

적응형 이동평균(A-MA) 관리도의 경제적-통계적 설계

임 태 진[†]

승실대학교 산업·정보시스템공학과

Economic-Statistical Design of Adaptive Moving Average (A-MA) Control Charts

Tae-Jin Lim

Department of Industrial and Information Systems Engineering, Soongsil University, Seoul 156-743, Korea

This research proposes a method for economic-statistical design of adaptive moving average (A-MA) charts. The basic idea of the A-MA chart is to accumulate previous samples selectively in order to increase the sensitivity. The A-MA chart is a kind of adaptive chart such as the variable sampling size (VSS) chart. A major advantage of the A-MA chart over the VSS chart is that it is easy to maintain rational subgroups by using the fixed sampling size. A steady state cost rate function is constructed based on Lorenzen and Vance (1986) model. The cost rate function is optimized with respect to five design parameters. Computational experiments show that the A-MA chart is superior to the VSS chart as well as to the Shewhart \bar{X} chart in the economic-statistical sense.

Keywords: Adaptive Scheme, ARL, Control Chart, Economic-statistical Design, MA Chart

1. 서론

관리도는 공정평균의 변화를 감시하기 위해 널리 사용되는 통계적 공정관리 도구로서, 전통적인 Shewhart \bar{X} 관리도는 표본 크기, 샘플링간격, 관리한계선 등을 필요로 한다. 이러한 세 가지의 모수를 결정하는 절차를 관리도의 설계라 한다. 관리도 설계에서는 통계적인 기준이 중요시되는데, 관리상태 하에서의 평균 런 길이(ARL : Average Run Length)와 이상신호를 발생하기까지의 평균시간(ATS : Average Time to Signal)을 통계적 기준으로 사용한다. ARL은 이상신호가 발생할 때까지 필요한 샘플링 회수의 기대값을 의미하고, ATS는 이상원인이 발생한 시점으로부터 이상신호 발생시점까지의 평균시간을 나타낸다.

통계적 기준만으로 설계된 관리도는 바람직한 통계적 속성을 만족하지만 운영비용이 높아질 수 있다는 단점이 있다. Duncan(1956)은 시간당 운영비용을 낮추기 위하여 관리도의 설계에 경제적인 기준을 고려하였고, 그 이후로 지금까지 많은 연구가 수행되어 왔다. 일반적인 경제적 접근방법은 공정을 감

시하고 관리하는데 관련된 모든 비용요소를 고려하여 비용합수를 구성하여, 이 비용합수를 최소화하는 설계모수들의 최적해를 구한다.

Woodall(1986)은 경제적 모형에서는 최소의 운영비용이 소요되도록 관리도를 설계할 수는 있지만 통계적인 속성이 무시되어 오류신호(false signal)의 증가와 같은 문제점들이 생겨날 수 있다고 지적하였고, 공정에 대한 불필요한 조정 때문에 품질 특성치의 분산이 증가할 수 있다고 주장하였다.

Prabhu *et al.*(1997)은 이러한 문제점을 해결하기 위하여 관리상태와 이상상태에서의 ATS에 제약을 추가하고, 추가된 제약에 의해 필요한 통계적 속성을 만족하면서 비용합수를 최소화하는 접근방법을 사용하였다. 물론 순수한 경제적 설계와 비교해 봤을 때 새로운 제약의 추가로 더 많은 비용이 소요될 수 있으나, 이 손실은 오류신호의 감소와 공정평균의 이동을 빨리 감지할 수 있다는 이익으로 상쇄된다.

관리도의 전통적인 샘플링 방법은 공정으로부터 일정한 크기의 표본을 일정한 간격으로 취하는 것이다. Shewhart \bar{X} 관

본 논문은 승실대학교 교내연구비 지원에 의하여 수행되었음.

[†] 연락저자 : 임태진, 156-743 서울시 동작구 상도동 1-1 승실대학교 산업·정보시스템공학과, Tel : 02-820-0695, Fax : 02-825-1094,

E-mail : tjlim@ssu.ac.kr

2007년 12월 10일 접수; 2008년 2월 3일 수정본 접수; 2008년 4월 1일 게재 확정.

리도는 이러한 FSSI(Fixed Sample Size and Sampling Interval) 방법을 사용하여 공정평균의 큰 이동을 감지하는 데는 우수하나, 작은 이동에는 둔감하다. 적응형 관리도는 표본 통계량의 위치에 따라 다음 샘플링의 간격이나 표본크기를 변화시킴으로써 FSSI 관리도의 성능을 향상시키고자 한 것이다(Tagaras, 1998). 적응형 관리도의 일종인 VSS(Variable Sample Size) 관리도는 직전 통계량의 위치에 따라 표본크기만을 변화시키는 방식을 사용한다.

VSS 관리도를 적용하면 FSSI 관리도에 비해 우수한 통계적 특성을 갖는다는 사실은 이미 밝혀진 바 있다(Prabhu *et al.*, 1993; Costa, 1994). 그러나 VSS 방식은 관리통계량의 위치에 따라 표본크기를 바꾸어 주어야 하므로 합리적인 부분군(rational subgroup)을 유지하는데 어려움이 있다. 현실적으로 각각의 샘플링은 동일한 조건에서 수행되어야 하는데, 표본크기가 크게 바뀐다면 동일한 조건을 유지할 수 없게 되는 것이다.

