 역할을 확인해 주었지만, 검사체적 내부를 이동하는 유체입자가 전단일과 열전달에 의해 에너지를 얻거나 잃는 과정을 이해할 수 있다면 더 효율적인 보텍스 튜브를 설계하는데 필요한 기초적인 통찰력을 제공할 수 있을 것이다. 이를 위해서는 유체입자의 이동경로를 따라가면서 일어나는 변화를 분석해 보는 것이 필요하다. 따라서 본 연구에서는 CFD 해석의 결과를 사용하여 대표적인 고온유동과 저온유동 그리고 재순환 유동의 유선들을 따라 이동하는 유체입자의 에너지 변화를 추적하고 해석하여 에너지 분리의 과정을 이해해보고자 한다.

2. 수치계산

본 연구에서는 압축성 난류 유동의 해석을 위하여 유한체적법(finite volume method)을 사용한 상용 CFD 코드인 FLUENT의 압축성 유동 모듈(coupled solver)을 사용하였다. 보텍스 튜브는 입구 노즐이 튜브 표면의 원주를 따라 균일하게 분포하는 것으로 가정하여 회전대칭(rotationally symmetric)인 형상으로 단순화 하였다. Fig. 1에는 계산에 사용된 모델의 개략도를 보여주고 있으며 Table 1에는 튜브의 주요 크기를 보여준다. 고온 기체와 저온기체의 출구 방향은 역류의 유입을 방지하기 위하여 반경방향을 향하도록 정하였다. 계산을 위한 격자는 벽 근처와 입구 및 고온출구 근처를 조밀하게 자른 총 27165개의 직사각형 가변 격자를 사용하였다. 튜브의 크기와 입구 기체의 상태는 Frohlingsdorf and Unger⁽⁵⁾가 사용했던 조건과 근사한 값으로 정하였다. 수치계산에 사용된 경계조건은 Table 2에 표시하였다.

Table 1 Tube geometry

Symbol	Part	Size
L	Main tube length	520 mm
L ₀	Cold tube length	100 mm
R	Main tube radius	47 mm
R ₀	Cold tube radius	18 mm
A _i	Inlet area	1476 mm ²
A _h	Hot outlet	4800 mm ²
A _c	Cold outlet	1650 mm ²

Table 2 Flow boundary condition

Entity	Value
Inlet mass flow rate	0.12 kg/s
Inlet total temperature	297 K
Hot outlet static pressure	1.380×10^5 Pa
Cold outlet static pressure	1.013×10^5 Pa

유체는 이상기체인 공기로 가정하였고 온도에 따른 비열, 열전도계수 및 점성 등의 변화는 무시하였다. 고온 출구의 정압은 저온공기의 질량유량비 $Y_c = \dot{m}_c / \dot{m}$ (저온공기 질량유량/입구 질량유량) 가 약 0.2 정도 되도록 조절하여 정하였으며 고온측 출구의 정압 경계조건을 조절하여 계산한 결과 실제로 Y_c 는 0.193 이었고 입구공기의 정체압은 2.7×10^5 Pa 이었다.

입구의 질량유량 경계조건에서 공기의 유입 각도는 축방향(z) 속도성분을 0으로 하였고 접선방향(θ)에서 중심축 쪽으로 7.4° 만큼 기울어지도록 설정하였다. 튜브 벽에서는 단일 및 점착조건을 사용하였다. 난류 모델은 유동의 선회(swirl)의 영향을 추가로 고려할 수 있는 RNG $k-\epsilon$ 모델을 선택하였으며 선회계수(swirl factor)는 표준 값인 0.07을 사용하여 계산하였다. 운동방정식과 난류 모델의 계산에서는 모두 수치적인 확산오차를 줄이기 위해 2차 상류 차분법(second order upwind difference)을 적용하였으며 15,000회의 반복계산(iteration)을 수행하여 수렴된 결과를 얻었다.

