

논문 2008-45SC-1-2

MIMO 비선형 시스템의 로컬 관측기 설계

(Local Observer Design for MIMO Nonlinear Systems)

이 성 렬*

(Sungryul Lee)

요 약

본 논문에서는 다입력 다출력 비선형 시스템에 대한 관측기 설계 방법을 제안한다. 먼저 관측기 설계를 위한 삼각구조를 갖는 비선형 시스템을 정의한다. 또한 제안한 관측기의 안정도를 증명하는데 중요한 역할을 하는 가관측성 행렬을 다입력 다출력 시스템으로 확장한다. 확장된 가관측성 행렬을 이용하여 상태변수와 시스템 입력의 유계 조건하에서 제안한 관측기가 로컬 영역에서 지수 함수적 수렴성을 가짐을 증명한다. 마지막으로 제안한 결과의 유효성을 증명하기 위하여 모의실험 예제를 제공한다.

Abstract

This paper presents an observer design methodology for a special class of multi input multi output(MIMO) nonlinear systems. First, we characterize the class of MIMO nonlinear systems with a triangular structure. Also, the observability matrices that plays an important role in proving the convergence of the proposed observer are generalized to MIMO systems. By using the generalized observability matrices, it is shown that under the boundedness conditions of system state and input, the proposed observer guarantees the local exponential convergence to zero of the estimation error.

Keywords : observer, nonlinear system, triangular structure

I. 서 론

최근에 MIMO 비선형 시스템의 관측기 설계 문제가 여러 논문에서 많은 관심을 끌고 있다. 일반적으로 이 문제를 해결하기 위한 연구들은 두 가지 범주로 크게 분류할 수 있다.

첫 번째 연구 방향은 선형의 오차 동역학을 갖는 비선형 관측기의 설계를 목표로 하는 오차 선형화기법이다. 대부분의 이런 연구들은 SISO 비선형 시스템에 대한 Krener^[1]의 연구를 MIMO 시스템으로 확장한 결과였다. [2]에서 저자들은 다변수 비선형 시변시스템을 관측기 표준형으로 변환하기 위한 필요충분 조건을 유도하였다. [3]에서는 선형의 관측 가능한 형태로 변환할

수 있는 모든 종류의 비선형 시스템의 조건을 정의하였다. 한편, 오차 선형화와 관련된 모든 연구들은 관측기 설계를 위하여 필요한 조건들이 제약이 너무 강하여 실제 시스템에 적용하기 어려운 단점을 가진다. 이런 단점을 해결하기 위하여 [4]에서는 근사 오차 선형화 기법과 이를 이용한 로컬 관측기를 제안하였다.

두 번째 연구방향은 삼각구조를 갖는 시스템에 적용 가능한 고이득 관측기 연구이다. [5]에서 삼각구조를 갖는 SISO 비선형 시스템에 대하여 지수 함수적 수렴성을 만족하는 고이득 관측기를 제안하였다. 이후 [6]에서 블록 삼각구조를 갖는 다출력 시스템으로 확장되었다. [7]에서는 고이득 관측기가 갖는 고이득에 기인한 진동 문제와 노이즈에 민감한 단점을 개선하는 관측기를 제안하였다.

지금까지 대부분의 고이득 관측기 연구에서는 관측 가능한 선형시스템 부분과 삼각구조의 비선형 시스템 부분으로 구성된 시스템에 대하여 주로 연구하였다. 최

* 정희원, 군산대학교 전자정보공학부
(School of Electronic & Information Eng., Kunsan National University)
접수일자: 2007년7월20일, 수정완료일: 2008년1월5일

근에 [8]에서는 선형 부분과 삼각구조를 가정하지 않은 매우 일반적인 구조의 SISO 비선형 시스템에 대하여 로컬 관측기 설계 방법을 제안하였다. 본 논문에서는 [8]의 연구결과를 MIMO 시스템으로 확장하고자 한다. 이를 위하여 본 논문에서는 관측 가능한 선형 부분을 가지지 않는 삼각구조의 MIMO 시스템을 정의한다. 그리고 일종의 가관측성 행렬을 MIMO 시스템으로 일반화한다. 가관측성 조건과 시스템 상태변수와 입력에 대한 유계조건을 이용하여 제안한 관측기가 로컬 영역에서 지수 함수적 수렴성을 보임을 증명한다. 마지막으로 제안한 설계 방법의 유효성을 증명하기 위하여 모의실험 결과를 제공한다.

