The Korean Communications in Statistics Vol. 15, No. 1, 2008, pp. 77~86

비재생보증이 종료된 이후의 확률적 보전효과를 갖는 예방보전정책

정기문[1)]

요 약

본 논문에서는 비재생보증이 종료된 이후의 최적의 주기적인 예방보전정책을 제안한다. 비재생보증기간이 종료된 이후의 예방보전에 대하여 Wu와 Clements-Croome (2005)의 확률적 보전효과를 갖는 주기적인 예방보전모형을 가정한다. 시스템의 운영기간 동안 사용자가 지불하여야 할 비용들이 주어져 있을 때 단위시간당 기대비용을 결정한다. 또한, 구해진 단위시간당 기대비용을 최소화하는 최적의 예방보전 주기와 횟수를 결정하는 방법을 다룬다. 마지막으로 본 논문에서 제안된 예방보전정책을 설명하기 위해서 수치적 예를 살펴본다.

주요용어: 단위시간당 기대비용; 비재생보증; 예방보전효과; 예방보전.

1. 서론

보증기간이 제공되는 수리가 가능한 시스템에 대한 보전정책 (maintenance policy)과 관련된 연구로는 Sahin과 Polatoglu (1996), Jung 등 (2000), Jung과 Park (2003) 등이 있다. 특히, Jung과 Park (2003)은 Sahin과 Polatoglu (1996)의 교체정책을 예방보전 (preventive maintenance; PM)정책으로 확장하였는데, 이를 위해서 Canfield (1986)의 예방보전모형을 이용하였다. 그런데, 최근에 Canfiled (1986)의 모형에서 사용된 예방보전 활동에 대한 효과 또는 수준이 항상 고정된 상수로 표현된 것을 어떤 임의의 확률분포를 갖는 확률변수라고 가정한 일반적인 형태의 예방보전모형이 Wu와 Clements-Croome (2005)에 의해서 제안되었다.

따라서 이러한 일반적인 형태의 Wu와 Clements-Croome (2005)의 예방보전모형을 사용하여 Jung과 Park (2003) 그리고 Sahin과 Polatoglu (1996)의 연구를 다시 고려할 필요가 있다. 이에 본 논문에서는 다음과 같은 예방보전모형을 고려하고

1) (608-736) 부산광역시 남구 대연 3동 314-79, 경성대학교 정보통계학과, 조교수.
E-mail: kmjung@ks.ac.kr

자 한다. 먼저, 시스템에는 비재생보증 (non-renewing warranty)이 주어지고, 비재생보증이 종료된 이후에 주기 x마다 예방보전 활동이 이루어지며, 예방보전 활동이 이루어 진 이후에는 Wu와 Clements-Croome (2005)의 예방보전모형을 따른다고 가정한다. 그리고 비재생보증기간이 종료된 이후에 시스템에 고장이 발생하면 최소수리 (minimal repair)가 수행되며, N번째 예방보전주기에서는 사용자에 의해서 새 시스템으로 교체된다. 이러한 예방보전모형에 대하여 단위시간당 기대비용 (expected cost rate per unit time)을 구하고 이를 최소화하는 최적의 예방보전 주기와 횟수를 결정하는 최적의 예방보전정책 (optimal PM policy)을 설정하는 방법을 소개하고자 한다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2절에서는 Wu와 Clements-Croome (2005)의 예방보전모형 대하여 살펴본다. 그리고 3절에서는 2절에서 설명한 모형을 이용한 비재생보증이 종료된 이후의 예방보전정책에 대하여 단위시간당 기대비용을 구하고자 한다. 또한, 이를 최소화하는 최적의 예방보전정책을 결정하는 방법에 대하여 설명하고자 한다. 4절에서는 3절에서 고려된 최적의 예방보전정책을 설명하기 위하여 수치적 예를 보이고자 한다.

2. Wu와 Clements-Croome의 모형

이 절에서는 Wu와 Clements-Croome (2005)의 예방보전모형에 대하여 살펴보고자 한다. 그들은 다음과 같은 6개의 기본가정이 모형에 포함되도록 하여 기존의 연구를 좀 더 일반적인 형태로 확장하였다. 즉, 세 번째 가정을 통해서 예방보전 활동에 대한 효과를 고정된 상수로 가정한 기존의 예방보전모형을 예방보전의 효과를 표현하는 인자가 어떤 임의의 확률분포를 갖는 확률변수라고 가정한 예방보전모형을 제안한 것이다.