3. 계산결과 및 고찰

유체가 가지고 있는 총 에너지의 변화는 열에너지와 기계적 에너지의 총 합을 나타내는 다음의 식(1)로 정의되는 전체온도(total temperature) T_0 의 변화로써 이해할 수 있다

$$T_0 = e + p/\rho + V^2/2c_p \quad (1)$$

여기에서 e 는 비내부에너지, V 는 유체의 속력

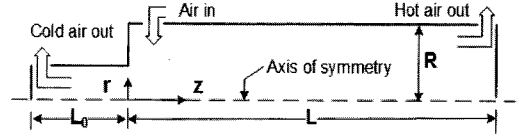
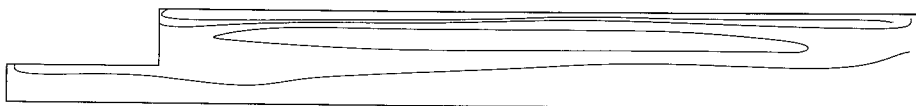


Fig. 1 Schematic of modeled vortex tube.

이고 c_p 는 정압비열이다. 난류운동에너지는 다른 항들에 비해 매우 작으므로 무시할 수 있다. 계산의 결과 고온출구로 유출하는 공기의 전체온도는 4.1 K 증가하였고 저온출구의 전체온도는 17.5 K 감소하였다. 이 값은 $Y_c = 0.24$ 로서 본 계산에 사용된 값인 $Y_c = 0.193$ 과는 조금 다르지만 그 외에는 유사한 조건에서 실험한 Bruun⁽¹⁰⁾의 측정 값인 6.0 K 증가, 20.0 K 감소와 비교할 때 에너지 분리의 과정을 정성적으로 이해해 보려는 본 연구의 목적을 위해 충분히 만족스러운 정보를 제공할 수 있을 것으로 기대된다.

계산결과로부터 $r-z$ 단면에서 잘라서 본 유선(streamline)들 중에서 대표적인 3개의 유선을 Fig. 2에 표시하였다. 이 유선들은 밀도를 가중하여 보정한 Stokes 유동함수의 등치선(contour)들이다. 입구로 유입된 유체는 튜브 벽면을 따라 고속으로 선회하면서 양의 축방향(+ z)으로 이동한다. 고온출구 근처에서 튜브 벽에 가깝게 흐르던 유체의 일부는 고온출구로 유출하고 나머지 유체는 방향을 바꾸어 음의 축방향(- z)으로 이동하여 저온출구로 유출한다. 저온출구로 유동하는 유체에 둘러싸인 구역에 시계 방향으로 순환하는 재순환 영역이 존재한다. 이 그림에는 대표적인 유선으로서 고온출구로 유동하는 유선은 질량유량 0.057 kg/s, 저온출구로 유동하는 유선은 질량유량 -0.057 kg/s 그리고 재순환하는 유선은 질량유량 -0.037 kg/s에 해당되는 유선들이다. Fig. 3에는 이들 유선을 무차원화하여, 실질적인 에너지 분리가 일어나는 주 튜브 $0 \leq z \leq L$ 부분만을 자세히 보여주며, 편의상 이들 유선을 각각 고온유선, 저온유선 그리고 재순환유선으로 부르기로 한다.

Fig. 4는 유체의 전체온도가 이들 유선을 따라

Fig. 2 Selected typical streamlines on $r-z$ plane.

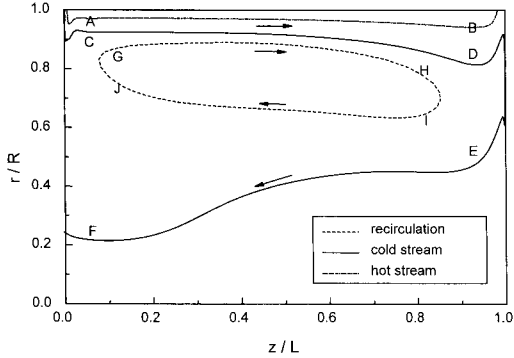


Fig. 3 Selected typical hot, cold and recirculating streamlines.