II. 본 론

1. 시스템 정의

본 절에서는 논문에서 다룰 비선형 시스템의 형태를 정의하고자 한다. 본 논문에서는 다음과 같은 형태의 MIMO 비선형 시스템을 고려한다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= f_i(x_{[1,i]}; u; y_{[i+1,p]}) \\ y_i &= h_i(x_{i1}), 1 \leq i \leq p \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 $f_i: R^n \times R^m \times R^p \rightarrow R^n$, $h_i: R \rightarrow R$ 는 C^∞ 벡터 필드들이다. 즉 무한 번까지 미분한 결과가 연속인 벡터 함수들이다. 또한 각 서브 시스템의 상태 변수는 $x_i = [x_{i1}, \dots, x_{in}]^T \in R^n$ 이고 따라서 전체 상태 변수는 $x = [x_1^T, \dots, x_p^T]^T \in R^n$ 으로 정의한다. 한편, 표현상의 단순화를 위해 $x_{[1,i]} = [x_1^T, \dots, x_i^T]^T$, $y_{[1,i]} = [y_1, \dots, y_i]^T$ 으로 정의한다. 식 (1)에서 각 서브시스템의 벡터 필드는 다음과 같은 갖는다고 가정한다.

$$f_i = \begin{pmatrix} f_{i1}(x_{[1,i-1]}; x_{i1}, x_{i2}; u, y_{[i+1,p]}) \\ f_{i2}(x_{[1,i-1]}; x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}; u, y_{[i+1,p]}) \\ \vdots \\ f_{in}(x_{[1,i-1]}; x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}; u, y_{[i+1,p]}) \end{pmatrix} \quad (2)$$

결과적으로 전체 시스템 (1)은 삼각구조를 갖는 p 개의 SISO 시스템이 상호 연결된 구조를 갖는다. 시스템 (1)의 형태는 기존의 연구에서 주로 가정된 관측 가능한 선형 부분을 가정하지 않음으로써 더 넓은 범위의 시스템을 포함한다는 장점을 가진다.

가정 1: 모든 $x(0) \in X$ 와 모든 $u \in U$ 에 대하여 식 (1)의 해 $x(t)$ 가 모든 $t \geq 0$ 에서 $x(t) \in X$ 를 만족하

도록 하는 어떤 콤팩트 집합 $X \subset R^n$, $U \subset R^m$ 가 존재한다.

가정 2: 아래에서 정의한 가관측성 행렬 M_i 가 모든 $x \in X$ 와 $u \in U$ 에 대하여 비특이 행렬이다.

$$M_i(x_{[1,i]}, u, y_{[i+1,p]}) = \begin{pmatrix} H_i(x_i) \\ H_i(x_i)F_{ii}(x_{[1,i]}; u; y_{[i+1,p]}) \\ \vdots \\ H_i(x_i)F_{ii}^{(n-1)}(x_{[1,i]}; u; y_{[i+1,p]}) \end{pmatrix} \quad (3)$$

위 식에서 $F_{ij} = \partial f_i / \partial x_j$, $H_i = \partial h_i / \partial x_i$ 이다.

가정1은 식 (1)의 시스템에 유한한 입력이 가해질 때 식 (1)의 해는 유한한 크기를 가짐을 의미한다. 이 것은 로컬 안정도 증명을 위하여 필요한 조건이다. 가정 2는 선형시스템의 가관측성 행렬을 확장한 것으로 볼 수 있다. 따라서 가정 2는 관측기 설계의 필수 조건이다.