(가정)

i) PM은 kx, $k = 1, 2, \ldots, N$,에서 주기적으로 이루어지며, x는 PM의 주기이고, N은 PM의 횟수이다. 그리고 N번째 PM주기에서는 시스템이 새 것으로 교체된다.

ii) $h(t)$는 PM이 이루어지지 않을 때의 고장률함수로써 순증가함수이다.

iii) k번째 PM이 이루어진 이후의 시스템의 고장률함수는 다음과 같이 된다.

$$h_k(t)=\begin{cases} h(t), \text{ for } 0 \le t \le x \\ \sum_{i=1}^{k}\{h(ix-(i-1)\eta)-h(i(x-\eta))\}+h(t-k\eta), \text{ for } kx \le t \le (k+1)x \end{cases}$$

여기서, η는 예방보전의 수준을 표현하는 인자로써 누적분포함수 $G(\eta)$를 갖는 확률변수이고, $0<\eta \le x$이다.

iv) 연속되는 예방보전 주기 사이에서 고장이 발생되면 최소수리를 수행한다.

v) PM과 최소수리, 그리고 교체를 위한 시간은 고려하지 않는다.

vi) 최소수리비용은 c_m, 예방보전비용은 c_p 그리고 교체비용은 c_r이다.

위와 같은 모형에 대해서 Wu와 Clements-Croome (2005)은 단위시간당 기대비용이 다음과 같이 구해짐을 보였으며, 이러한 단위시간당 기대비용을 최소화하는 최적의 N^*와 x^*을 찾는 알고리즘에 대해서 설명하였다.

$$\begin{aligned} C(x,N) = \frac{1}{Nx}\Bigg\{ c_m \int_0^x \Bigg(\sum_{k=1}^{N-1}\sum_{i=1}^{k}\{h(ix-(i-1)\eta)-h(i(x-\eta))\}x \\ + \sum_{k=0}^{N-1}\int_{kx}^{(k+1)x} h(t-k\eta)dt \Bigg) dG(\eta) + (N-1)c_p + c_r \Bigg\}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

여기서, c_r은 시스템의 교체비용이고, c_p는 예방보전비용 그리고 c_m은 시스템의 최소수리비용이다.

3. 비재생보증 이후의 예방보전정책

본 논문에서 고려하는 시스템에는 비재생보증기간이 주어지기 때문에 보증기간에서 시스템에 고장이 발생하면, 시스템은 새 것으로 교체되지만 보증기간은 새로 시작되지 않고 잔여 보증기간만이 유지된다. 그리고 이러한 비재생보증은 보증기간에서의 교체비용을 지불하지 않는 비재생무료보증 (non-renewing free-replacement warranty : NFRW)과 교체비용의 일부를 지불하는 비재생비례보증 (non-renewing pro-rata warranty : NPRW)으로 구분된다. 비재생보증에서는 보증기간이 종료될 때의 시스템의 수명 (age)이 항상 0과 w사이에 존재하게 되는데, 이를 y라고 가정하고, 이 값은 주어진다고 하자. 그리고 보증기간동안에 발생한 교

체 횟수를 l이라고 가정하자. 이 때, $y = w$이면 $l = 0$이 되고, $l = 0$이면 $y = w$가 된다.

이제 이러한 비재생보증이 주어진 경우에 Wu와 Clements-Croome (2005)의 모형을 이용한 최적의 예방보전정책에 대하여 살펴보자.

3.1. 단위시간당 기대비용

이 절에서 고려하는 예방보전모형은 다음과 같다. 먼저, 시스템에는 비재생보증 w가 주어지고, 비재생보증이 종료된 이후에 주기 x마다 예방보전활동이 이루어지며, 예방보전활동이 이루어 진 이후에는 Wu와 Clements-Croome (2005)의 예방보전모형을 따른다고 가정한다. 그리고 비재생보증기간이 종료된 이후에 시스템에 고장이 발생하면 최소수리가 수행되며, N번째 예방보전주기에서는 사용자에 의해서 새 시스템으로 교체된다.