가면서 변화하는 과정을 보여준다. 전체온도 297 K로 입구에서 유입된 공기는 고온유선을 따라 A 근처에서 급하게 증가한 이후 거의 일정한 전체온도를 유지하다가 B 근처에 이르러서 다시 전체온도가 증가한다. 같은 전체온도 297 K로 유입한 공기 중에서 저온유선을 따라 유동하는 공기의 전체온도는 입구 근처에서 C에서 급히 감소하지만 D로 이동하면서 서서히 증가하여 고온출구 근처에 이르러서는 입구에서의 전체온도보다 오히려 높아진다. 그러나 유동 방향을 바꾸어 D에서 E로 유동하면서 전체온도는 급격히 감소하고 E에서 F로 진행하면서 전체온도는 계속해서 감소한다.

유동하는 단위체적의 유체가 가진 총에너지의 시간에 대한 변화율은 다음의 식(2)로 표현할 수 있다.⁽¹¹⁾

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(e + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} V^2 \right) = W_{shear} + W_{heat} \quad (2)$$

여기에서 W_{shear} 는 단위체적의 유체가 단위시간 동안 주위의 유체와 전단일을 주고받은 결과로 일어나는 순 에너지 증가율을 나타내며 W_{heat} 는 주위 유체와의 열전달의 결과로 발생하는 순 에너지 증가율을 나타낸다. 이 식에서 난류 운동에너지는 평균유동의 운동에너지에 비해 매우 작으므로 무시하였다.

W_{shear} 는 회전대칭인 원통좌표계에서 다음과 같이 표현된다.

$$W_{shear} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{r\theta} v_\theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz} v_z) \quad (3)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{zr} v_r) + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{z\theta} v_\theta)$$

여기에서 v_r , v_θ , v_z 는 각각 반경, 원주 그리고 축방향의 속도성분이고 $\tau_{r\theta}$, τ_{rz} , $\tau_{z\theta}$ 는 전단응력이다. 모든 식들에 나타나는 속도는 압축성 난류 유동의 Favre 평균 속도이며 전단응력들은 회전대칭인 원통좌표계에서 다음과 같다.

$$\tau_{r\theta} = \mu_{eff} \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) \right] \quad (4)$$

$$\tau_{rz} = \mu_{eff} \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \quad (5)$$

$$\tau_{z\theta} = \mu_{eff} \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \quad (6)$$

여기에서 μ_{eff} 는 유체의 점성계수와 난류 와점성계수의 합인 유효 점성계수이다.

한편 W_{heat} 는 회전대칭인 원통좌표계에서 다음과 같다.

$$W_{heat} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(k_{eff} r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_{eff} \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (7)$$

여기에서 k_{eff} 는 유효 열전도율이다.

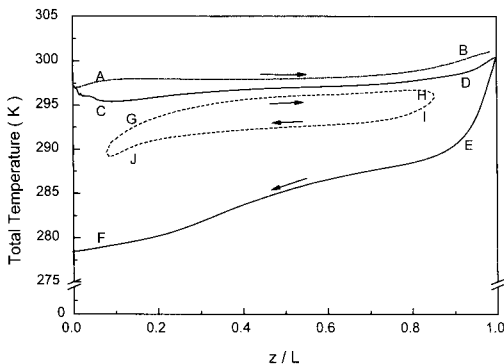


Fig. 4 Evolution of total temperature along the typical streamlines.

이제 수치계산으로부터 얻은 속도와 온도 자료를 이용하여 식(2)의 W_{shear} 와 W_{heat} 의 변화를 계산하여 분석함으로써 유선을 따라 유동과정에서의 에너지 출입과 그에 따른 에너지 분리를 상세히 관찰할 수 있을 것이다.

3.1 전단일의 효과

Fig. 5에는 대표적 유선들을 따라 단위체적의 유체가 단위시간 동안에 얻는 전단일에 의한 순 에너지인 식(3)의 W_{shear} 값의 변화를 보여준다. 입구와 고온출구 근처를 제외하면 W_{shear} 는 식(3)의 첫 번째 항인 선회속도와 원주방향의 전단응력으로부터 발생한 전단일의 수급에 의하여 값이 결정된다.