2. 비선형 관측기 설계

본 절에서는 앞 절에서 제시한 비선형 시스템에 대하여 관측기 설계 방법을 제안한다. 먼저 식 (1)에 대하여 다음과 같은 비선형 관측기를 설계한다.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_i &= f_i(\hat{x}_{[1,i]}; u; y_{[i+1,p]}) \\ &+ M_i^{-1}(\hat{x}_{[1,i]}; u; y_{[i+1,p]}) \Delta_{\theta_i}^{-1} K_i (y_i - h_i(\hat{x}_{i1})), \end{aligned} \quad (4)$$

$$1 \leq i \leq p$$

위 식에서 Δ_{θ_i} 는 다음과 같이 정의한다.

$$\Delta_{\theta_i} = \text{diag}(1/\theta_i, 1/\theta_i^2, \dots, 1/\theta_i^n) \quad (5)$$

여기서 θ_i 는 설계 변수이다. 설계 방법은 증명과정에서 제시할 것이다. K_i 는 아래에서 정의된 행렬 A_i, C_i 에 대하여 행렬 $A_i - K_i C_i$ 의 모든 고유값이 음의 실수부를 갖도록 설계한다.

$$\begin{aligned} A_i &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in R^{n_i \times n_i} \\ C_i &= (1 \ 0 \ \dots \ 0) \in R^{1 \times n_i} \end{aligned} \quad (6)$$

정리 1: 만약 다입력 다출력 비선형 시스템 (1)이 가정1과 2를 만족시킨다면 제안한 시스템 (4)는 로컬 영역에서 지수 함수적 수렴성을 보장하는 관측기이다.

증명: 가정 1에 의하여 식 (1)의 해는 콤팩트 집합 X 안에 항상 머문다. 그러나 관측기 (4)의 해는 집합 X 를 벗어날 수도 있다. 따라서 다음을 만족하도록 하는 콤팩트 집합 V 와 양의 실수 ϵ 이 존재한다고 가정하자.

$$\{\hat{x} \in R^n : \|\hat{x} - x\| < \epsilon\} \subset V, \forall x \in X \quad (7)$$

위의 가정은 증명의 끝부분에서 제거될 수 있음을 보일 것이다. 먼저 식 (4)의 i 번째 서브시스템을 고려해보자. $e_i = x_i - \hat{x}_i$ 으로 정의하면 i 번째 오차동역학은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{e}_i &= f_i(x_{[1,i]}; u; y_{[i+1,p]}) - f_i(\hat{x}_{[1,i]}; u; y_{[i+1,p]}) \\ &\quad - M_i^{-1}(\hat{x}_{[1,i]}; u; y_{[i+1,p]}) \Delta_{\theta_i}^{-1} K_i (h_i(x_{i1}) - h_i(\hat{x}_{i1})) \end{aligned} \quad (8)$$

테일러 정리를 이용하여 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} &f_i(x_{[1,i]}; u; y_{[i+1,p]}) - f_i(\hat{x}_{[1,i]}; u; y_{[i+1,p]}) \\ &= F_{i1}(\hat{x}, u) e_1 + \dots + F_{ii}(\hat{x}, u) e_i + r_{if}(\hat{x}, e_{[1,i]}, u) \end{aligned} \quad (9)$$

$$h_i(x_{i1}) - h_i(\hat{x}_{i1}) = H_i(\hat{x}) e_i + r_{ih}(\hat{x}, e_i) \quad (10)$$

고차항 r_{if}, r_{ih} 는 다음 식을 만족시킨다.

$$r_{if}(\hat{x}, 0, u) = 0, r_{ih}(\hat{x}, 0) = 0 \quad (11)$$

이후로 표현상의 단순화를 위하여 모든 독립 변수의 표기를 생략하겠다. (9)와 (10)을 이용하면 식 (8)은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \dot{e}_i &= (F_{ii} - M_i^{-1} \Delta_{\theta_i}^{-1} K_i H_i) e_i + F_{i(i-1)} e_{i-1} + \dots + F_{i1} e_1 \\ &\quad + r_{if} - M_i^{-1} \Delta_{\theta_i}^{-1} K_i r_{ih} \end{aligned} \quad (12)$$

M_i 의 정의로부터 다음 성질은 선형시스템 이론에서 잘 알려져 있다.

$$\begin{aligned} M_i F_{ii} M_i^{-1} &= A_i + B_i \\ H_i M_i^{-1} &= C_i \end{aligned} \quad (13)$$

위 식에서 B_i 는 다음과 같다.

$$B_i(\hat{x}, u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_{i1}(\hat{x}, u) & b_{i2}(\hat{x}, u) & \dots & b_{in}(\hat{x}, u) \end{pmatrix} \in R^{n_i \times n_i}$$