이러한 예방보전정책에 대하여 단위시간당 기대비용을 구하기 위해서 우선 시스템의 기대순환길이 (expected cycle length)을 구하여야 하는데, 비재생보증에서는 보증기간 동안에 시스템에 고장이 발생하여도 보증기간이 새로 시작되지 않고 잔여 보증기간만이 유지되기 때문에 시스템의 기대순환길이 L이 다음과 같이 됨을 알 수 있다.

$$L = w + Nx. \tag{3.1}$$

그리고 총기대비용 (total expected cost)은 Jung과 Park (2003) 그리고 Wu와 Clements-Croome (2005)의 결과를 이용하면 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} TC(x, N|y, l) = c_0 + (c_m + c_{fm}) \int_0^x \Bigg[& \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{i=1}^{k} \{h(ix - (i-1)\eta) - h(i(x-\eta))\} x \\ & + \sum_{k=0}^{N-1} \int_{kx}^{(k+1)x} h(t - k\eta)\, dt \Bigg] dG(\eta), \end{aligned} \tag{3.2}$$

여기서,

$$c_0 = \begin{cases} c_r \dfrac{(w-y)}{w} + (N-1)c_{pm} + c_r + lc_{fw}, & \text{under NPRW}, \\ (N-1)c_{pm} + c_r + lc_{fw}, & \text{under NFRW} \end{cases}$$

이고, w는 비재생보증기간, y는 보증기간이 종료될 때의 시스템의 수명, l은 보증기간 동안의 시스템의 고장횟수, c_m은 최소수리비용, c_{pm}은 예방보전비용, c_{fm}은 보전기간 동안에 발생한 고장으로 인한 비용, c_{fw}은 보증기간 동안에 발생한 고장으로 인한 비용, 그리고 c_r은 교체비용이다.

그러므로 식 (3.1)의 기대순환길이와 식 (3.2)의 총기대비용으로부터 단위시간당 기대비용은 다음과 같이 된다.

$$C(x, N|y, l) = \frac{1}{w + Nx}\{c_0 + (c_m + c_{fm})c_1\}, \tag{3.3}$$

여기서, c_0는 식 (3.2)에서 정의되어 있으며, c_1은 다음과 같다.

$$c_1 = \int_0^x \left[\sum_{k=1}^{N-1}\sum_{i=1}^{k}\{h(ix-(i-1)\eta+y) - h(i(x-\eta)+y)\}x \right.$$
$$\left. + \sum_{k=0}^{N-1}\int_{kx+y}^{(k+1)x+y} h(t-k\eta)\ dt\right] dG(\eta).$$

식 (3.3)에서 예방보전의 횟수가 $N = 1$이면 보증기간이 종료된 이후의 교체모형이 되기 때문에 Sahin과 Polatoglu (1996)에서 고려된 보전모형과 동일해 진다. 그리고 예방보전의 수준을 표현하는 인자인 η가 확률변수가 아니라 고정된 상수라고 가정하면 Jung과 Park (2003)에서 고려된 보증기간이 종료된 이후의 예방보전 모형과 동일해 짐을 알 수 있다.

3.2. 최적의 예방보전정책

이제, 식 (3.3)에 주어져 있는 단위시간당 기대비용을 최소화하는 최적의 예방보전정책을 살펴보자. 최적의 예방보전 주기 x^*를 찾기 위해서 식 (3.3)을 x에 관해서 1차 미분한 다음 0으로 놓고 풀면 다음을 얻을 수 있다.

$$(w+NT)\left[(c_m+c_{fm})\left\{\frac{N(N-1)}{2}T(h(T+y)-h(y))(g(T)-g(0)) + N(g(T)-g(o))\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\int_y^{T+y} h(t)dt\right\}\right] - N(c_m+c_{fm})\left[\int_0^x\left\{\sum_{k=1}^{N-1}\sum_{i=1}^{k}\{h(ix-(i-1)\eta+y)x\right.\right.$$
$$\left.\left.-h(i(x-\eta)+y)\} + \sum_{k=0}^{N-1}\int_{kx+y}^{(k+1)x+y} h(t-k\eta)dt\right\} dG(\eta)\right] = Nc_0, \tag{3.4}$$

여기서, $g(T) = \left.\frac{dG(t)}{dt}\right|_{t=T}$이고 $g(0) = \left.\frac{dG(t)}{dt}\right|_{t=0}$이며, c_0는 식 (3.2)에서 정의되어 있다. 그런데, 식 (3.3)을 만족하는 최적의 주기 x^*의 값은 N의 값에 의존하게 되므로 식 (3.4)를 만족하는 최적의 주기 x^*와 최적의 예방보전 횟수 N^*를 동시에 찾아야만 한다. 이를 위해서 Jung과 Park (2003)에서 x^*와 N^*를 찾기 위해서 사용한 방법을 사용하고자 한다. 즉, 식 (3.4)를 만족하는 x가 N의 함수가 되기 때

문에 이를 x_N이라고 하고, 이 값을 식 (3.3)의 x대신에 대입하면, $C(x_N, N|y, l)$은 N만의 함수가 되므로 최적의 횟수 N^*는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$N^* = \min_N C(x_N, N|y, l), \ N = 1, 2, \ldots. \tag{3.5}$$

이때, 식 (3.3)의 단위시간당 기대비용을 최소화하는 최적의 횟수는 식 (3.5)에서 구해진 N^*이고, 최적의 주기 x^*는 x_{N^*}가 된다.