따라서 본 연구에서는 표본크기를 고정시키고, 관리통계량의 위치에 따라 가변 기간(time span)의 누적된 이동평균을 사용하는 S-MA(Selective Moving Average) 관리도(Lim, 2007)를 대안으로 고려한다. 단, 이전 통계량들의 타점 위치에 따라 다음 이동평균(MA) 통계량의 누적 기간이 변한다는 점에서 선택적(selective)이라는 표현보다는 보다 일반적인 적응형(adaptive)이라는 표현을 적용하여 A-MA(Adaptive Moving Average) 관리도라 명명하였다.

Lorenzen and Vance(1986) 모형에 기초하여 A-MA 관리도의 경제적-통계적 설계 절차를 제안하고, 수치예제를 통하여 A-MA 관리도의 경제적-통계적 특성이 VSS 관리도에 비해 우수함을 보인다.

제 2장에서는 A-MA 관리도를 소개하고, 제 3장에서는 A-MA 관리도의 경제적-통계적 설계 절차를 제안한다. 제 4장에서는 수치예제를 통하여 A-MA 관리도의 효율성을 조사하고, 제 5장에서는 결론 및 추후연구 방향을 제시한다.

2. A-MA 관리도

본 연구에서 사용하는 기호는 다음과 같다.

- $\Phi(\cdot)$: 표준정규누적분포함수
- \bar{X}_i : i 번째 표본군의 표본평균
- Z_i : i 번째 샘플링의 표준화된 통계량
- **A-MA 설계 모수(design parameters)**
 - k : 표준화된 관리한계선의 폭
 - w : 표준화된 표본평균의 임계한계선
 - n_0 : 고정 표본크기
 - h_0 : 고정 샘플링간격
 - L : 관리길이

- **A-MA 관리도 영역**

- $I_1 = [-w, w]$: 일치영역

- $I_2 = [-k, -w] \cup (w, k]$: 의심영역

- $I_3 = (-\infty, -k) \cup (k, \infty)$: 불일치영역

- **비용 모수(cost parameters)**

- a : 고정 샘플링비용
- b : 단위당 가변 샘플링비용
- C_0 : 관리상태에서 불량품 생산에 의해 소요되는 기대비용
- C_1 : 이상상태에서 불량품 생산에 의해 소요되는 기대비용
- W : 이상원인을 조사하고 위치를 알아내 제거하는데 소요되는 비용
- Y : 오류신호 1건당 발생 비용

- **공정 모수(process parameters)**

- λ : 이상원인 발생률
- μ_0 : 관리상태에서의 공정평균
- μ_1 : 이상상태에서의 공정평균
- σ : 공정 표준편차
- δ : 이상원인에 의한 공정평균의 표준화된 이동, 즉 $\mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma / \sqrt{n_0}$
- γ_1 : 지시변수 (이상원인을 조사하는 동안 공정이 멈추면 0, 아니면 1)
- γ_2 : 지시변수(공정을 수리하는 동안 공정이 멈추면 0, 아니면 1)

- **시간 모수(time parameters)**

- T_0 : 오류신호를 조사하는데 소요되는 평균시간
- T_1 : 이상원인에 대한 평균 조사시간
- T_2 : 이상원인을 제거하는데 소요되는 평균시간
- e : 하나의 관측치를 샘플링하고 검사, 기록하는데 소요되는 평균시간

- **통계량(statistics)**

- ARL_0 : 관리상태에서 평균 런 길이
- ARL_δ : 이상상태에서 평균 런 길이
- ATS_0 : 관리상태에서 이상신호가 발생하기까지 평균 소요시간, $ATS_0 = h_0 \cdot ARL_0$
- ATS_δ : 이상상태에서 이상신호가 발생하기까지 평균 소요시간, $ATS_\delta = h_0 \cdot ARL_\delta$
- $p_{r,s}(\delta)$: 공정평균이 $\delta\sigma / \sqrt{n_0}$ 이동되었을 때 상태 r 로부터 상태 s 로의 전이확률
- P_δ : 전이확률 $p_{r,s}(\delta)$ 를 원소로 갖는 상태 전이행렬
- Q_δ : 흡수상태를 제외한 상태 전이행렬
- b : 초기상태 확률 벡터
- π : 정상(stationary) 확률 벡터

- **제약(constraints)**

- l : ATS 제약의 하한, $ATS_0 \geq l$
- u : ATS 제약의 상한, $ATS_\delta \leq u$

본 연구에서 사용하는 가정은 다음과 같다.

- ① 품질특성치는 정규분포를 따른다.
- ② 공정 이상원인은 하나만을 고려한다.
- ③ 공정은 관리상태에서 시작하고, 공정의 이상원인은 공정 평균을 변화시킨다.
- ④ 이상원인의 발생시간은 지수분포를 따른다.
- ⑤ 이상원인이 발생하면, 이를 발견하여 제거하기 전에 저절로 소멸되지 않는다.

A-MA 관리도는 표준화된 관리통계량을 사용하며, 표본크기 n_0 , 관리한계 k , 임계한계 w , 관리길이 L , 샘플링간격 h_0 등 다섯 가지의 설계모수를 갖는다. 고정된 표본크기와 샘플링간격을 사용하므로 임계한계만 추가하면 기존의 슈하트 \bar{X} 관리도와 유사하게 운영할 수 있다. 표준화된 MA 통계량을 계산하여 관리하며, 관리통계량이 관리한계 k 를 벗어나거나 L 개의 연속된 관리통계량이 임계한계 w 를 벗어나면 이상신호를 발생한다.

관리길이 L 를 도입한 이유는 두 가지이다. 첫째, 공정평균의 이동이 작은 경우에 관리통계량이 관리한계를 벗어나지 않고 의심영역에 계속 타점되는 경우를 방지하기 위함이다. 둘째, 관리도의 통계적 분석을 위한 마코프(Markov) 연쇄의 상태(state) 개수를 유한하게 하고자 함이다.