또한 다음 식이 만족함을 쉽게 보일 수 있다.^[5]

$$\begin{aligned} \Delta_{\theta_i} A_i \Delta_{\theta_i}^{-1} &= \theta_i A_i \\ C_i \Delta_{\theta_i}^{-1} &= \theta_i C_i \end{aligned} \quad (14)$$

이제 좌표변환 $\bar{e}_i = \Delta_{\theta_i} M_i e_i$ 을 정의하고 (13)과 (14)를 이용하면 새로운 좌표계에서 식 (12)는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{\bar{e}}_i &= \Delta_{\theta_i} M_i \dot{e}_i + \Delta_{\theta_i} \dot{M}_i e_i \\ &= \theta_i (A_i - K_i C_i) \bar{e}_i + \Delta_{\theta_i} B_i \Delta_{\theta_i}^{-1} \bar{e}_i \\ &\quad + \Delta_{\theta_i} M_i (F_{i(i-1)} e_{i-1} + \dots + F_{i1} e_1) \\ &\quad + \Delta_{\theta_i} M_i r_{if} - K_i r_{ih} + \Delta_{\theta_i} \dot{M}_i M_i^{-1} \Delta_{\theta_i}^{-1} \bar{e}_i \end{aligned} \quad (15)$$

$A_i - K_i C_i$ 가 Hurwitz하기 때문에 다음을 만족하는 양한정 행렬 P_i 가 반드시 존재한다.

$$(A_i - K_i C_i)^T P_i + P_i (A_i - K_i C_i) = -I_{n_i \times n_i} \quad (16)$$

$I_{n_i \times n_i}$ 는 $n_i \times n_i$ 단위 행렬을 의미한다. 이제 식 (15)에 대하여 리아푸노프 후보함수를 다음과 같이 정의한다.

$$V_i(\bar{e}_i) = \bar{e}_i^T P_i \bar{e}_i \quad (17)$$

식 (17)의 시간도함수를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(\bar{e}_i) &= 2\bar{e}_i^T P_i \dot{\bar{e}}_i \\ &= -\theta_i \|\bar{e}_i\|^2 + 2\bar{e}_i^T P_i \Delta_{\theta_i} B_i \Delta_{\theta_i}^{-1} \bar{e}_i \\ &\quad + 2\bar{e}_i^T P_i \Delta_{\theta_i} M_i F_{i(i-1)} M_{(i-1)}^{-1} \Delta_{\theta_{i-1}}^{-1} \bar{e}_{i-1} + \dots \\ &\quad + 2\bar{e}_i^T P_i \Delta_{\theta_i} M_i F_{i1} M_1^{-1} \Delta_{\theta_1}^{-1} \bar{e}_1 \\ &\quad + 2\bar{e}_i^T P_i \Delta_{\theta_i} M_i r_{if} - 2\bar{e}_i^T P_i K_i r_{ih} \\ &\quad + 2\bar{e}_i^T P_i \Delta_{\theta_i} \dot{M}_i M_i^{-1} \Delta_{\theta_i}^{-1} \bar{e}_i \\ &\leq -\theta_i \|\bar{e}_i\|^2 \\ &\quad + 2\|P_i \bar{e}_i\| \|\Delta_{\theta_i} B_i \Delta_{\theta_i}^{-1}\| \|\bar{e}_i\| \\ &\quad + 2\|P_i \bar{e}_i\| \|\Delta_{\theta_i} M_i F_{i(i-1)} M_{(i-1)}^{-1} \Delta_{\theta_{i-1}}^{-1}\| \|\bar{e}_{i-1}\| + \dots \\ &\quad + 2\|P_i \bar{e}_i\| \|\Delta_{\theta_i} M_i F_{i1} M_1^{-1} \Delta_{\theta_1}^{-1}\| \|\bar{e}_1\| \\ &\quad + 2\|P_i \bar{e}_i\| \|\Delta_{\theta_i} M_i\| \|r_{if}\| + 2\|P_i \bar{e}_i\| \|K_i\| \|r_{ih}\| \\ &\quad + 2\|P_i \bar{e}_i\| \|\Delta_{\theta_i} \dot{M}_i M_i^{-1} \Delta_{\theta_i}^{-1}\| \|\bar{e}_i\| \end{aligned}$$

