한국수학사학회지 제21권 제1호(2008년 2월), 17 - 28

# 수리논리학의 역사적 배경과 괴델*

서경대학교 철학과 **박창균**
ckpark@skuniv.ac.kr

이 글의 목적은 수리논리학의 역사적 배경을 소개하려는 것이다. 각각 발전해온 수학과 논리학이 19세기 중엽에 하나로 합쳐지면서 엄청난 시너지 효과를 가져왔다. 그 후 논리학의 '수학화'는 탄력을 받아 진행되었고, 다른 한편으로는 수학도 논리로 환원시키려는 움직임이 일어났다. 이러한 흐름 속에서 괴델은 산수를 포함하는 무모순인 형식체계는 불완전하다는 것을 증명함으로써 형식주의의 한계를 보여 주었다.

주제어 : 수리논리, 기호논리, 1계논리, 부울, 프레게, 러셀, 괴델

## 0. 들어가는 말

요즈음 각종 시험에서 비판적인 사유를 강조되어서인지 논리에 대한 관심이 고조되고 있다. 시험 때문에 논리학에 관심이 커진다는 것이 바람직 한 것인지는 모르겠으나, 적지 않은 사람들이 논리학을 일상적 생활에서 글을 쓰거나 토론을 할 때 유용한 도구 정도로 인식하고 있는 것도 사실이다. 논리라는 말은 범람하고 있지만 심각하게 생각할 문제가 많이 있는 것이 논리학이다. 어떤 근거를 추궁하기에 앞서 논리학에 대한 지식은 서로의 차이를 항상 해소시킬 수 있는 것인지에 대해서, 즉 세상에 옳은 논리가 존재하는 것인지를 물어 볼 수 있다. 이에 대한 답으로 올바른 논리 체계는 단 하나 뿐이라는 일원론과 하나보다 많다는 다원론, 그리고 올바름이라는 개념은 부적당하므로 올바른 논리란 없고 논리는 단지 도구일 뿐이라는 도구론이 경합하고 있다. 이글은 수리논리학의 태동하게 된 배경을 소개하고 역사를 개관하려는데 목적이 있다. 이러한 목적을 위해 먼저 논리학에 대한 일반적인 이야기로부터 출발하여 목적지에 도달하려고 한다.

논리학이란 무엇을 연구하는 학문인가? 단순히 논리를 연구한다고 대답한다면 또

* 이 글은 2006년 12월 11일 연세대에서 있었던 대한수리논리학회 창립식에서 강연한 내용을 정리한 것이다.

다시 논리란 무엇인가? 하는 물음을 야기한다. 논리학을 한때 '사유의 법칙'을 연구하는 학문이라고 한 적도 있지만, 논리학은 심리학과 같은 학문과 구별된다는 점에서 동의하기 어려운 견해이다. 이러한 입장은 특히 심리주의-이에 대한 반박이 정당하든 아니든 간에-에 대한 프레게의 반박이 있은 후 지지하는 사람이 별로 없는 것 같다. 논리학에 대한 통상적인 정의는 논리학이 논증에 관한 학문이라는 것이다. 논증은 지지하는 문장들인 전제와 도출되어 나온 문장인 결론으로 구성된다. 논증은 전제가 참일 때 결론이 반드시 참이 되는 연역논증과 개연적으로 참이 되는 귀납논증으로 구별된다. 귀납논증은 베이컨에 의해 그 중요성이 강조되었고 그 후 과학에서 방법론으로 꾸준히 사용되고 있지만, 아리스토텔레스 이후 논리학 내의 주된 흐름은 역시 연역논증이다. 따라서 논리학은 어떤 논증이 형식적으로 타당한지 또는 건전한지 여부와 그런 일에서 파생되는 제반 문제들을 연구하는 학문이라고 할 수 있다. 타당한 논증이란 전제가 참일 때 결론이 거짓이 될 수 없는 논증을 말한다. 어떤 논증이 타당하고 전제가 참이면 건전하다고 한다. 귀납논증에 대해서는 타당성이나 건전성 대신에 "강한/약한 논증" 이나 "설득력 있는/없는" 논증이라는 용어를 각각 사용하는 것이 보통이다. 어쨌든 논리학의 역사를 살펴보면 그 핵심 주제는 타당성을 검증하는 것이라 할 수 있다.