A-MA 관리도에서는 관리통계량이 의심영역(I_2)에 속하면 표본을 누적하여 표준화된 관리통계량을 계산한다. 반면 관리통계량이 일치영역(I_1)에 속하면 다음 샘플링의 표본만으로 관리통계량을 계산한다.

관리상태에서의 공정평균을 μ_0 , 공정 표준편차를 σ 라 하면, i 번째 관리통계량 Z_i 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$Z_1 = \sqrt{n_0} (\bar{X}_1 - \mu_0) / \sigma,$$

$$Z_i = \begin{cases} \sqrt{n_0} (\bar{X}_i - \mu_0) / \sigma, & \text{if } Z_{i-1} \in I_1; \\ \sqrt{j n_0} (\sum_{m=i-j+1}^i \bar{X}_m / j - \mu_0) / \sigma, & \text{if } Z_{i-j} \in I_1, Z_{i-j+1}, \dots, Z_{i-1} \in I_2. \end{cases} \quad (1)$$

$(1 \leq j \leq \text{Min}(i, L); i \geq 2)$

공정 특성치는 정규분포를 따르고, 공정은 관리상태 $N(\mu_0, \sigma^2)$ 에서 시작하며, 이상원인이 발생하면 공정평균이 $\mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma / \sqrt{n_0}$ 으로 이동한다고 가정하자. 관리통계량에 누적된 표본크기가 $j n_0$ 이고, 공정평균이 μ_1 으로 이동하였다면, 관리통계량이 영역 I_1, I_2, I_3 에 타점될 확률은 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned} p_1(j, \delta) &= \Phi(w - \delta\sqrt{j}) - \Phi(-w - \delta\sqrt{j}), \\ p_3(j, \delta) &= 1 - \Phi(k - \delta\sqrt{j}) + \Phi(-k - \delta\sqrt{j}), \\ p_2(j, \delta) &= 1 - p_1(j, \delta) - p_3(j, \delta). \end{aligned} \quad (2)$$

일반적으로 MA 관리도의 성능은 지수이동평균(EWMA) 관

리도나 누적합(CUSUM) 관리도에 비해 떨어진다는 것이 정설이다. A-MA 관리도의 착안점은 가변 기간(span)을 도입하여 공정의 상태가 의심스러울 때 긴 기간을 누적한 MA 통계량을 사용하여 성능을 향상시키고자 한 것이다. 즉, A-MA 관리도는 임계한계를 설정하여 이를 벗어나는 경우에만 누적된 MA 통계량을 사용함으로써 공정 평균의 이동을 보다 민감하게 감지하고자 고안된 것이다. 샘플링 방식에서 VSS 관리도와는 달리 고정된 표본크기를 사용함으로써 합리적 부분군을 유지하기 쉬우며, 의심영역의 표본을 누적함으로써 표본크기를 증가시킨 효과를 얻고자 한 것이다.

3. A-MA 관리도의 경제적-통계적 설계

관리도의 경제적-통계적 설계에서는 통계적 제약(주로 ATS 제약) 하에서 장기적인 평균 공정 운용비용률을 최적화한다. 이 비용률은 재생보상정리(renewal reward theorem)에 따라 주기 당 평균 운용비용을 평균 주기의 길이로 나누어 계산한다.

하나의 주기는 공정의 시작부터 이상원인이 제거될 때까지 경과된 시간으로 정의된다. 이상원인의 발생에 의해 공정은 이상상태가 되며, 공정평균은 다른 값으로 이동한다. 공정의 시작부터 이상원인이 발생하는 시점까지를 관리상태라 하고, 관리상태의 끝부터 이상원인이 제거될 때까지를 이상상태라 하는데, 공정이 관리상태인 경우에도 이상신호가 발생할 수 있다. 이러한 오류신호는 실제 이상원인에 의한 것인지 조사되어야 하기 때문에 추가의 비용과 시간이 소요된다.

3.1 A-MA 관리도의 통계량

Lim(2007)은 마코프 모형을 이용하여 A-MA 관리도의 정상(stationary) ARL을 계산하였다. 그 결과를 요약하면 다음과 같다.

- **상태정의**

관리상태 : $(a), (a = 1, \dots, L)$
 이상상태 : $(a, b), (a = 1, \dots, L; b = 1, \dots, a)$
 단, a = 통계량 Z_i 에 누적될 기간,
 b = 통계량 Z_i 에 누적될 δ 의 배수

- **상태 전이행렬**

관리상태 : $Q_0, (L \times L)$
 이상상태 : $Q_\delta, (M \times M), M \equiv L(L+1)/2$

- **관리상태 하의 정상 확률벡터**

$\pi_0 = (\pi_{(1)}, \pi_{(2)}, \dots, \pi_{(L)})^T,$
 단, $\pi_{(i)} = \frac{[p_2(\cdot, 0) / \{p_1(\cdot, 0) + p_2(\cdot, 0)\}]^{i-1}}{\sum_{j=1}^L [p_2(\cdot, 0) / \{p_1(\cdot, 0) + p_2(\cdot, 0)\}]^{j-1}}$