위 식에서 모든 항은 $\Delta_{\theta_i} H \Delta_{\theta_i}^{-1}$ 형태의 행렬들을 포함하고 있다. 이런 형태의 행렬들의 (s, t) 원소는 다음과 같은 형태를 가진다.

$$h_{(s,t)} \theta_k^s / \theta_j^t, 1 \leq s \leq n_j, 1 \leq t \leq n_k, j \geq k \quad (18)$$

식(1)의 모든 벡터필드는 C^∞ 이므로 모든 $x(t) \in X$, $\hat{x}(t) \in V, u \in U$ 에 대하여 $h_{(s,t)}$ 는 유계이다. 여기서 θ_i 를 아래 식을 항상 만족하도록 설계한다.

$$\theta_i \geq 1, \theta_i \geq \theta_{i-1}^n \quad (19)$$

그러면 $\Delta_\theta H \Delta_\theta^{-1}$ 의 모든 원소는 식 (18)로 부터 항상 유계가 됨을 알 수 있다. 따라서 모든 $x(t) \in X$, $\hat{x}(t) \in V, u \in U$ 에 대하여 다음 식을 만족하는 θ_i 와 무관한 양의 상수 $c_i, k_{ij}, l_{if}, l_{ih}, l_{ip}, d_i$ 가 항상 존재한다.

$$\begin{aligned} \|\Delta_\theta B_i \Delta_\theta^{-1}\| &\leq c_i \\ \|\Delta_\theta M_i F_{ij} M_j^{-1} \Delta_\theta^{-1}\| &\leq k_{ij} \\ \|\Delta_\theta M_i\| &\leq l_{if} \\ \|K_i\| &\leq l_{ih}, \|P_i\| \leq l_{ip} \\ \|\Delta_\theta M_i M_i^{-1} \Delta_\theta^{-1}\| &\leq d_i \end{aligned} \quad (20)$$

또한 식 (11)과 연속함수의 성질로부터 임의의 양의 상수 $\gamma_{i1}, \dots, \gamma_{in}, \alpha_i$ 에 대하여 식 (7)과 다음 식(21)을 만족시키는 양의 상수 δ_i, ζ_i 가 항상 존재한다.

$$\begin{aligned} \|e(t)\| \leq \delta_i, \|u(t)\| \leq \zeta_i \Rightarrow \\ \|r_{if}\| \leq \gamma_{i1}\|e_1\| + \dots + \gamma_{in}\|e_n\|, \|r_{ih}\| \leq \alpha_i \|e_i\| \end{aligned} \quad (21)$$

식 (20)과 (21)로부터 식 (17)의 시간도함수는 다음처럼 간략하게 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{V}(\bar{e}_i) \leq & -\theta_i \|\bar{e}_i\|^p \\ & + 2c_i l_{ip} \|\bar{e}_i\|^p \\ & + 2k_{i(i-1)} l_{ip} \|\bar{e}_i\| \|\bar{e}_{i-1}\| + \dots + 2k_{i1} l_{ip} \|\bar{e}_i\| \|\bar{e}_1\| \\ & + 2l_{if} l_{ip} \|\bar{e}_i\| (\gamma_{i1} \|e_1\| + \dots + \gamma_{in} \|e_n\|) + 2l_{ih} l_{ip} \alpha_i \|\bar{e}_i\| \|e_i\| \\ & + 2d_i l_{ip} \|\bar{e}_i\|^p \end{aligned} \quad (22)$$

다음처럼 상수 κ_i 를 정의하자.

$$\kappa_i = \max_{x \in X, u \in U, e \in V} \|M_i^{-1}(\hat{x}, u)\|$$

그러면 다음 식을 쉽게 얻을 수 있다.

$$\|e_i\| \leq \|M_i^{-1} \Delta_\theta^{-1}\| \|\bar{e}_i\| \leq \kappa_i \theta_i^n \|\bar{e}_i\| \quad (23)$$

