

전달행렬법을 이용한 베벨기어 시스템의 진동특성연구

이형우[#], 배명호^{*}

Vibration Characteristic Study of Bevel Geared System Using Transfer Matrix Method

Hyoung Woo Lee[#] and Myung Ho Bae^{*}

ABSTRACT

A new approach to the critical speed calculation of general multi-mesh gear chain system included bevel gear is presented. A transfer matrix model based on Hibner's branch method is developed and the natural properties of the branched rotor system are calculated with using the λ -matrix formulation. A Campbell diagram, in which the excitation sources caused by the mass unbalance of the rotors, misalignment and the transmitted errors of the gearing are considered, shows that, at the neighborhood of the operating speed, there are the two critical speeds amplifying the first mode and the eighth mode.

Key Words : Bevel gear (베벨기어), Transfer matrix (전달행렬법), Critical speed (위험속도), Transmitted error of the gearing (치합전달오차)

1. 서론

동력전달장치에서 기어장치는 강력한 동력을 전달할 수 있고, 확실한 감속비를 제공하기 때문에 산업-발전용 회전기계에 널리 사용되는 중요 기계 장치이다. 최근, 기계의 대형화, 고동력화, 고속화로 인하여 기어장치의 진동 소음이 중요한 문제로 대두되고 있다. 기어장치는 복잡한 기구학적 특성을 가지기 때문에 동역학 해석을 위해서는 먼저 엄밀한 기구학적 관계규명이 선결되어야한다. 기어장치는 로터-베어링-회전축계의 연성계로서 유한요소법이나 전달행렬법을 이용하여 수치해석을 하고 있

다.

전달행렬법은 Prohl¹에 의해서 처음 제안되어 축계 강제진동 해석에 유용한 기법으로 널리 사용되어 왔다. 전달행렬법은 유한요소법에 비하여 자유도를 훨씬 작게 잡을 수 있는 장점이 있으나 고유치해석을 위해서는 직접탐색법으로 고유진동수를 구해야 하는 번거로움 때문에 일부 간단한 축계에만 적용하여 왔다. Lund²와 Bansal, Kirk³는 유막 베어링에 지지되는 유연 축계의 고유치 해석과 시스템의 안정성을 평가하기 위하여 전달행렬법을 적용하였다. 그러나 전달행렬 모델링에 의한 고유치 해석 알고리즘은 축계의 자유도가 많아질 수록

접수일: 2007년 3월 19일; 게재승인일: 2008년 1월 30일

교신저자: 부산대학교 기계공학부

E-mail: leehwoo@pusan.ac.kr Tel. (051) 510-2598

* 창원전문대학 자동차과

계산오차가 크며, 일부의 고유 진동수를 빠뜨릴 염려가 있다. Kim, David⁴는 직접탐색법에 의한 고유치 해석의 단점을 개선하기 위하여 유연 로터-베어링계 특성방정식의 역급수 항의 계수를 직접 유도하였고, 다시 특성방정식을 고유치 문제로 바꾸어서 모든 자유도에 대하여 모드해석을 했다.

치차가 포함된 로터-베어링 축계는 가지점이 존재하는데, Goodoin,⁵ Rao⁶는 가지마다 전달행렬을 각각 유도하여 통합된 특성방정식을 구하였다. 반면에 Mitchel⁷은 가지점에서의 관계식 유도의 번거로움을 피하기 위하여 Hibner's branch를 도입한 전달행렬법을 제안하였는데 이 방법은 국부 전달행렬식을 다축에 대하여 동시에 고려한 것으로서 가지점의 수와 가지점의 위치에 상관없이 일반성있게 전달행렬법을 적용할 수 있다. Park⁸은 스퍼기어, 헬리컬기어의 평형축 치차계의 강제진동 해석에 이 방법을 적용하여 그 효용성을 보인 바 있다. 지금까지 베벨기어 같은 비평형축에 대해 전달행렬법을 적용한 사례는 미흡한 실정이다.