입구로 유입된 유체는 고온유선을 따라 A 근

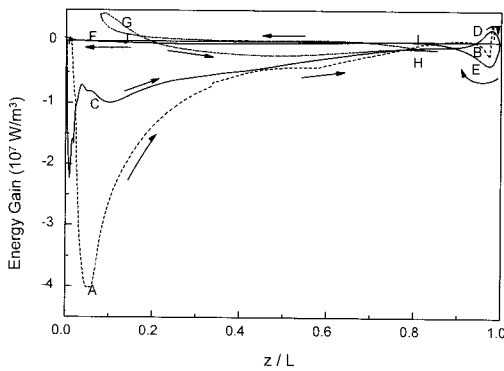


Fig. 5 Energy gain through shear work balance by unit volume of fluid per unit time along the typical streamlines.

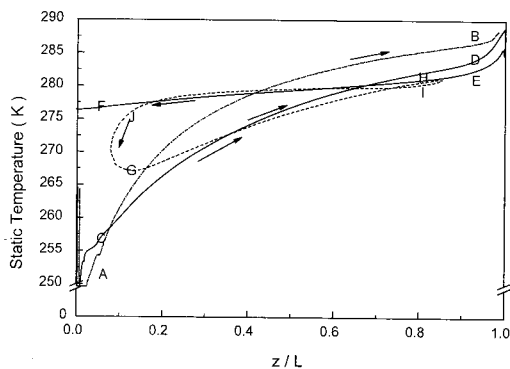


Fig. 6 Evolution of static temperature along the typical streamlines.

처를 지나면서 중심축 쪽의 유체로부터 적은 전단일을 받고 튜브 벽 쪽의 유체를 향해 큰 전단일을 해줌으로써 많은 에너지를 잃는다. A에서 B로 이동하면서 지속적으로 에너지를 잃지만 잃는 에너지의 양은 하류로 가면서 점점 감소한다. 이 결과는 고온출구로 유출하는 유체가 전단일에 의해 에너지를 얻어서 전체온도가 상승할 것이라는 일반적인 기대에 반하는 것이다.

저온유선의 경우에도 입구 근처 C지점에서 고온출구 근처 D지점까지 계속해서 전단일에 의해 에너지를 잃지만 그 양은 고온유선 A-B의 경우와 비교해 상대적으로 적다. 방향을 바꿔 E에서 F로 유동하면서 매우 적은 양이지만 전단일에 의해 에너지를 잃는 것을 관찰할 수 있다.

입구에 근접한 G지점 근처에서 재순환유선 위의 유체는 전단일의 수급에 의해 에너지를 얻지만 H지점으로 향하면서 곧 에너지를 잃게 된다. I에서 J지점으로 유동하면서 유체는 적은 에너지를 얻는다. G와 J근처에서 재순환하는 유체가 에너지를 얻는데 이것은 입구로 유입된 고속으로 선회하는 유체가 되돌아온 느린 재순환 유체를 끌어 당겨 가속시키기 때문이다.

전반적으로 보텍스 튜브 내의 대부분의 영역에서 전단일에 의한 에너지 수급은 유체가 가진 에너지를 잃는 방향으로 진행되고 이렇게 잃은 에너지는 모두 튜브의 벽에 집중된다.

3.2 열전달의 효과

보텍스 튜브 내의 온도 분포는 지역에 따른 커다란 속도의 변화와 강한 점성소산에 의한 발열 그리고 압력에 의한 팽창-수축일의 주고받음으로 인하여 전체온도와는 달리 그 편차가 크고 그 변화가 복잡하다. Fig. 6은 대표적인 유선들을 따라서 온도가 변화하는 과정을 보여준다. 입구에서 급격히 팽창하여 고속으로 유입된 유체는 매우 낮은 온도에서 시작하여 고온유선을 따라서 A에서 B로 이동하는 동안 온도가 크게 상승하며 고온출구 B로 가까이 가면서 온도 상승률은 점차 둔화한다. 저온유선도 입구 근처 C에서 매우 낮은 온도로 시작하여 고온출구 근처 D로 이동하면서 온도가 상승한다. 저온유선에 있는 유체는 같은 z 위치의 고온유선에 있는 유체보다 실제로 온도가 낮고 따라서 음의 반경방향으로 열전달이