체계를 갖춘 형식논리학은 아리스토텔레스로부터 시작한다. 형식논리학과 대비되는 "내용의 논리학"도 있다. 헤겔의 변증법이 그 예인데 논리의 형식 보다는 존재가 변화하는 구조를 법칙화한 '내용'을 가지고 있는 논리학이라는 점에서 형식논리학과 차이를 가진다. 간혹 정의를 달리하는 경우도 있지만, 형식논리학을 논리학과 구별함 없이 사용한다면, 형식논리학은 아리스토텔레스의 삼단논증을 다루는 전통논리학과 기호논리학으로 대별된다. 기호논리학은 다시 표준논리학과 비표준논리학으로 나눌 수 있다. 표준논리학(standard logic)에는 명제논리와 술어논리가, 비표준논리학(nonstandard logic)에는 파생논리(deviant logic)와 확장논리(extended logic)가 각각 속한다. 파생논리는 표준논리학에서 파생된 것으로서, 다치논리나 양자논리에서처럼 표준논리학의 공리나 규칙에 제한을 둔다. 이러한 논리는 타당성을 판정하기 어려운 영역을 다루기 위해 제안되었다. 또한 확장논리는 표준논리학에 새로운 논리적 용어를 도입하고 이를 위한 공리와 규칙을 도입한 것으로 표준논리학의 적용범위를 확장시킨 것이다. 확장논리에는 "가능성"과 "필연성"이라는 용어가 등장하는 양상논리가 대표적 예라고 할 수 있고, 그 밖에 다양한 논리들이 제안되어 있다.

그리스 시대이후 지배적이었던 아리스토텔레스의 삼단논법은 19세기에 와서는 점차 위축되어 연구의 중심에서 밀려난다. 논리학사가인 페크하우스(V. Peckhaus)는 삼단논법은 19세기에 논리학적 연구의 중심주제가 아니었다([8])고 주장한다. 그런데 아리스토텔레스의 논리에서 현대 기호논리학으로 가는 길은 그렇게 단순한 것이 아니었다. 먼 여정을 거쳐 19세기가 되어서야 기호논리학은 비로소 그 모습을 구체적으로

드러내게 된다. 기호로 표시하여 계산을 하는 방식으로 추론을 하겠다는 생각은 라이프니츠까지 수 세기를 거슬러 올라갈 수 있지만 이러한 생각이 하나의 개울을 이루고 점차 큰 물줄기를 형성하여 강을 이루고 바다에 나아가기 까지는, 유입되는 물도 있어야 했고 또한 이것이 가능하도록 적절한 환경도 형성되었어야 했기에 오랜 시간을 요하는 일이었다.

논리학은 오랜 세월 동안 철학의 한 분야로 존재해 왔다. 그러나 수리논리학은 수학의 한 분야로서 자리매김 하고 있다. 집합론, 모델론, 재귀론, 증명론 등으로 세분화된 수리논리학은 수학의 기본적 토대로서 수학에서 '언어적 기능' 뿐만 아니라 전산학, 언어학 등에도 널리 응용되고 있다. 언어적 측면에서 거칠게 표현을 한다면, 수학이 과학의 언어이고 과학이 자연을 기술하는 언어라면 수학의 중요성을 쉽게 추리할 수 있는데, 수리논리학은 수학의 언어인 셈이므로 그 위상을 가늠해 보는 것은 어려운 일은 아니다. 수리논리학은 그 자체의 학문적 가치와 더불어 수학을 기술하는 엄밀하고 경제적인 어휘를 제공하는 토대의 역할을 한다는 점에서 이에 대한 연구가 가지는 파급력이 적지 않음을 알 수 있다. 그러나 우리나라에서는 그 중요성이 간과되어 온 측면이 없지 않다. 물론 학문의 성격상 수리논리학을 공부하는 사람이 꼭 많아야 한다는 것은 아니나 기초 학문의 균형 발전을 위해서 어느 정도 강조될 필요가 있다고 생각한다.

20세기 초에 수학기초에 대한 논의가 활발했을 때 이 논의를 이끌어갔던 사람들은 수학자였지만, 오늘날 그 연장선상에서 이루어지는 수학에 관한 오늘날의 담론들은 대부분 철학자들에 의해 수행되고 있다. 20세기에 수학의 한 분과로 자리를 잡게 된 수리논리학이 어떠한 역사적 궤적 속에서 현재에 이르게 되었는지 살펴보는데 있어서 논리학에 기호가 적절하게 도입되는 과정에 초점을 맞추게 된다. 그런 면에서는 제목에서 "수리논리학" 대신에 보다 일반적인 표현인 "기호논리학"이라고 하는 것이 더 적합할 것이다. 따라서 이 글에서는 수리논리와 기호논리를 특별히 구분하지 않고 사용한다. 기호논리학이 나타나게 된 역사적 궤적은 논리학에서의 궤적(이하 '논궤'와 병용함)과 수학에서의 궤적(이하 '수궤'와 병용함)을 추적함으로써 보다 선명하게 드러난다고 여겨지기에 두 방향으로 살펴보려고 한다. 이 두 흐름은 1850년 전후에 한 곳에서 만나게 되는데 이때를 현대 논리학이 시작된 시기라 할 수 있을 것이다. 그러나 그 이전에서도 논궤과 수궤를 구별한다는 것은 때에 따라 쉽지 않다. 전자와 후자가 밀접하게 관련되어 있는 경우도 있기 때문이다.