본 연구에서는 Fig. 1과 같은 베벨기어가 포함된 기어시스템의 진동해석을 위한 수학적 모델을 개발하고 전달행렬법을 적용하여 고유진동 특성을 해석하고자한다. 기어접촉부에 대한 진동모델은 치의 탄성변형을 고려하여 등가스프링으로 놓고 국부 전달행렬을 유도하였다. 고유진동특성을 해석하기 위하여 고유치 방정식을 λ 로 표현되는 특성행렬로 유도하였고 베벨기어 시스템에 적용하였다. 또, 베벨기어시스템의 가진원과 고유진동수를 구하여 위험속도 평가를 하였다.

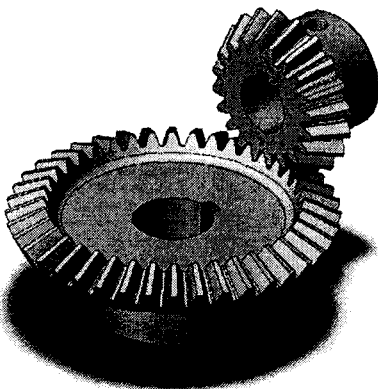


Fig. 1 Bevel Gear

2. 베벨기어 시스템의 수학적 모형화

Fig. 1과 같은 베벨기어 시스템을 기어연쇄부, 축부, 로터부 그리고 베어링부로 나누어 전달행렬법으로 수학적 모형화 하였다. 각각의 요소의 각 절점에 대해서는 축방향 및 축방향 변위, 굽힘 및 비틀림 회전, 자이로 효과를 모두 고려한 6자유도로 모델링 하였다. 한 쌍의 베벨기어는 회전하는 두 개의 강체와 탄성 변형하는 치접촉부, 즉 두 기초원에 연결된 한 개의 스프링 요소로 가정하고 감쇠는 무시하였다. 동력축은 무질량 탄성체로, 로터는 강체운동을 하는 운동에너지 저장요소로, 베어링은 모두 선형 스프링으로 가정하였다.

2.1 Hibner's Branch방법을 이용한 베벨기어 시스템의 전달행렬

Hibner's branch법은 국부전달행렬식을 다축에 대하여 동시에 고려한 것으로서 가지 점의 수와 가지 점의 위치에 상관없이 일반성 있게 전달행렬법을 적용할 수 있다. Hibner's branch법의 기본 개념을 설명하기 위하여 Fig. 2와 같이 다축에 적용된 전달행렬법의 상태도를 생각해 본다. 상태벡터는 line 1, 2의 상태변수로 구성된다.

Fig. 2에서 보는 것처럼, 2개의 line과 2개의 필드(field), 3개의 스테이션(station)으로 구성되어있다. 필드 1에서는 line 1과 line 2는 축으로 구성되어 있다. 또 필드 2의 line 1과 2는 구동기어와 종동기어 사이에 치 접촉으로 연결되어 있기 때문에 line 별 상태변수들 간에 연결된 관계식이 성립된다.

line 1과 line 2의 상태벡터를 정의하면 다음과 같다.

$$\underline{d}_1 = \begin{pmatrix} d_1 \\ F_1 \end{pmatrix}, \underline{d}_2 = \begin{pmatrix} d_2 \\ F_2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

여기서,

$$\underline{d}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ \theta_{x_1} \\ \theta_{y_1} \\ \theta_{z_1} \end{pmatrix}, \underline{F}_1 = \begin{pmatrix} F_{x_1} \\ F_{y_1} \\ F_{z_1} \\ M_{x_1} \\ M_{y_1} \\ M_{z_1} \end{pmatrix}$$

$$\underline{d}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ \theta_{x_2} \\ \theta_{y_2} \\ \theta_{z_2} \end{pmatrix}, \quad \underline{F}_2 = \begin{pmatrix} F_{x_2} \\ F_{y_2} \\ F_{z_2} \\ M_{x_2} \\ M_{y_2} \\ M_{z_2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \underline{d}_1 \\ \underline{F}_1 \\ \underline{d}_2 \\ \underline{F}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} \\ T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \underline{d}_1 \\ \underline{F}_1 \\ \underline{d}_2 \\ \underline{F}_2 \end{pmatrix} \quad (4)$$