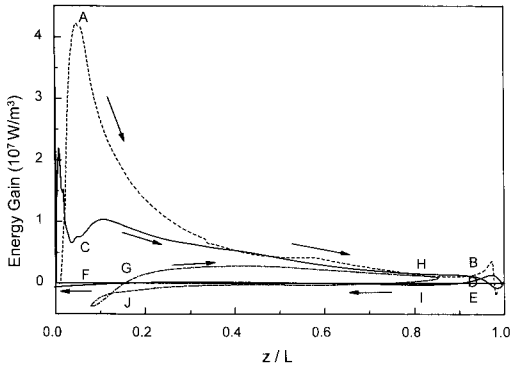


Fig. 7 Energy gain through heat transfer balance by unit volume of fluid per unit time along the typical streamlines.

일어날 것을 예상할 수 있다. 재순환 유선을 따라서는 입구에 가까운 G지점에서의 온도가 같은 z 위치의 저온유선의 온도보다 상당히 높지만 H 지점으로 이동하면서 중간에서 저온유선의 온도와 역전되어 낮아진다. 따라서 G-H 구간의 전반부에서는 재순환 영역에서 저온유동 방향으로 열전달이 일어나고 후반부에서는 그 반대가 될 것으로 예상된다.

Fig. 7은 대표적 유선들을 따라 단위체적의 유체가 단위시간 동안에 열전달에 의해 얻는 순 에너지인 식(7)의 W_{heat} 값의 변화를 보여준다. 이 그림에서 보여주는 곡선들의 형태와 그 값은 Fig. 5의 전단일에 의하여 얻은 에너지의 곡선들과 놀랍도록 유사하며 그 부호만 바뀌었음을 알 수 있다. 이것은 유체입자가 이동하는 과정에서 전단일에 의해 잃거나 얻은 에너지의 많은 부분이 거의 즉시 열전달에 의해 상쇄된다는 것을 의미하며, 특히 앞서 대표적인 고온유선으로 선택된 부분을 포함하여 고온출구로 유출하는 유체의 상당 부분은 전단일이 아닌 열전달에 의해 전체온도의 상승이 이루어짐을 알 수 있다.

3.3 전단일과 열전달의 복합효과

식(2)로부터 알 수 있듯이 유동하는 유체입자가 가진 총 에너지의 양은 전단일과 열전달에 의한 에너지 증가량의 합이다. W_{shear} 와 W_{heat} 의 합은 대부분 서로 상쇄되어 그들 각각에 비해 훨씬 작으며 Fig. 8에 대표적인 유선을 따라 그 합이

변화하는 과정을 표시하였다.

입구로 유입된 유체는 고온유선을 따라 A지점 근처를 지나며 큰 에너지를 얻지만 곧 에너지 상승률은 둔화되어 z/L 이 0.2와 0.6 사이에서는 약간의 에너지를 잃게 된다. 그 이후 B지점까지는 다시 에너지가 증가하며 그 증가율도 커진다.

저온유선의 경우에는 C지점 근처에서 유체는 비교적 많은 에너지를 잃지만 z/L 이 0.1부터 D지점 근처에 이르기까지 많은 에너지를 얻는다. D에서 E지점으로 이동하면서 다시 많은 에너지를 잃고 그 후 F지점에 이르기까지 계속하여 에너지를 잃은 후 저온출구로 향한다. 저온과 고온 유선을 따라 일어나는 에너지의 변화는 주로 입구와 고온출구 근처에서 에너지 분리가 강하게 일어나는 것을 보여주고 있다.

한편 재순환 유선을 따라서 이동하는 유체는 G에서 H지점 사이에서 에너지를 얻고 I에서 J지점사이에서 에너지를 잃는다.

위의 결과들은 Fig. 4의 고온유선, 저온유선과 재순환 유선을 따른 전체온도의 변화추세와 정확히 일치함을 확인할 수 있다.