이 글은 논리학의 흐름과 수학의 흐름이 만나게 되는 19세기 중엽까지의 논궤와 수궤를 살펴보고, 그 이후는 현대 논리학이 시작되는 프레게부터는 따로 구별하지 않고 서술할 예정이다. 그런데 수학기초에 대한 위기를 분절함 없이 서술하기위해, 수궤는 편의상 19세기 말에 이르는 상황을 기술한다. 두 흐름이 만나 후 논리화의 거대한 호

름은 괴델에 의해 그 한계가 드러난다. 그러나 그의 연구결과는 불완전이라는 말이 함축하는 것과 같은 부정적인 것만이 아니다. 오히려 할 수 있는 것과 없는 것을 구별해준 그래서 많은 사람의 노력을 덜어주고 올바른 방향을 제시한 역설적으로 '긍정적'인 것이었다. 그래서 괴델은 수리논리학의 역사에서 그 누구도 그의 업적으로부터 자유로울 수 없는 하나의 큰 봉우리를 형성하게 된다.

## 1. 논리학의 궤적

그리스 시대 철학자들의 여러 가지 논증과 반박은 논리학의 발전에 크게 기여하게 되는데, 예컨대 파르메니데스는 실재란 하나이고 변하지 않는다는 입장에서 운동이나 변화를 착각이라고 생각했다. 엘레아의 제논은 이를 받아들이고 옹호하여 날아가는 화살은 정지해 있다는 역설을 주장했다는 것은 잘 알려진 사실이다. 즉 화살이 움직이고 있다는 것을 가정하고 날아가는 매순간 정지해 있으므로 언제나 정지해 있고 그것은 결코 움직이지 않았다는 것이다. 이 때 사용한 방법이 귀류법이라고 할 수 있다. 소크라테스도 상대방 의견이 틀렸다는 것을 보여줄 때 상대방의 주장이 함축하는 바를 부정함으로써 상대방의 주장을 부정하는 후건부정법을 사용했다고 볼 수 있다.

논리학의 역사에서 의미가 있는 작업은 아리스토텔레스로부터 시작한다. 아리스토텔레스의 제시한 내용은 그의 사후에 편찬된 『오르가논(Organon)』에 나타나 있다. 이 책에는 삼단논증 외에 개념, 명제와 판단, 양상명제들, 정의, 반박술을 위한 오류추리 등 방대한 양을 포함하고 있지만 삼단논증이 그 핵에 자리를 차지하고 있다고 할 수 있다. 아리스토텔레스 사후에 메가라학파와 스토아학파는 논리학의 적용범위를 더욱 확장하여 합성명제들로 구성된 논증도 다루었다. 특히 스토아학파는 진리표를 이미 사용했다고 한다([17, pp.60-61]).

중세의 논리적 연구는 매우 전문적이고 독창적이었는데, 언어철학과 양상논리, 귀결이론 등에서 큰 공헌이 있었다. 그러나 1400년대 중반부터 약 400년간은 아리스토텔레스주의가 위축되고 수사와 문체에 대한 관심이 높아졌던 시기여서 아무래도 엄격한 논리적 연구는 진척되지 못한 시기였다. 그렇다고 해서 암흑기라고 물론 할 수는 없었다. 의미가 있는 시도들이 데카르트, 홉스 등에 이루어지고, 라이프니츠의 생각은 기호논리학의 시작을 알리는 것이었다.

한편 자연과학의 영향으로 베이컨은 1620년 『신오르가눔 Novum Organum』을 통해 귀납논증의 중요성을 강조한다. 같은 맥락에서 밀(Mill)도 1843년 『논리학의 체계 System of Logic』에서 귀납추론의 5가지 원리를 제시하기도 하지만, 당시 굳건했던 연역논증이 차지하는 지위를 위협할 정도는 아니었다.