$\gamma_{ij} = 1/(\kappa_j \theta_j^n), \alpha_i = 1/(\kappa_i \theta_i^n)$ 으로 정의하고 식 (23)과 삼각 부등식을 이용하면 식 (22)는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{V}(\bar{e}_i) \leq & -\theta_i \|\bar{e}_i\|^p \\ & + 2c_i l_{ip} \|\bar{e}_i\|^p \\ & + 2k_{i(i-1)} l_{ip} \|\bar{e}_i\| \|\bar{e}_{i-1}\| + \dots + 2k_{i1} l_{ip} \|\bar{e}_i\| \|\bar{e}_1\| \\ & + 2l_{if} l_{ip} \|\bar{e}_i\| (\gamma_{i1} \|\bar{e}_1\| + \dots + \gamma_{in} \|\bar{e}_n\|) + 2l_{ih} l_{ip} \|\bar{e}_i\| \\ & + 2d_i l_{ip} \|\bar{e}_i\|^p \\ \leq & (-\theta_i + \eta_i) \|\bar{e}_i\|^p + \sum_{j=1}^{i-1} \mu_{ij} \|\bar{e}_j\|^p \end{aligned} \quad (24)$$

여기서 μ_{ij}, η_i 는 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} \mu_{ij} &= k_{ij} l_{ip} + l_{if} l_{ip} \\ \eta_i &= 2c_i l_{ip} + 2l_{ih} l_{ip} + 2d_i l_{ip} + (i+1) l_{if} l_{ip} + \sum_{j=1}^{i-1} k_{ij} l_{ip} \end{aligned}$$

마지막으로 전체 관측기 시스템에 대하여 다음과 같은 리아푸노프 후보함수를 정의한다.

$$V(\bar{e}) = \sum_{i=1}^p V_i(\bar{e}_i) \quad (25)$$

여기서 $\bar{e} = [\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_p]^T$ 이다. 식 (24)로부터 식 (25)의 시간 도함수는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\dot{V}(\bar{e}) \leq \sum_{i=1}^p (-\theta_i + \lambda_i) \|\bar{e}_i\|^p \quad (26)$$

따라서 임의의 양의 상수 Σ 에 대하여 다음 식 (27)을 만족하는 θ_i 가 반드시 존재한다.

$$\dot{V}(\bar{e}) \leq -2\Sigma \|\bar{e}\|^p \quad (27)$$

(25)와 (27)로부터 다음을 쉽게 얻는다.

$$\frac{\dot{V}}{V} \leq -\frac{2\Sigma}{\max_i \lambda_M(P_i)}$$

이것은 리아푸노프 함수의 성질로부터 다음을 의미한다.

$$\|\bar{e}(t)\| \leq \sqrt{\frac{\max_i \lambda_M(P_i)}{\min_i \lambda_m(P_i)}} \|\bar{e}(0)\| e^{-\sigma t} \quad (28)$$

여기서 $\lambda_M(P_i), \lambda_m(P_i)$ 는 각각 P_i 의 최대 고유값, 최소 고유값을 의미하고 σ 는 다음처럼 정의한다.

$$\sigma = -\frac{\Sigma}{\max_i \lambda_M(P_i)}$$

식 (28)로부터 다음 식을 만족하는 $\psi > 0$ 가 반드시 존재한다.

$$\|e(0)\| \leq \psi \Rightarrow \|e(t)\| \leq \epsilon \quad \forall t \geq 0$$

ψ 의 존재로부터 식 (7)이 항상 만족됨을 알 수 있다. 결론적으로 $\|e(0)\| \leq \min(\psi, \delta_i), \|u(t)\| \leq \min(\zeta_i)$ 인 모든 $e(0), u(t)$ 에 대하여 식 (27)은 제안한 관측기가 지수 함수적 수렴성을 가짐을 보여준다. ■

III. 모의실험

본 논문에서 제안한 설계 방법의 유효성을 입증하기 위하여 다음과 같은 비선형 시스템을 고려해보자.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2^3 + x_2 + 0.01x_1u \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + (1 - x_1^2)x_2 + x_3u \\ \dot{x}_3 &= x_4^3 + x_4 + 0.01x_2x_3exp(u) \\ \dot{x}_4 &= -x_3 + (1 - x_3^2)x_4 + u \\ y_1 &= x_1 \\ y_2 &= x_3 \end{aligned} \quad (29)$$