- **관리상태 하의 ARL**

$$ARL_0 = \pi_0^T (I - Q_0)^{-1} \mathbf{1}_L, \quad (3)$$

단, $(I - Q_0)^{-1} \mathbf{1}_L = (a_{(1)}, \dots, a_{(L)})^T$,

$$a_{(i)} = \sum_{j=0}^{L-i} p_2(\cdot, 0)^j / D_0,$$

$$D_0 = |I - Q_R| = 1 - p_1(\cdot, 0) \sum_{j=0}^{L-1} p_2(\cdot, 0)^j$$

• 이상상태 하의 ARL

$$ARL_\delta = \pi^T (I - Q_\delta)^{-1} \mathbf{1}_M, \tag{4}$$

$$\pi = (\pi_{(1)}, \pi_{(2)}, 0, \pi_{(3)}, 0, \dots, \pi_{(L)}, 0, \dots, 0)^T,$$

$$(I - Q_\delta)^{-1} \mathbf{1}_M = (a_{(1,1)}(\delta), a_{(2,1)}(\delta), a_{(2,2)}(\delta), \dots, a_{(L,L)}(\delta))^T$$

$$a_{1,1}(\delta) = \sum_{i=1}^L u_i(\delta) / D_\delta,$$

$$a_{i,1}(\delta) = v_i(\delta) a_{1,1}(\delta) + e_i(\delta), (2 \leq i \leq L)$$

$$u_1(\delta) = 1, u_i(\delta) = \prod_{j=1}^{i-1} p_2(j, \delta), (2 \leq i \leq L)$$

$$v_1(\delta) = 1, v_i(\delta) = \sum_{j=1}^{L-i+1} \left[p_1(i+j-1, \frac{j\delta}{i+j-1}) \times \prod_{m=1}^{j-1} p_2(i+m-1, \frac{m\delta}{i+m-1}) \right]$$

$$e_1(\delta) = 0, e_i(\delta) = \sum_{j=1}^{L-i+1} \left[\prod_{m=1}^{j-1} p_2(i+m-1, \frac{m\delta}{i+m-1}) \right]$$

$$D_\delta = 1 - \sum_{i=1}^L \left[p_1(i, \delta) \prod_{j=1}^{i-1} p_2(j, \delta) \right],$$

단, $\prod_{j=1}^0 (\cdot) \equiv 1$ 로 정의한다.

3.2 단위시간당 비용함수

Lorenzen and Vance(1986)의 모형을 이용하여 단위시간당 비용함수를 도출한다.

<Figure 1>에 나타난 바와 같이 기대주기(cycle)는 아래와 같은 요소로 구성된다.

$$E[T] = E[A_1 + A_2 + A_3] \tag{5}$$

- ① 관리상태 경과시간(A_1)
- ② 이상원인 방치시간(A_2)
- ③ 이상원인 탐색 및 제거시간(A_3)

관리상태 경과시간은 실제 관리상태 지속시간의 기대값인 $1/\lambda$ 에 오류신호 발생 시 공정이 정지하는 경우($\gamma_1 = 0$) 이상원인 조사시간($s \alpha T_0$)이 추가될 수 있으므로 다음과 같다.

$$E[A_1] = 1/\lambda + (1 - \gamma_1) s \alpha T_0 \tag{6}$$

단, α 는 유의수준으로서 $\alpha = 1/ARL_0$ 이며, s 는 관리상태에서의 기대 샘플링횟수로서, 다음과 같이 계산된다.

$$s = \sum_{i=0}^{\infty} \int_{ih_0}^{(i+1)h_0} i \lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{e^{-\lambda h_0}}{1 - e^{-\lambda h_0}} \tag{7}$$

평균 이상원인 방치시간은 이상상태에서의 평균 샘플링횟수(ARL_δ)에 샘플링간격(h_0)을 곱한 시간에서 이상원인이 발생한 샘플링구간에서의 이상원인 발생 시점(τ)을 제하여 다음과 같이 계산한다.

$$E[A_2] = h_0 ARL_\delta - \tau = ATS_\delta - \tau, \tag{8}$$

$$\text{단, } \tau = \frac{1}{\lambda} - s h_0 = \frac{1 - (1 + \lambda h_0) e^{-\lambda h_0}}{\lambda (1 - e^{-\lambda h_0})} \tag{9}$$

이상원인 탐색 및 제거시간에는 마지막 표본 분석시간($e n_0$)과 이상원인에 대한 조사시간(T_1) 및 제거시간(T_2) 등이 포함되므로 다음과 같다.

$$E[A_3] = e n_0 + T_1 + T_2 \tag{10}$$

주기당 기대비용은 아래와 같은 요소로 구성된다.

$$E[C] = B_1 + B_2 + B_3 + W \tag{11}$$

- ① 공정 운영비용(B_1)
- ② 샘플링 비용(B_2)
- ③ 오류신호 비용(B_3)
- ④ 이상원인 조치비용(W)

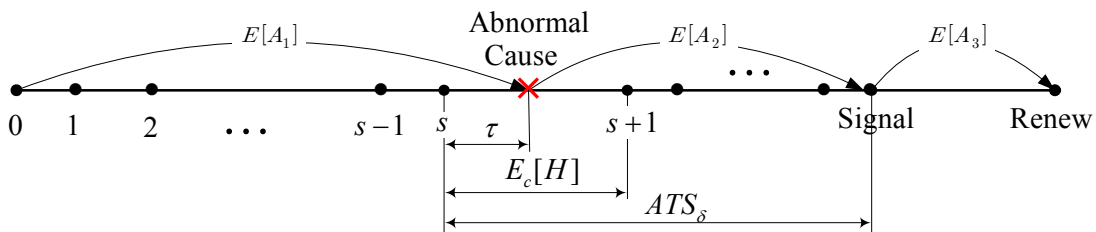


Figure 1. Expected cycle length

공정 운영비용은 관리상태 운영비용 C_0/λ 와 이상상태 운영비용을 합하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$B_1 = C_0/\lambda + C_1(A_2 + A'_3) \quad (12)$$

단, $A_2 + A'_3$ 는 이상상태 경과시간의 기대값을 나타내므로 A'_3 는 다음과 같다.