데카르트는 해석기하학의 창시자로 기하학에 대수적 방법을 적용시켰으나 논리학에

까지 적용시키지는 못했다. 데카르트의 방법은 복잡한 것을 명석하고 판명하여 직관적으로 알 수 있는 것으로 분해하고 이런 것으로부터 결합하는 '분석과 결합'이라고 할 수 있는데, 이런 방법은 나중에 러셀이나 비트겐슈타인의 논리적 원자론에 맥이 닿아있다. 기호논리학이 성립하기 위해서는 일상 언어에 대한 고정관념에서 벗어나야 하는데, 즉 언어는 절대적이어서 자유롭게 말을 만드는 것은 불가능하다는 생각에서 탈피해야 했는데 이를 실행하여 자유롭게 만들어진 말을 덧셈과 곱셈으로 결합해서 기호논리학에로의 한 걸음 진보를 가져온 인물이 홉스이다. 이러한 생각은 나중에 부울에 의해 실현되지만 홉스는 기본적 구상만 했지 구체적인 결과는 얻지 못했다.

수리논리를 논리에 기호를 도입하여 논리학을 대수화 한 것이라고 한다면, 라이프니츠는 그러한 생각을 가졌던 선구자였다. 그러나 이와 관련된 그의 업적은 1901년이 되어서야 비로소 조금씩 출판되기 시작했고 1980년대에 와서 그 가치에 대한 활발한 평가가 이루어졌다. 물론 라이프니츠 이전에도 13세기의 룰루스(Lullus)나 17세기의 키르헤(Kircher) 등의 예처럼 그러한 시도가 전연 없었던 것도 아니나, 그들은 단지 시도이상의 그 무엇은 아니었던 것 같다. 라이프니츠는 관념을 기호로 표현하고 관념의 결합을 기호의 결합으로 나타내려 했다. 그리고 결합의 작용을 수학의 덧셈이나 곱셈 등 연산을 사용하였으나, 기호가 순수하게 외연적이지 못하고 무엇을 단순관념으로 해야 할지 명확하지 못한데다가 결합하는 규칙도 애매하다는 한계가 있었다. 그러나 이렇게 관념을 수로 표현하고 관념의 결합을 수의 결합으로 전환하여 계산하는 것은 훗날 괴델의 증명에도 사용되었다는 점에서 높이 평가된다. 라이프니츠 이후 람베르트(J. Lambert), 해밀턴(W. Hamilton), 드 모르강 등에 의해 새로운 시도들이 이루어지지만 논리학의 흐름과 수학의 흐름은 부울에 의해 만나게 된다. 특히 드 모르강은 '드 모르강의 법칙'으로 유명한데 이것은 A와 B의 선언명제는 A의 부정과 B의 부정과의 연언명제의 부정과 같다는 것이다.

논리학의 흐름과 수학의 흐름의 만남은 기호논리 또는 수리논리의 탄생을 예고한 것이었다. 이 흐름의 만남을 주선한 사람은 부울 이었다. 그의 업적은 그 이전의 논리적인 작업과 수학적 작업을 결합한 결과였다. 부울은 덧셈과 곱셈과 같은 연산은 인간의 사고에 필수적으로 포함된 것이라고 생각했다. 그는 아리스텔레스의 정언명제들과 같은 형태의 진술들 사이의 논리적 관계를 수학적으로 나타낼 수 있다고 보았다. 부울은 논리학의 꽤 많은 부분을 수학화 했다는 점에서 라이프니츠의 이상을 부분적으로 실현했다고 볼 수 있다. 그의 작업은 이전 사람들과는 달리 외연화를 철저히 시도했다. 그리고 함수가 취해야 할 값으로 0과 1을 생각한 것도 그의 성공을 뒷받침했다. 그러나 지나치게 논리학을 수학의 일부로 간주하여 수학적 형식에 의존해 논리적으로 해석할 수 없는 것이 생겼고, 동일한 표현의 애매성도 완전 배제할 수 없었다. 한편 벤은 1881년 발간된 『기호논리학 symbolic logic』에서 부울의 해석을 표현하기 위해 다이어그램을 제시했다.

## 2. 수학에서의 궤적

수학사를 살펴보면 '대수화'의 작업이 수학의 각 분야별로 진행되어 왔음을 확인할 수 있다. 우선 도형의 학문이었던 기하학은 데카르트의 '해석 기하학'에 의해 대수화 되었다고 할 수 있고, 특히 그는 방정식의 미지수를 구하는데 있어서 대수적 기법을 도입한 것으로 알려져 있다.