4. 수치적 예

본 논문에서 고려된 예방보전모형에 대한 최적의 보전정책을 설명하기 위해서 시스템의 고장시간 T가 척도모수(scale parameter)가 1인 와이블분포(Weibull distribution)를 한다고 가정하자. 즉, 가정된 시스템의 고장률함수는 $h(t) = \beta t^{\beta-1}$이 된다. 그리고 예방보전의 수준인 η는 Wu와 Clements-Croome (2005)의 논문에서와 동일하게 다음과 같은 분포함수를 갖는 균등분포 (uniform distribution)를 한다고 가정하자.

$$G(\eta) = \begin{cases} \dfrac{\eta}{T}, & 1 \le \eta \le x, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

표 4.1: $\beta = 3$일 때 최적의 예방보전 정책과 단위시간당 기대비용 ($w = 0.5$, $c_{pm} = 1$, $c_m = 1$, $c_{fm} = c_{fw} = 1.5$, $l = 1$, $x = \eta$)

		NPRW			NFRW		
c_r	y	x^*	N^*	$C(x^*, N^*)$	x^*	N^*	$C(x^*, N^*)$
2	0.1	0.522	2	4.854	0.640	1	3.637
	0.2	0.472	2	4.906	0.583	1	3.867
	0.3	0.572	1	4.859	0.530	1	4.098
3	0.1	0.386	5	5.751	0.506	2	4.461
	0.2	0.429	3	5.902	0.466	2	4.767
	0.3	0.389	3	5.930	0.582	1	5.045
4	0.1	0.353	7	6.428	0.450	3	5.076
	0.2	0.366	5	6.656	0.416	3	5.449
	0.3	0.364	4	6.727	0.456	2	5.789
5	0.1	0.331	9	6.981	0.416	4	5.574
	0.2	0.331	7	7.275	0.384	4	6.007
	0.3	0.346	5	7.393	0.402	3	6.404

표 4.2: $\beta = 4$일 때 최적의 예방보전 정책과 단위시간당 기대비용
($w = 0.5$, $c_{pm} = 1$, $c_m = 1$, $c_{fm} = c_{fw} = 1.5$, $l = 1$, $x = \eta$)

		NPRW			NFRW		
c_r	y	x^*	N^*	$C(x^*, N^*)$	x^*	N^*	$C(x^*, N^*)$
	0.1	0.416	4	4.533	0.648	1	3.490
2	0.2	0.469	2	4.733	0.583	1	3.735
	0.3	0.554	1	4.767	0.521	1	3.997
	0.1	0.365	7	5.231	0.448	3	4.223
3	0.2	0.358	5	5.611	0.464	2	4.594
	0.3	0.378	3	5.811	0.562	1	4.957
	0.1	0.326	11	5.740	0.392	5	4.715
4	0.2	0.330	7	6.252	0.417	3	5.215
	0.3	0.327	5	6.578	0.375	3	5.689
	0.1	0.310	14	6.145	0.379	6	5.099
5	0.2	0.312	9	6.769	0.359	5	5.698
	0.3	0.316	6	7.195	0.349	4	6.271

표 4.3: $\beta = 5$일 때 최적의 예방보전 정책과 단위시간당 기대비용
($w = 0.5$, $c_{pm} = 1$, $c_m = 1$, $c_{fm} = c_{fw} = 1.5$, $l = 1$, $x = \eta$)

		NPRW			NFRW		
c_r	y	x^*	N^*	$C(x^*, N^*)$	x^*	N^*	$C(x^*, N^*)$
	0.1	0.394	6	4.191	0.660	1	3.377
2	0.2	0.417	3	4.519	0.589	1	3.626
	0.3	0.549	1	4.673	0.522	1	3.900
	0.1	0.357	10	4.716	0.432	4	3.951
3	0.2	0.354	6	5.240	0.414	3	4.404
	0.3	0.346	4	5.611	0.418	2	4.832
	0.1	0.329	15	5.092	0.382	7	4.328
4	0.2	0.323	9	5.758	0.366	5	4.916
	0.3	0.314	6	6.282	0.378	3	5.500
	0.1	0.310	20	5.388	0.364	9	4.616
5	0.2	0.297	13	6.168	0.340	7	5.313
	0.3	0.294	8	6.816	0.329	5	6.015