위 시스템은 $z_1 = [x_1, x_2]^T, z_2 = [x_3, x_4]^T$ 으로 정의하면 다음과 같이 식 (1)과 같은 형태로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= f_1(z_1, u, y_2) \\ \dot{z}_2 &= f_2(z_2, u) \\ y_1 &= z_{11} \\ y_2 &= z_{21} \end{aligned}$$

여기서 f_1, f_2 는 다음처럼 정의한다.

$$\begin{aligned} f_1(z_1, u, y_2) &= \begin{pmatrix} z_{12}^3 + z_{12} + 0.01z_{11}u \\ -z_{11} + (1 - z_{11}^2)z_{12} + y_2u \end{pmatrix} \\ f_2(z_2, u) &= \begin{pmatrix} z_{22}^3 + z_{22} + 0.01z_{12}z_{21}exp(u) \\ -z_{21} + (1 - z_{21}^2)z_{22} + u \end{pmatrix} \end{aligned}$$

식 (29)가 가정 1을 만족함을 수학적으로 증명하는 것은 매우 어렵다. 따라서 여기서는 유계된 입력을 가했을 때 상태 변수들이 유계됨을 모의실험을 통하여 보이도록 하겠다. 유계된 입력신호 $u(t) = \sin 0.3t$ 와 초기 상태 $z(0) = [1, 1, 1, 1]^T$ 으로 설정한 후 모의실험을 수행한 결과, 그림 1, 2처럼 식 (29)의 시스템은 마치 Limit Cycle처럼 동작한다. 따라서 식 (29)는 가정 1을 만족한다. 가정 2를 만족하는지 보이기 위하여 행렬 M_1, M_2 를 계산하면 다음과 같다.

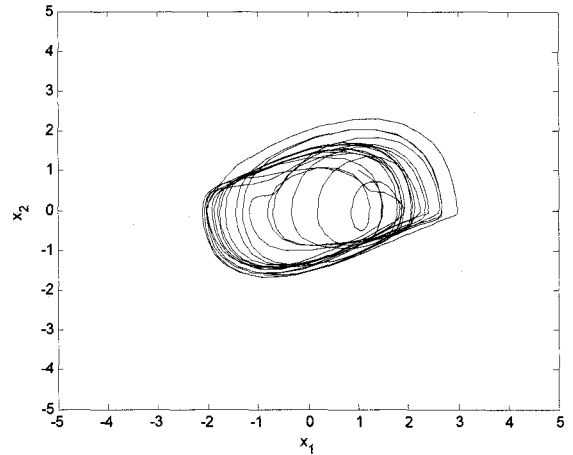


그림 1. 식 (29)의 x_1 과 x_2 의 궤적

Fig. 1. Trajectory of x_1 and x_2 in (29).

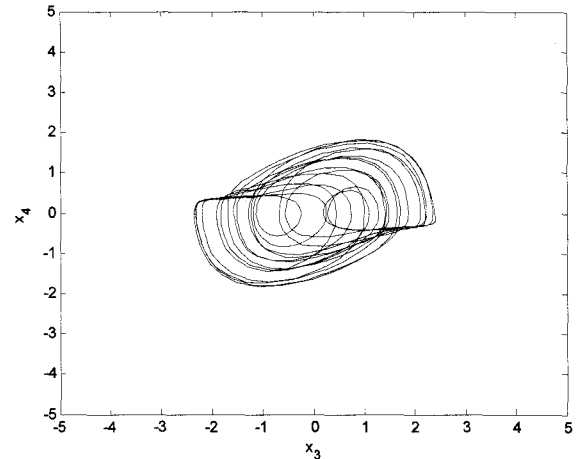


그림 2. 식 (29)의 x_3 과 x_4 의 궤적

Fig. 2. Trajectory of x_3 and x_4 in (29).

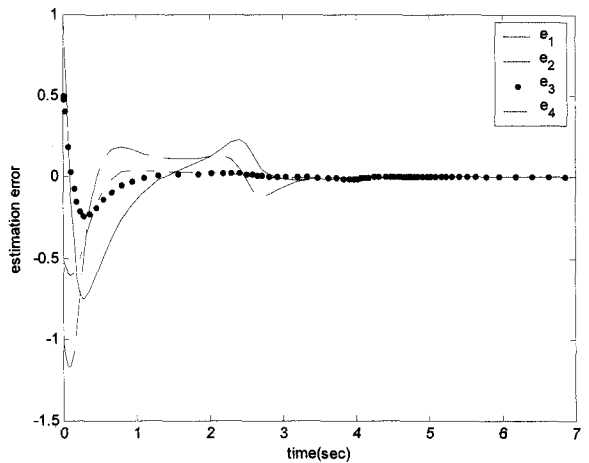


그림 3. 관측기 (30)의 추정오차 $e = z - \hat{z}$

Fig. 3. The estimation error $e = z - \hat{z}$ of observer (30).