18세기의 수학은 현재의 의미에서는 엄밀하지 못했다. 18세기의 기라성 같은 수학자들은 엄밀성 보다는 결과를 많이 산출하는 다산성에 더 관심이 많았던 것 같다. 그러나 18세기 말이 되면서 점차 엄밀성에 대한 관심이 커져 갔다. 특히 해석학에서 무한소나 무한합과 곱 등에서 제기된 문제들은 극한 개념의 엄밀함을 요구했다. 해석학에서의 엄밀함은 19세기 초와 중반에 코시와 와이어스트라스에 의해 성취된다. 19세기 초와 중반의 추상수학의 부상과 엄밀화의 과정은 논리학이 수학과 접목되는 적절한 환경을 만들어 주었다. 특히 와이어스트라스의 극한에 대한 정의는 술어를 양화하는데 큰 기여를 하였다.

한편 환원의 관점에서 보면, 복소수 체계는 실수들의 체계로 환원됨으로써 견고하게 되어 있었고, 실수들은 유리수의 체계로부터 구성되는 진전이 있었다. 칸토어는 유리수열의 극한으로 실수를 표현했고, 데데킨트는 유리수들의 부분집합들의 최소상계(또는 최대하계)로 표현했다. 그리고 크로네커가 유리수를 양의 정수들의 체계 또는 0을 포함하는 자연수들의 체계로서 설명했다. 그런데 복소수에서 실수, 유리수, 자연수에 이르는 환원의 과정에서 쌍, 집합, 수열, 관계, 연산 또는 함수 등의 개념이 등장하게 되는데 이는 수학의 가장 기초적인 개념들이다. 환원의 최종적인 목표는 자연수를 보다 근원적인 개념으로 설명하는 것에 귀착되었고 이것이 19세기 말 데데킨트와 페아노 그리고 칸토어가 추구했던 바였다. 기수를 보다 기본적인 집합론적 혹은 논리적 개념으로 정의하는 것이 요구되었다([13]). 그런데 러셀은 그의 유명한 역설을 통해 프레게 체계의 문제점을 지적했다. 이 역설이 특별히 충격적이었던 이유는 집합, 부정, 원소라는 가장 기본적 기호로만 만들어졌기 때문이다. 그러나 일련의 역설들은 수학의 언어를 엄밀화 하는데 아주 중요한 역할을 하게 된다.

페아노는 1889년에 산수의 체계를 공리화 하여 처음에는 9개의 공리를 제안하는데 이 중 5개가 나중에 페아노 공리로 알려진 것이다. 추가적인 가정이 없이 만약 이 조건을 만족하는 존재를 논리에서 유도하거나 구성할 수 있다면, 수학은 순수하게 논리에 기초한 것이 될 것이라고 여겨졌다.

## 3. 두 흐름의 만남과 그 이후

현대 논리학은 즉 기호논리학은 1879년에 출간된 프레게의 『개념표기법 *Begriffsschrift*』으로 부터 시작된다. 프레게는 이 저서에서 명제논리를 넘어선 "모든"과 "어떤"을 포괄하는 논리로의 확장을 시도했다. 그는 변항과 양화사가 논리적 문장에 어떻게 나타나야 하는지를 보여주었다. 그에 따라면 "모든 개나리는 식물이다"와 같은 문장은 "모든 x에 대하여 x가 개나리라면 x는 식물이다"로 전환된다. 프레게의 이런 업적은 그를 현대논리학의 아버지라고 칭하게 했다. 프레게는 최초로 수학에서의 함수의 개념을 일상 언어와 논리학에 적용하였고, 양화사를 발명해내었다. 칸트는 논리학이 아리스토텔레스에 의해 완결된 것으로 생각했지만, 프레게는 아리스토텔레스의 삼단 논법보다 훨씬 엄밀하고 일반적인 방식으로 추리이론을 형식화할 수 있다는 것을 보여 주었고 논리학과 수학의 긴밀한 관계를 드러내었다. 또한 프레게는 『산수의 기초』에서 수에 대한 정의를 처음으로 엄밀하게 제시하였고, 수학의 개념들을 논리학의 개념들로 환원시켜 수학의 기초를 논리에 둘 수 있다는 "논리주의"라는 수학철학의 입장을 최초로 제시했다.

한편 퍼스는 1885년 논문에서 "2계논리" 라는 용어를 소개하고, 프레게와는 독립적으로 양화기호를 창안했다. 수학연산과 평행한 논리연산들을 제안했고, 실질함축을 독립된 연산으로 취급했다. 또한 관계의 논리를 고안한 사람으로 알려져 있다. 슈뢰더는 부울의 논리체계를 정비하여 소위 부울-슈뢰더 체계라고 불리는 것을 완성했다. 그는 당시 잘 구별함 없이 사용하던 집합계산과 명제계산을 명백히 구별했고 연언과 선언의 쌍대성을 분명히 했다. 그는 비록 완전하지는 않았지만 자신의 계산 체계의 공리화를 시도했다. 비록 오늘날 현대논리학이 프레게로부터 시작되었다고 일반적으로 이야기하지만, 19세기 말과 20세기 초의 논리학자들은 실제로는 퍼스와 슈뢰더의 논리체계에 더 익숙해 있었다.