$$A'_3 = \epsilon n_0 + \gamma_1 T_1 + \gamma_2 T_2 \quad (13)$$

샘플링 비용 또한 관리상태 기대 샘플링횟수(s)와 이상상태 기대 샘플링횟수를 모두 고려하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$B_2 = (a + bn_0)(s + ARL_\delta + A'_3/h_0) \quad (14)$$

평균 오류신호 회수는 $s\alpha$ 이므로 기대 오류신호 비용은 다음과 같다.

$$B_3 = s Y\alpha = s Y/ARL_0 \quad (15)$$

최종적으로 단위시간당 기대비용은 재생보상정리에 의해 다음과 같이 계산되며, 이를 최소화하는 설계모수 L^* , k^* , w^* , n_0^* , h_0^* 를 구한다.

$$E[CR] = E[C]/E[T]$$

3.3 A-MA 관리도의 경제적-통계적 설계 절차

A-MA 관리도의 경제적-통계적 설계 모형은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & E[CR] = E[C]/E[T] \\ \text{Sub. to} \quad & ATS_0 \geq l, ATS_\delta \leq u \end{aligned} \quad (16)$$

단, l 은 관리상태에서 ATS 의 하한을, u 는 이상상태에서 ATS 의 상한을 나타낸다.

● 최적화 과정

단계 1: 공정모수 λ , δ , γ_1 , γ_2 , 비용모수 C_0 , C_1 , a , b , W , Y , 시간모수 T_0 , T_1 , T_2 , e , 통계적 제약모수 l , u , 관리길이의 상한 L_{\max} 등을 결정한다.

단계 2: 관리길이 L 을 1로, 표본크기 n_0 을 0으로 초기화한다.

단계 3: $L \rightarrow L+1$

단계 4: $n_0 \rightarrow n_0 + 1$

단계 5: 상용 비선형 최적화 코드를 이용하여 식 (16)을 최적화하는 (k, w, h_0) 와 비용함수 $E[CR]$ 을 구한다. 이 때

국부 최적해에 빠지지 않도록 다양한 초기값을 시도하여야 한다.

단계 6: $E[CR]$ 이 감소한다면 단계 4로 간다. 그렇지 않으면, 다음 단계로 간다.

단계 7: 각각의 L 에 대하여 최소의 $E[CR]$ 과 이 때의 (n_0, k, w, h_0) 를 저장한다.

단계 8: $L < L_{\max}$ 이면 단계 3으로 간다.

단계 9: 모든 $L = 2, \dots, L_{\max}$ 에 대하여 최소의 $E[CR]$ 을 갖는 (L, n_0, k, w, h_0) 를 최적의 설계모수로 정한다.

경험을 통하여 얻은 최적화 과정에서의 유의할 점은 다음과 같다. 단계 1에서 공정평균의 이동 δ 가 아주 작지 않은 한 L_{\max} 는 20 정도면 충분하다. 그러나 δ 가 아주 작은 ($\delta \leq 0.25$) 경우에는 최적의 관리길이가 크게 나올 수 있으므로 L_{\max} 를 50까지 늘려줄 필요가 있다. 단계 5에서 일반적으로 상용 비선형 최적화 코드는 제약을 고려하지 않으므로 다음과 같이 충분한 큰 페널티 계수(ρ_1, ρ_2)를 포함하여 목적함수를 최소화 한다.

$$\begin{aligned} E[CR] + \rho_1 \text{Min}[0, l - ATS_0] \\ + \rho_2 \text{Min}[0, ATS_\delta - u] \end{aligned} \quad (17)$$

4. 수치예제

본 예제에서는 A-MA 관리도의 경제성을 FSSI 관리도 및 VSS 관리도와 비교하였다. A-MA 관리도는 고정 샘플링간격을 사용하므로 가변 샘플링간격을 사용하는 VSI(Variable Sampling Interval) 관리도나 VSSI(Variable Sample Size and Sampling Interval) 관리도와 비교는 지양하였다.

<Table 1>은 본 예제에 사용된 공정과 비용모수로서, Prabhu *et al.*(1997)의 문제집합을 사용하였으나, 그들이 제시한 설계 결과는 부정확한 것으로 판단되어, 모든 설계 최적화 과정을 본 연구에서 새로 수행하였다.

<Table 2>~<Table 4>는 각각 FSSI 관리도, VSS \bar{X} 관리도, A-MA 관리도에 대한 최소 시간당 기대 비용과 그 때의 최적 설계모수를 나타낸다. <Table 3>과 <Table 4>에서 %R은 FSSI 관리도에 대한 각 관리도의 시간당 기대비용의 상대적 감소율을 나타내며, 이를 도식하면 <Figure 2>와 같다. <Table 5>는 A-MA 관리도의 시간당 기대비용의 상대적 감소율이 높은 경우와 낮은 경우의 공정모수 조합을 정리한 것이다. 이상을 통하여 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

- ① 모든 경우에 있어서 A-MA 관리도의 시간당 기대비용($E[CR]$)이 VSS 관리도에 비해 큰 폭으로 감소하였다.
- ② 모든 경우에 있어서 A-MA 관리도의 주기당 기대비용($E[C]$)이 VSS 관리도에 비해 큰 폭으로 감소하였다.
- ③ 모든 경우에 있어서 A-MA 관리도의 기대주기($E[T]$)가 VSS