4. 결 론

Ranque-Hilsch 보텍스 튜브 내의 유동을 상용 CFD 코드인 FLUENT를 사용하여 수치모사를 수행하였다. 그 결과를 유선을 따라 이동하는 유체가 가진 총 에너지의 시간에 따른 변화율을 표현하는 에너지방정식에 대입하여 전단일과 열전

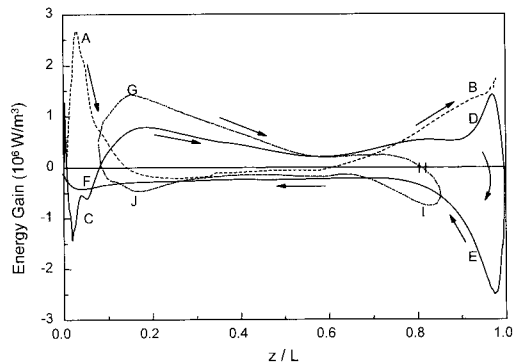


Fig. 8 Energy gain through shear work and heat transfer combined balance by unit volume of fluid per unit time along the typical streamlines.

달이 보텍스 튜브에서의 에너지 분리 과정에서 어떻게 작용하는지 분석하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 고온유선이 지나가는 영역을 포함하여, 보텍스 튜브 유동장내의 대부분의 영역에서 전단일은 유체가 가진 에너지를 감소시키며 에너지를 튜브 벽으로 집중시켜서 에너지 분리를 이룬다.

(2) 입구 근처의 일부 좁은 영역에서 전단일은 재순환 유동의 에너지를 증가시키며 이것은 고속으로 유입된 유체가 느려진 재순환 유동의 선회속도를 회복시키는 과정이다.

(3) 열전달에 의한 유체 에너지의 증감은 전단일에 의한 유체 에너지 증감과 거의 반대로 이루어지며 따라서 에너지 분리의 많은 부분을 상쇄시킨다.

(4) 에너지 분리는 입구와 고온출구 근처에서 활발하게 일어나며 그 사이의 영역에서는 상대적으로 적게 일어난다.

참고문헌

- Hilsch, R., 1947, The use of expansion of gases in a centrifugal field as a cooling process, *Rev. Sci. Instrum.* Vol. 18, No. 2, pp. 108-113.
- Westley, R., 1954, A bibliography and survey of the vortex tube, Note, No. 9, College of Aeronautics, Cranfield, U.K.
- Aydy, O. and Baki, M., 2006, An experimental study on the design parameters of a counterflow vortex tube, *Energy*, Vol. 31, pp. 2763-2772.
- Takahama, H. and Yokosawa, H., 1981, Energy separation in vortex tubes with divergent chamber, *ASME J. Heat Transfer*, Vol. 103, pp. 196-203.
- Frohlingsdorf, W. and Unger, H., 1999, Numerical investigations of the compressible flow and the energy separation in the Ranque-Hilsch vortex tube, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 42, pp. 415-422.
- Skye, H., Nellis, G. and Klein, S., 2006, Comparison of CFD analysis to empirical data in a commercial vortex tube, *Int. J. Refrigeration*, Vol. 29, pp. 71-80.
- Behera, U., Paul, P., Kasthuriangan, S., Karunanithi, R., Ram, S., Dinesh, K. and Jacob, S., 2005, CFD analysis and experimental investigations towards optimizing the parameters of Ranque-Hilsch vortex tube, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 48, pp. 1961-1973.
- Aljuwayhel, N., Nellis, G. and Klein, S., 2005, Parametric and internal study of the vortex tube using a CFD model, *Int. J. Refrigeration*, Vol. 28, pp. 442-450.
- Eiamsa-ard, S. and Promvong, P., 2007, Numerical investigation of the thermal separation in a Ranque-Hilsch vortex tube, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 50, pp. 821-832.
- Bruun, H., 1969, Experimental investigation of the energy separation in vortex tubes, *J. of Mechanical Engineering Science*, Vol. 11, pp. 567-582.
- Batchelor, G., 1977, *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge, pp. 151-158.