1900년 여름 파리에서 열렸던 국제철학자 대회에 러셀은 화이트헤드와 같이 참석했는데 그들은 여기서 페아노를 만나게 된다. 페아노와의 만남은 러셀 스스로도 지적 여정에 전환점이 되었다고 술회할 정도로 뜻이 깊은 사건이었다. 러셀은 페아노와의 만남을 통해 수학이 논리학의 공리로부터 연역될 수 있다는 확신을 갖게 되었다. 프레게와 러셀은 논리주의 프로그램을 가지고 수학을 논리로 환원 시키려했다. 프레게와 러셀사이에는 차이가 있었는데 러셀의 프로그램은 모든 수학을 포괄하여 환원시키는 것이었지만, 프레게의 프로그램에는 산수와 해석학은 포함되되 기하학은 배제되었다. 논리주의 프로그램의 그 후의 전개는 주지하는 바와 같이 성공적이지 못한 것으로 판명되고, 형식주의 프로그램도 괴델의 불완전성정리에 의해 타격을 받게 된다. 환원을 시도한 것은 수학발전에 큰 도움이 되었으나 '궁극적 환원'이란 애초에 불가능한 일이었는지 모른다. 어쨌든 19세기의 말부터 시작된 수학기초론의 논의는 기호논리학의 성숙에 큰 기여를 하였다.

러셀은 『수학의 원리』에서 "기호논리의 주제는 세 가지로 구성되는데 그것은 명제의 계산, 집합의 계산, 관계의 계산이다([10, §13])."라고 했다. 러셀은 "모든 수학이 단지 기호논리에 불과하다는 것이 이 시대의 가장 위대한 발견 중의 하나([10, §4])"라고 했다. 수리논리학의 기본골격은 1910, 1912, 1913에 걸쳐서 출간한 세권으로 이루어진 러셀과 화이트헤드의 『수학원리 principia mathematica』에서 마련되었다.

1933년에 타르스키 또한 형식언어에서의 진리개념에 대해서 엄밀한 정의를 제시하였고, 논리적 귀결과 같은 다른 의미론적 개념들에 대해서도 엄밀한 정의를 하였다. 20세기 활발하게 논의된 양상논리는 루이스에 의해 5가지 양상논리 체계가 제시된 이래 1959년 크립키는 양상논리의 완전성을 증명하였다.

1934년에는 겐첸이 자연연역 체계를 개발했는데, 이는 프레게로부터 당시까지 논리체계를 제시하는 표준적인 방법인 공리를 제시하는 방식에서 전환을 이루는 것으로서 추론규칙에 의거해 논리체계를 나타낸 것이다. 야스코프스키(S. Jaskowski)도 독자적으로 자연연역 체계를 개발했지만 오늘날 많이 회자되는 체계는 겐첸의 자연연역 체계 내지 이의 변형이다.

20세기 초 상황을 요약하여 기술하면 다음과 같다. 1900년을 전후에 논리는 문장이론, 집합, 관계 등을 염두에 두고 작업을 했으며, 1차 세계대전 후부터 1930년 후반까지 논리의 전형적인 대상은 고계논리체계와 단순유형론이고 1940년에서 1950년 사이에 비로소 논리학자들의 사회 전체에 1계논리가 지배적인 패러다임으로 통용되기 시작했다.

## 4. 괴델-수리논리학의 역사에서 큰 봉우리

우리가 어떤 방법을 제대로 이해하기 위해서는 그것으로 할 수 있는 것이 무엇이고 할 수 없는 것이 무엇인지를 아는 것이 필요하다. 그것으로써 가능하지 못한 것이 무엇인지를 보이는 것은 그것으로써 가능한 일이 무엇인지를 보이는 것만큼 중요하다. 즉 논리에 한계가 있는가하는 문제이다. 이는 논리학으로 가능한 것을 보이는 것과 더불어 중요한 문제이다. 현대 논리의 발전 과정에서 이 양 방향-가능한 것을 보이는 것과 불가능한 것을 보이는 것-을 추구했던 것이 꼭 따로 이루어졌다고 하긴 어렵겠지만, 결과적으로 보면 구별되는 '긍정의 방향'과 '부정의 방향'은 둘 다 논리학의 발전에 크게 기여했음은 부인할 수 없다.