Table 1. Process and cost parameters

Fixed	e	T_0	T_1	T_2	γ_1	γ_2	u	l
	0.275	5.5	3.5	8	1	0	500	8
Case	λ	δ	C_0	C_1	Y	W	a	b
1	0.01	0.5	100	250	200	150	1	0.2
2	0.05	1	100	250	500	150	1	0.6
3	0.01	1	200	250	500	150	2	0.2
4	0.05	0.5	200	250	200	150	2	0.6
5	0.01	0.5	100	500	500	150	2	0.6
6	0.05	1	100	500	200	150	2	0.2
7	0.01	1	200	500	200	150	1	0.6
8	0.05	0.5	200	500	500	150	1	0.2
9	0.01	1	100	250	200	300	2	0.6
10	0.05	0.5	100	250	500	300	2	0.2
11	0.01	0.5	200	250	500	300	1	0.6
12	0.05	1	200	250	200	300	1	0.2
13	0.01	1	100	500	500	300	1	0.2
14	0.05	0.5	100	500	200	300	1	0.6
15	0.01	0.5	200	500	200	300	2	0.2
16	0.05	1	200	500	500	300	2	0.6

관리도에 비해 감소하였다.

- ④ 공정평균 이동폭(δ)이 작고, 이상원인 발생률(λ)이 크며, 관리상태 운영비용(C_0)이 작고, 이상상태 운영비용(C_1)이 클수록 A-MA 관리도의 시간당 기대비용 감소율이 크게 나타났다.
- ⑤ 이상원인 발생률(λ)이 작고, 공정평균 이동폭(δ)이 크며, 관리상태 운영비용(C_0)과 이상상태 운영비용(C_1)의 차이가 작은 경우에 A-MA 관리도의 경제적 효과가 작게 나타났다.
- ⑥ A-MA 관리도의 공정 운영비용(B_1)은 모든 경우에 감소하였으나, 샘플링비용(B_2)과 오류신호 비용(B_3)은 증가한 경우도 있었다.
- ⑦ A-MA 관리도의 ATS_δ 는 평균 2.98로서 FSSI 관리도의 4.18이나 VSS 관리도의 3.86에 비해 감소함으로써, 이상상태 운영비용의 감소를 가져왔다.
- ⑧ A-MA 관리도의 평균 표본크기는 3.9개로서, FSSI 관리도의 15.3개에 비해 크게 감소하였다. 또한 VSS 관리도의 표본크기는 1에서 30까지 큰 폭의 변동을 나타내었다. 따라서 A-MA 관리도는 합리적 부분군을 유지하는데 있어서 VSS 관리도나 FSSI 관리도에 비해 상당히 유리한 측면이 있다고 판단된다.

Table 2. Optimal design parameters and cost components for FSSI chart

Case	n_0	h_0	k_0	ARL_0	ARL_δ	ATS_0	ATS_δ	B_1	B_2	B_3	$E[C]$	$E[T]$	$E[CR]$
1	23	1.9	2.9	267.98	3.25	509.16	6.17	13762.69	339.10	38.91	14290.70	123.05	116.14
2	8	1	3.1	516.74	2.54	516.74	2.54	3937.21	160.94	18.87	4267.03	35.75	119.36
3	12	3.3	3	370.40	1.47	1222.31	4.86	22505.31	146.69	40.23	22842.24	118.02	193.54
4	23	2.6	2.8	195.68	2.91	508.78	7.56	8028.86	219.47	7.36	8405.70	44.12	190.54
5	23	1.9	2.9	267.98	3.25	509.16	6.17	17525.38	956.74	97.27	18729.39	123.05	152.21
6	8	0.5	3.3	1034.29	3.14	517.14	1.57	5510.16	194.55	7.64	5862.35	35.02	167.40
7	9	1.4	3	370.40	2.00	518.56	2.80	24038.32	494.06	38.30	24720.68	116.08	212.97
8	20	0.5	3.3	1034.29	6.96	517.14	3.48	10115.50	322.31	19.10	10606.91	40.23	263.65
9	9	2.6	2.8	195.68	1.73	508.78	4.49	12292.28	310.71	38.80	12941.79	117.17	110.45
10	20	0.7	3.2	727.66	5.97	509.36	4.18	5207.54	281.40	19.29	5808.23	40.83	142.25
11	24	2.9	2.8	195.68	2.75	567.49	7.99	24161.62	619.43	86.84	25167.89	124.65	201.91
12	9	1	3.1	516.74	2.17	516.74	2.17	5913.07	77.43	7.55	6298.04	35.65	176.65
13	8	0.7	3.2	727.66	2.82	509.36	1.97	13660.83	398.62	97.82	14457.27	115.32	125.36
14	20	0.7	3.2	727.66	5.97	509.36	4.18	8415.07	609.70	7.72	9332.49	40.83	228.57
15	21	1	3.1	516.74	4.78	516.74	4.78	26776.37	704.03	38.51	27818.91	121.55	228.86
16	8	0.7	3.2	727.66	2.82	509.36	1.97	7661.64	265.43	19.29	8246.36	35.32	233.45
Avg	15.3	1.5	3.1	524.58	3.41	560.39	4.18	13094.49	381.29	36.47	13737.25	79.17	178.96