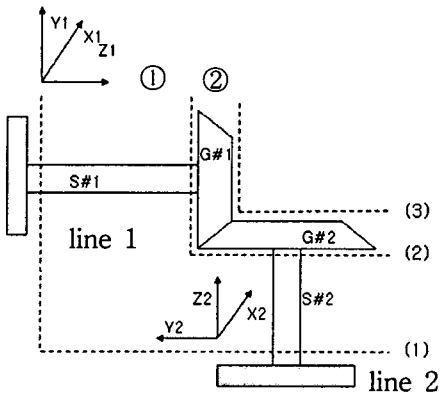
식 (4)에 경계조건을 적용하면 스테이션 (1)에서 클램프 되어 있으므로 d_1, d_1' 은 영이 된다. 마찬가지로, 스테이션 (3)에서 클램프 되어 있으므로 d_1, d_1' 은 영이 된다. 이 값을 식 (4)에 적용하면 다음과 같은 특성방정식을 얻을 수 있다.

$$T_{12} F_1^{(1)} + T_{14} F_2^{(1)} = 0 \quad (5)$$

$$T_{32} F_1^{(1)} + T_{34} F_2^{(1)} = 0$$

각각의 국부 전달 행렬로부터 $T_{12}, T_{14}, T_{32}, T_{34}$ 는 구해지고, 식(5)를 행렬로 나타내면 다음과 같다.

$$[T] \underline{u} = \underline{0} \quad (6)$$



○ : field number () : station number
S#1, S#2: Shaft 1, 2 G#1, G#2: Gear 1, 2

Fig. 2 A system of bevel gear

스테이션 (1), (2)사이의 관계는 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} \underline{u}_1 \\ \underline{u}_2 \end{pmatrix}_2 = \begin{pmatrix} F_{S_1} & 0 \\ 0 & F_{S_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{u}_1 \\ \underline{u}_2 \end{pmatrix}_1 \quad (2)$$

여기서, F_{S_1} 은 line 1의 회전축 1에 대한 국부 전달행렬이고, F_{S_2} 은 line 2의 회전축 2에 대한 국부 전달행렬이다.

스테이션 (2), (3)사이의 관계는 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} \underline{u}_1 \\ \underline{u}_2 \end{pmatrix}_3 = \begin{pmatrix} F_{G_1} & F_{G_2} \\ F_{G_1} & F_{G_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{u}_1 \\ \underline{u}_2 \end{pmatrix}_2 \quad (3)$$

여기서, $F_{G_1}, F_{G_2}, F_{G_1}, F_{G_2}$ 는 각각 기어연쇄 1의 국부 전달행렬이고, 2.2절 베벨기어 쌍의 전달행렬에서 유도된다.

따라서, 식 (1)~(3)에 의해 마지막 스테이션과 첫 스테이션과의 관계가 결정되며 아래와 같이 나타낼 수 있다.

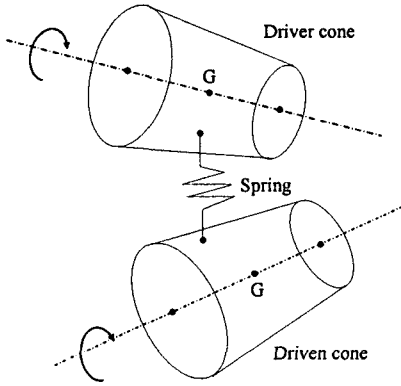
2.2 베벨기어 쌍의 전달행렬

베벨기어가 포함된 기어장치에 대한 진동해석을 하기 위해서 구동기어와 종동기어 그리고 치접촉부에 대한 진동모델을 다음과 같이 수립하고자 한다. 따라서 치 접촉부의 변형을 치폭의 중앙점을 지지 점으로 하는 스프링으로 대치시키고 양 기어 축 연결점은 핀 연결로 가정한다. 구동기어와 종동기어를 편의상 구동원추와 종동원추로 보고 두 원추는 모두 강체로 가정한다. 양 기어는 앞에서 언급한대로 스프링으로 연결되어 있다. 국부전달행렬을 유도하기 위하여 각 기어의 양단 축 중심에 절점을 정하고 보조절점으로 무게중심과 치 접촉점을 정한다.