괴델은 1928년에는 힐베르트와 아커만이 공동으로 집필한『수리논리학의 원리 *Principles of Mathematical Logic*』를 접했는데, 이 책에는 프레게의 『개념표기법』이 출간된지 49년이 지나 비로소 1차 논리학의 완전성 여부 문제와 결정 문제가 정식화되어 있었다. 그런데 괴델이 약 1년 만에 박사학위 논문을 통하여 완전성을 증명한

것이다. 또한 괴델은 산수를 포함하는 무모순인 수학 체계에서 산수의 진리를 다 증명하는 것은 가능하지 않다는 것을 보였다. 즉 산수의 진리를 전부 포착할 수 없다는 것이고, 참이면서 증명할 수 없는 명제가 존재한다는 것이다. 다시 말하면 괴델은 집합론이나 2계 논리체계와 같이 산수를 표현하기에 충분한 무모순인 체계는 불완전함을 보였다. 이것이 제1 불완전성정리이다. 그리고 그러한 체계에서 그 체계 자신의 무모순성은 증명할 수 없다는 것도 보였는데 이것이 괴델의 제 2불완전성 정리이다. 그의 불완전성 정리가 함의 하는 바는 수학적 진리의 세계는 수학적 증명의 세계 보다 크다는 것이다. 언어학적으로 말한다면 구문론이 아무리 충분해도 의미론을 완전히 제거하는 것은 불가능하다는 것이고, 언어 내에서 언어를 통해 증명될 수 있는 것은 인간의 사유능력 보다도 적다는 것이다([14, p.52]). 괴델이 이에 앞서 증명한 1계 논리의 완전성이 긍정의 방향이라고 한다면, 불완전성 정리들은 부정의 방향이다. 보통 그의 부정의 방향에서 이룬 업적이 크게 부각되었지만 논리학자들에게는 긍정의 방향 역시 같은 정도의 중요성을 가진 것이다. 괴델은 논리학의 큰 봉우리를 형성했다. 후학들은 이 높은 봉우리에 올라 전후와 좌우의 지형을 멀리까지 조망할 수 있다.
또 하나의 잘 알려진 부정의 방향에서의 업적은 처치에 의해 이루어졌다. 그는 소위 처치의 입론(Church's Thesis)을 전제하여 1계 술어논리에 대한 결정 절차가 존재하지 않는다는 것을 보였는데 이는 부정의 방향으로서, 기본적인 논리조차도 인간의 창의성을 배제한 채 계산만으로 이루어질 수 없다는 것을 보인 것이라 할 수 있다([16, p.256]).

## 5. 나가는 말

수리논리학 또는 기호논리학의 중요성은 그 자체 연구의 중요성과 더불어 수학의 언어로서의 기능 때문에 더욱 커진다. 인간은 가장 적은 원리로서 가장 풍부한 결과를 얻는 체계를 동경해왔다. 아니 어쩌면 탐구의 대상이 자연 현상에 관한 것이든 인간사나 사회 현상에 관한 것이든, 보다 많은 이해를 가능하게 하는 최소의 원리들을 발견하는 일에 몰두해 왔다고 하는 것이 정확한 표현일지 모른다. 기원전 3세기의 등장한 유클리드의 『원론』은 이러한 바람을 최초로 체계적으로 제시한 것으로 2000년 이상 학문의 전형으로 간주되었다. 논리학이 아리스토텔레스 이래로 삼단논법의 형식이 오랫동안 이어져 오다가 19세기 중엽 이후에 수학에 대해 논리적인 분석에 대한 요구가 커짐에 따라 논리의 영역은 급격히 넓어져 결국은 초보적 수준의 명제논리와 술어논리와 함께 집합, 관계 등의 이론을 껴안게 됨으로써 논리학의 새로운 지평을 열었다. 즉 논리학의 수학화가 본격화 된 것이다.