표 4.1은 y와 c_r의 변화에 따라 식 (3.3)에 있는 단위시간당 기대비용을 최소화하는 최적의 예방보전 주기와 횟수 그리고 그때의 단위시간당 기대비용을 보여주고 있다. 표에서 $c_r = 3$이고 $y = 0.1$일 때, NPRW인 경우에 식 (3.3)을 최소화

하는 최적의 예방보전 주기는 0.386이고 횟수는 5가 됨을 알 수 있다. 이것은 비재생비례보증기간이 종료된 이후에 0.386시점마다 예방보전을 수행하고 다섯 번째 예방보전 주기에서는 시스템을 새것으로 교체하는 것이 기대비용 측면에서 최적의 예방보전정책이 된다는 것을 의미한다. 표 4.2와 표 4.3에 나타나 있는 최적의 예방보전 주기와 횟수도 위에서 설명한 의미와 동일하다. 표 4.1, 표 4.2 그리고 표 4.3으로부터 c_r값이 고정되어 있을 때 y가 증가하면 N^*는 감소하고, $C(x^*, N^*)$는 증가함을 알 수 있으며, y값이 고정되어 있을 때 c_r이 증가하면 N^*와 $C(x^*, N^*)$가 증가함을 알 수 있다. 또한, 비재생무료보증 (NFRW)인 경우보다 비재생비례보증 (NPRW)인 경우가 항상 단위시간당 기대비용이 큰 것을 알 수 있다.

5. 결론

본 논문에서는 비재생보증기간이 종료된 이후의 주기적인 예방보전모형을 고려하였다. 특히, 예방보전의 수준을 고정된 상수가 아닌 어떤 임의의 확률분포를 갖는 확률변수라고 가정한 일반적인 형태의 예방보전모형이 Wu와 Clements-Croome (2005)에 의해서 제안되었는데, 이러한 일반적인 형태의 주기적인 예방보전모형을 이용하여 기존의 연구를 확장하였다. 본 논문에서 고려된 비재생보증이 종료된 이후의 주기적인 예방보전모형에 대하여 단위시간당 기대비용을 구하였으며, 이를 최소화하는 최적의 예방보전정책을 결정하는 방법에 대하여 설명하였다. 그리고 수치적 예를 통하여 제안된 모형에 대하여 자세히 설명하였다.

본 논문에서는 비재생보증이 주어진 경우에 대해서만 고려하였으므로 앞으로 비재생보증보다 좀 더 복잡한 형태의 보증정책 하에서 보증기간이 주어진 경우에 대해서도 고려해 보고자 한다.

참고문헌

Canfield, R. V. (1986). Cost optimization of periodic preventive maintenance. *IEEE Transactions on Reliability*, **35**, 78–81.

Jung, G. M., Lee, J. H. and Park, D. H. (2000). Periodic preventive maintenance policies following the expiration of warranty. *Asia-Pacific Journal of Operational Research*, **17**, 17–26.

Jung, G. M. and Park, D. H. (2003). Optimal maintenance policies during the post-warranty period. *Reliability Engineering & System Safety*, **82**, 173–185.

Sahin, I. and Polatoglu, H. (1996). Maintenance strategies following the expiration of warranty. *IEEE Transactions on Reliability*, **45**, 220–228.

Wu, S. and Clements-Croome, D. (2005). Preventive maintenance models with random maintenance quality. *Reliability Engineering & System Safety*, **90**, 99-105.

[2007년 9월 접수, 2007년 11월 채택]

PM Policy with Random Maintenance Quality Following the Expiration of Non-Renewing Warranty

Ki Mun Jung[1)]

Abstract

This paper develops the optimal periodic preventive maintenance policy following the expiration of non-renewing warranty. We assume that Wu and Clements-Croome's (2005) periodic PM model with random maintenance quality is utilized to maintain the system after the non-renewing warranty is expired. Given the cost structure to the user during the cycle of the product, we drive the expressions for the expected cost rate per unit time. Also, we obtain the optimal number and the optimal period by minimizing the expected cost rate per unit time. The numerical examples are presented for illustrative purpose.

Keywords: Expected cost rate per unit time; non-renewing warranty; PM quality; preventive maintenance.

1) Assistant Professor, Department of Informational Statistics, Kyungsung University, Busan 608-736, Korea. E-mail: kmjung@ks.ac.kr