Table 3. Optimal design parameters and cost components for VSS chart

Case	n_1	n_2	h	k	w	ARL_0	ARL_δ	ATS_0	ATS_δ	B_1	B_2	B_3	$E[C]$	$E[T]$	$E[CR]$	%R
1	1	23	0.58	3.25	1.01	861.46	7.34	502.73	4.28	13054.06	573.87	39.67	13817.60	120.22	114.94	1.0%
2	1	21	0.27	3.46	2.23	1829.81	7.10	500.00	1.94	3632.91	245.25	19.86	4048.02	34.53	117.23	1.8%
3	11	19	5.00	2.58	2.49	100.00	1.34	500.00	6.69	22430.15	90.17	97.52	22767.84	117.72	193.41	0.1%
4	2	27	1.27	3.03	1.26	407.54	5.65	515.81	7.16	7632.01	246.48	7.51	8036.00	42.53	188.96	0.8%
5	1	27	0.63	3.33	1.30	1161.60	7.63	728.38	4.79	16297.08	1296.83	68.43	17812.35	120.59	147.70	3.0%
6	1	17	0.29	3.44	1.86	1720.64	5.55	500.00	1.61	5207.72	235.52	7.94	5601.18	34.42	162.75	2.8%
7	1	19	0.36	3.38	2.19	1386.31	6.63	500.00	2.39	23471.66	668.94	39.93	24330.52	114.94	211.67	0.6%
8	1	24	0.48	3.30	0.90	1034.29	7.23	500.00	3.50	9882.83	233.47	19.76	10286.05	39.77	258.67	1.9%
9	8	10	3.05	2.74	0.10	163.83	1.52	500.00	4.65	12345.54	283.69	39.39	12968.63	117.38	110.48	0.0%
10	1	27	0.37	3.37	1.59	1346.46	12.83	500.00	4.76	4746.48	277.34	19.81	5343.64	38.99	137.07	3.6%
11	5	30	2.28	2.86	0.93	239.13	3.29	545.69	7.50	24128.39	528.69	90.59	25047.67	124.51	201.16	0.4%
12	5	9	0.97	3.10	0.10	514.39	2.22	500.00	2.16	5911.69	78.35	7.81	6297.84	35.65	176.67	0.0%
13	1	18	0.29	3.55	2.05	2637.90	6.00	757.90	1.72	13251.65	540.39	65.88	14157.92	114.50	123.65	1.4%
14	2	30	0.14	3.63	2.24	3565.98	25.21	500.00	3.53	6576.89	806.66	7.97	7691.53	37.15	207.02	9.4%
15	1	30	0.28	3.45	1.72	1759.27	12.21	500.00	3.47	24973.23	1172.00	39.94	26485.18	117.95	224.55	1.9%
16	1	24	0.23	3.51	2.17	2201.28	6.82	500.00	1.55	7150.52	425.67	19.89	7896.07	34.30	230.20	1.4%
Avg	2.7	22.2	1.03	3.25	1.51	1308.12	7.41	533.41	3.86	12543.30	481.46	36.99	13286.75	77.82	175.38	1.9%

Table 4. Optimal design parameters and cost components for A-MA chart

Case	L	n_0	h_0	k	w	ARL_0	ARL_δ	ATS_0	ATS_δ	B_1	B_2	B_3	$E[C]$	$E[T]$	$E[CR]$	%R
1	13	5	0.48	3.32	0.68	1038.30	8.41	501.44	4.06	12173.34	450.12	39.79	12663.35	116.69	108.52	6.6%
2	20	2	0.29	3.44	0.78	1746.90	6.14	500.00	1.76	3416.26	197.27	19.86	3634.29	33.67	107.95	9.6%
3	10	7	2.07	3.22	1.62	788.73	2.19	1635.80	4.53	22230.86	178.57	30.25	22440.17	116.92	191.92	0.8%
4	19	4	0.41	3.37	0.48	1220.15	9.93	500.85	4.07	6117.58	305.17	7.90	6430.76	36.47	176.33	7.5%
5	20	4	0.38	3.42	0.45	1442.79	10.15	542.00	3.81	14113.18	1267.61	92.08	15473.77	116.23	133.13	12.5%
6	19	2	0.18	3.57	0.72	2791.99	6.47	500.00	1.16	4559.88	336.64	7.96	4905.39	33.12	148.11	11.5%
7	15	3	0.57	3.26	0.95	882.64	4.16	500.00	2.36	23199.91	525.91	39.89	23766.21	114.40	207.75	2.5%
8	18	3	0.10	3.90	0.51	6587.63	16.72	674.80	1.71	6993.13	405.90	14.78	7414.31	33.99	218.16	17.3%
9	17	4	1.24	3.03	1.15	404.53	3.04	500.00	3.76	11935.93	383.56	39.75	12359.74	115.74	106.79	3.3%
10	17	4	0.28	3.52	0.58	2227.65	11.04	620.87	3.08	3884.28	276.64	15.99	4177.42	35.54	117.55	17.4%
11	17	5	1.06	3.14	0.59	583.19	7.53	619.42	8.00	23086.01	423.09	80.29	23589.89	120.34	196.02	2.9%
12	13	3	0.34	3.40	0.88	1467.51	4.43	500.00	1.51	5416.46	120.53	7.93	5545.82	33.67	164.73	6.7%
13	16	3	0.35	3.49	0.95	2046.87	4.60	715.75	1.61	12878.87	483.90	69.73	13433.00	113.76	118.08	5.8%
14	18	3	0.10	3.90	0.51	6587.63	16.72	674.80	1.71	4993.13	710.33	5.91	5709.87	33.99	168.01	26.5%
15	17	8	0.53	3.28	0.74	954.28	5.68	508.17	3.03	24230.05	733.23	39.25	25002.63	116.46	214.69	6.2%
16	15	2	0.25	3.49	0.72	2034.99	6.25	500.00	1.53	6731.11	331.62	19.88	7083.11	33.46	211.67	9.3%
Avg	16.5	3.9	0.54	3.42	0.77	2050.36	7.72	624.62	2.98	11622.50	445.63	33.20	12101.86	75.28	161.84	9.1%