어느 정도 관련은 있었지만 다루는 대상에서 전연 별개의 학문으로 보이던 논리학과 수학이 19세기 중엽에 만났다는 것은 결국 논리학의 수학화의 열망과 수학의 논리화의 열망의 결과였다. 라이프니츠 이래 알고리듬을 사용하여 계산하듯이 논리를 수학적으로 취급하려고 했던 생각과 수학에서 요구되었던 문제들을 논리적으로 정초해보려고 했던 움직임 속에서 새로운 학문인 기호논리학이 태동한 것이다. 논리학의 흐름 속에서, 라이프니츠 이래 수학의 흐름과 만나 첫 번째 의미가 있는 성취를 해낸 사람이 논리대수를 제안한 부울 이었다. 이런 면에서 부울은 두 흐름이 만나는 지점에 있었던 사람이었고 기호논리학의 창시자로 일컬어지기도 한다. 그러나 현대적 모습의 기호논리학은 프레게로부터 비롯된다. 현대 기호논리학은 실질적으로 그로부터 시작했다고 해도 과언이아니라는 점에서 그는 기호논리학의 아버지라고 불린다. 프레게가 기호논리학의 아버지라면, 부울은 할아버지이고 라이프니츠는 증조부 정도가 된다고 말하여도 부적절한 '가계도'를 그리는 것은 아닐 것이다.

괴델은 부정적 방향에서 수학 체계의 한계를 밝힌 사람이었다. 수리논리학은 기호논리학에 포함되어있으면서 연구대상이 순수수학인 논리학이라고 할 수 있다. 따라서 수리논리학은 수학의 여러 분야들의 주제와 긴밀한 연관을 가진다.

이 글에서 수리논리학의 세부 분야에 대한 발전과정은 따로 언급하지 않았고 오로지 기호논리학이 태동한 역사적 배경에 주목했다. 폭 넓은 사회・문화적 접근을 통해 과거의 논리학과 현대의 논리학을 조명해 보는 것도 남은 과제라 하겠다.

## 참고 문헌


1. Boole, George, *The Mathematical Analysis of Logic*, Macmillan, Cambridge, 1847, references to the reprint Basil Blackwell, Oxford, 1951.
2. Church, Alonzo, "*A Formulation of the Simple Theory of Types*," The Journal of Symbolic Logic, vol. 5 (1940), pp. 56-68.
3. Frege, Gottlob, *The Foundations of Arithmetic*: A Logico-Mathematical Enquiry into the Concept of Number, trans. J. C. Austin, Northwestern University Press, 1980.
4. Frege Gottlob, *The Frege Reader, ed. Michael Beaney*, Wiley-Blackwell, 1997.
5. Gödel, Kurt, *On Formally Undecidable Propositions of Principia Mathematica and Related Systems*, Dover Publications, 1992.
6. Hilbert, David, Ackermann, Wilhelm, *Principles of Mathematical Logic*, Chelsea Publishing, 1950.

7. Kneale, William, Kneale, Martha, *The Development of Logic,* Clarendon, Oxford, 1962.
8. Peckhaus, Volker, "*The way of Logic into Mathematics,*" Theoria, vol. 12 (1997), pp. 39-64.
9. Peckhaus, Volker, "*19th Century Logic between Philosophy and Mathematics,*" this Bulletin, vol. 5 (1999), pp. 433-450.
10. Russell, Bertrand, *The Principles of Mathematics*, Cambridge University Press, 1903 (2nd edition 1937). Reprint London, Allen & Unwin, 1948.
11. Wang, Hao, *Reflections on Kurt Gödel*, The MIT Press, 1987.
12. Whitehead, Alfred N., Russell, Bertland, *Principia Mathematica*, Cambridge University Press, 1910-1913 (2nd edition 1925-27). References to the 1978 reprint.
13. http://math.stanford.edu/~feferman/papers/foundations.pdf
14. 박창균, 괴델의 삶과 사상 - '여백의 철학'을 위한 소고, 한국수학사학회지 제19권 2호, pp. 47-58, 2006.
15. 박창균, 20세기 수학의 패러다임, 한국수학사학회지 제9권 제2호, pp.22-29, 1996.
16. 버거, 프레드 R., 논리학이란 무엇인가, 김영배 옮김, 서광사, 1988.
17. 서정선, 논리학의 첫걸음, 서광사, 2002.

*The Korean Journal for History of Mathematics* Vol. 21 No. 1 (Feb. 2008), 17 - 28

# A Historical Background of Mathematical Logic and Gödel

Department of Philosophy, Seokyeong University **Chang Kyun Park**

This Paper introduces a historical background of mathematical logic. Logic and mathematics were not developed dependently until the mid of the nineteenth century, when two streams of logic and mathematics came to form a river so that brought forth synergy effects. Since the mid-nineteenth century mathematization of logic were proceeded while attempts to reduce mathematics to logic were made. Against this background Gödel's proof shows the limitation of formalism by proving that there are true arithmetical propositions that are not provable.

*Key words* :mathematical logic, symbolic logic, Boole, Frege, Russell, Gödel

2000 Mathematical Subject Classification : 01A30, 01A50

논문 접수 : 2007 년 11월 심사 완료 : 2008 년 2월