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.01u & 3z_{12}^2 + 1 \end{pmatrix}$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.01z_{12}e^u & 3z_{22}^2 + 1 \end{pmatrix}$$

위 식으로부터 가정 2가 만족됨을 쉽게 알 수 있다. 이제 식 (29)가 가정 1과 2를 만족시키므로 다음과 같은 관측기를 설계할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{z}}_1 &= f_1(\hat{z}_1, u, y_2) + M_1^{-1}(\hat{z}_1, u) \Delta_{\theta_1}^{-1} K_1 (y_1 - \hat{z}_{11}) \\ \dot{\hat{z}}_2 &= f_2(\hat{z}_1, \hat{z}_2, u) + M_2^{-1}(\hat{z}_1, \hat{z}_2, u) \Delta_{\theta_2}^{-1} K_2 (y_2 - \hat{z}_{21}) \end{aligned} \quad (30)$$

설계 변수는 $\theta_1 = 1, \theta_2 = 2$, $K_1 = [2, 1]^T, K_2 = [2, 1]^T$ 으로 설정하고 모의실험을 수행하였다. 그림 3은 모든 추정 오차가 0으로 수렴함을 보여준다. 따라서 제안한 설계 방법을 이용하여 식 (29)의 관측기를 설계할 수 있음을 보였다.

IV. 결 론

본 논문에서 MIMO 비선형 시스템의 로컬 관측기 설계 방법을 제안하였다. 입력과 상태 변수의 유계조건과 가관측성 행렬을 이용하여 제안한 관측기가 로컬영역에서 지수함수적 수렴성을 가짐을 증명하였다. 제안한 방법은 존재하는 연구 결과보다 더 넓은 범위의 시스템에 응용 가능하다는 장점을 가진다. 마지막으로 모의실험을 통하여 제안한 방법의 타당성을 입증하였다.

참 고 문 헌

- [1] A. J. Krener and A. Isidori, "Linearization by output injection and nonlinear observers", *Systems & Control Letters*, vol. 3, pp. 47-52, 1983.
- [2] X.-H. Xia and W.-B. Gao, "Non-linear observer design by observer canonical forms", *Int. J. Contr.*, vol. 47, pp. 1081-1100, 1988.
- [3] M. Hou and A.C. Pugh, "Observer with linear error dynamics for nonlinear multi-output systems", *Systems & Control Letters*, vol. 37, pp. 1-9, 1999.
- [4] Alan F. Lynch and Scott A. Bortoff, "Nonlinear Observers with Approximately Linear Error Dynamics: The Multivariable Case", *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, vol. 46, no. 6, pp.

927-932, June 2001.

- [5] J. P. Gauthier, H. Hammouri, and S. Othman, "A simple observer for nonlinear systems: Application to Bioreactors", *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, vol. 37, no. 6, pp. 875-880, June 1992.
- [6] Hyungbo Shim, Young I. Son, Jin H. Seo, "Semi-global observer for multi-output nonlinear systems", *Systems & Control Letters*, vol. 42, pp. 233-244, 2001.
- [7] K. Busawon and J. de Leon-Morales, "An observer design for uniformly observable nonlinear systems", *Int. J. Control*, vol. 73, no. 15, pp. 1375-1381, 2000.
- [8] K. Busawon, M. Saif, "A State Observer for Nonlinear Systems", *IEEE Trans. Auto. Contr.*, vol. 44, no. 11, pp. 2098-2103, Nov., 1999.

저 자 소 개



이 성 렬(정회원)

2003년 연세대학교 전기전자
공학과 박사졸업.

2003년~2006년 삼성전자
책임연구원

2007년~현재 군산대학교
전자정보공학부 전임강사

<주관심분야 : 비선형제어 및 응용>