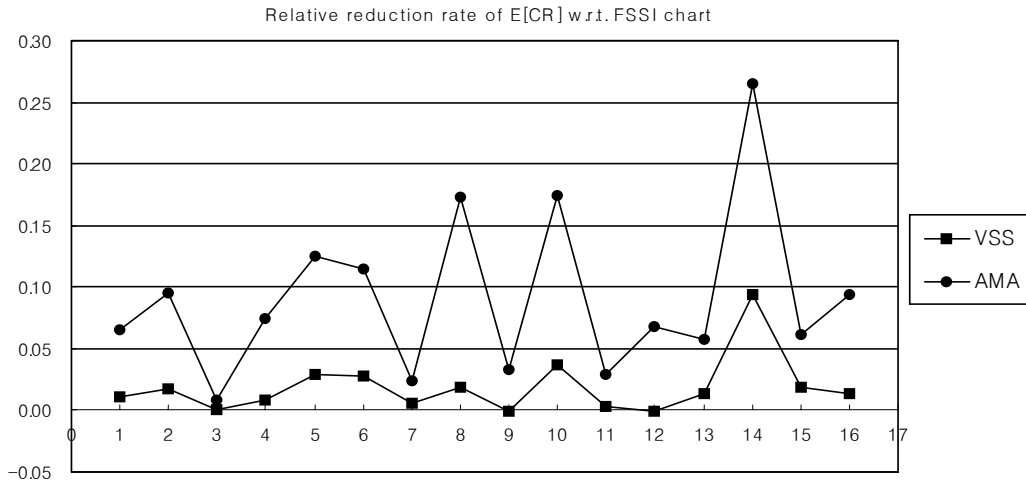


Figure 2. Relative reduction rate of $E[CR]$ w.r.t. FSSI chart

Table 5. Cases when the relative reduction rate of $E[CR]$ is high(low)

	Case	λ	δ	C_0	C_1	Y	W	a	b
Upper 1	14	0.05	0.5	100	500	500	150	2	0.2
Upper 2	10	0.05	0.5	100	250	500	300	1	0.6
Upper 3	8	0.05	0.5	200	500	200	150	1	0.6
Upper 4	5	0.01	0.5	100	500	200	300	2	0.6
Lower 1	3	0.01	1.0	200	250	200	300	1	0.6
Lower 2	7	0.01	1.0	200	500	200	150	2	0.2
Lower 3	11	0.01	0.5	200	250	500	300	1	0.6
Lower 4	9	0.01	1.0	100	250	500	300	2	0.2

5. 결론

본 연구에서 제안하는 A-MA 관리도는 기존의 적응형 관리도와는 달리, 표본크기나 샘플링간격을 변화시키지 않으나 MA 통계량의 누적 기간을 가변적으로 조절하는 새로운 개념의 적응형 관리도라 할 수 있다. 고정된 표본크기와 샘플링간격을 사용함으로써 샘플링 방식을 바꾸기 어려운 공정에서도 쉽게 사용할 수 있다. FSSI 관리도와와의 차이점은 표준화된 MA 통계량을 사용하고, 임계한계를 설정하여 MA 통계량의 누적 기간을 가변적으로 조절하며, 관리길이(L)를 도입한다는 점이다. 관리길이는 MA 통계량의 누적 기간이 무한정 늘어나는 것을 방지하여 유한상태의 마코프연쇄모형을 가능하게 한다.

A-MA 관리도의 경제적-통계적 절차를 제시하고 경제성을 분석한 결과, 기존의 FSSI 관리도 뿐 아니라 VSS 관리도에 비해서도 우수한 성능을 보였다. 작은 표본크기에서도 짧은 ATS_0 를 얻음으로써 관리도의 운영비용을 크게 개선할 수 있었다. 특히, 표본크기를 변화시키지 않고도 작게 유지할 수 있어, 합리적 표본군을 유지하는데 도움이 될 것이다.

공정평균의 이동폭이 작은 경우, 이상원인이 빈번히 발생하는 경우, 이상상태 운영비용이 상대적으로 큰 경우 등에 있어서 A-MA 관리도를 사용하는 것이 더욱 효과적인 것으로 나타났다.

본 연구에서는 샘플링간격이 고정된 경우에 대해서만 고찰하였으나, 추후에는 가변 샘플링간격이 허용되는 경우에 대해서도 연구가 필요할 것이다.

참고문헌

Costa, A. F. B. (1994), \bar{X} Charts with (Fixed Sample Size and Sampling Interval)Variable Sample Size, *Journal of Quality Technology*, **26**(3), 155-163.

Duncan, A. J. (1956), The Economic Design of \bar{X} Charts Used to Maintain Current Control of a Process, *Journal of the American Statistical Association*, **51**, 228-242.

Lim, T. J. (2007), The ARL of a Selectively Moving Average Control Chart, *Journal of the Korean Society for Quality Management*, **35**(1), 24-34.

Lorenzen, T. J. and Vance, L. C. (1986), The Economic Design of

- Control Charts : a Unified Approach, *Technometrics*, **28**(3), 3-10.
- Prabhu, S. S., Runger, G. C., and Keats, J. B. (1993) \bar{X} Chart with Adaptive Sample Sizes, *International Journal of Production Research*, **31**, 2895-2909.
- Prabhu, S. S., Montgomery, D. C. and Runger, G. C. (1997), Economic-Statistical Design of an Adaptive \bar{X} Chart, *International Journal of Production Economics*, **49**(1), 1-15.
- Tagaras, G. (1998) A Survey of Recent Developments in the Design of Adaptive Control Charts, *Journal of Quality Technology*, **30**(3), 212-231.
- Woodall, W. H. (1986), Weaknesses of the Economic Design of Control Charts, *Technometrics*, **28**(4), 408-409.