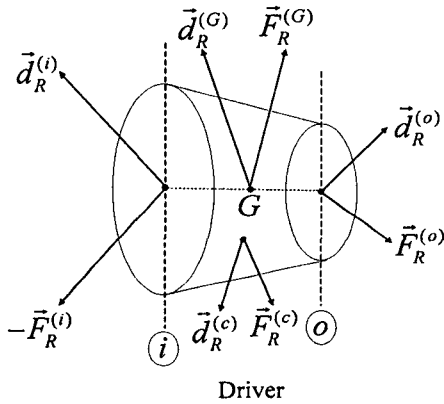
Fig. 3은 베벨기어 쌍의 수학적 모델, 각기어의 자유물체도 및 작용 힘과 변위를 나타낸다. 절점에서의 병진운동 벡터 \vec{u} 와 회전운동벡터 $\vec{\theta}$ 로 구성된 6×1 일반화된 변위벡터를

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} \underline{u} \\ \underline{\theta} \end{pmatrix} \quad (7)$$

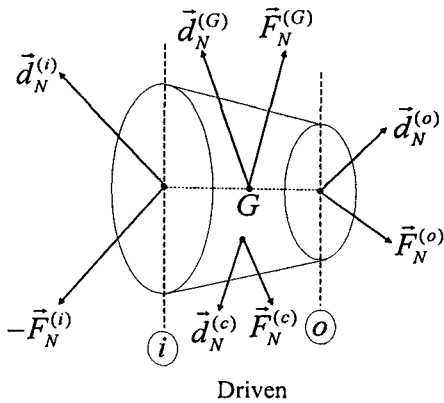
로 표시하고 절점에 작용하는 힘 벡터 \vec{F} 와 모멘트



(a) A mathematical model of bevel gear pair



(b) Free body diagram of driver gear



(c) Free body diagram of driven gear

Fig. 3 Vibration model of face contact of bevel gear tooth

벡터 \vec{M} 으로 구성된 6×1 일반화된 힘벡터를

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} \vec{F} \\ \vec{M} \end{pmatrix} \quad (8)$$

로 표시하기로 한다. 좌표계는 기어시스템에서 각 회전축마다 한 개씩 공간고정인 국부좌표계를 선정하고 이 때 +Z축은 축 방향과 일치시킨다. station 번호는 Z위치가 증가하는 방향으로 매겨나간다. Fig. 3(b)의 구동기어에 힘과 모멘트에 대한 운동방정식을 적용하고, station(o)와 (i)사이의 변수들 간의 관계를 유도하면 다음과 같이 된다.

$$\vec{u}_R^{(o)} = \vec{u}_R^{(i)} - [B_R^{(3)}] \vec{u}_R^{(i)} \quad (9)$$

$$\vec{\theta}_R^{(o)} = \vec{\theta}_R^{(i)} \quad (10)$$

$$\vec{F}_R^{(o)} = m_R \vec{u}_R^{(i)} + m_R [B_R^{(1)}] \vec{\theta}_R^{(i)} + \vec{F}_R^{(i)} - \vec{F}_R^{(c)} \quad (11)$$

$$\vec{M}_R^{(o)} = -m_R [B_R^{(2)}] \vec{u}_R^{(i)} + \{([J_R] - m_R [B_R^{(4)}]) \vec{\theta}_R^{(i)} + [G_R] \vec{\theta}_R^{(o)}\} - [B_R^{(3)}] \vec{F}_R^{(i)} + \vec{M}_R^{(i)} + [B_R^{(5)}] \vec{F}_R^{(c)} \quad (12)$$

여기서

$$[B_R^{(1)}] = \begin{bmatrix} 0 & -(z_R^{(i)} - z_R^{(G)}) & (y_R^{(i)} - y_R^{(G)}) \\ (z_R^{(i)} - z_R^{(G)}) & 0 & -(x_R^{(i)} - x_R^{(G)}) \\ -(y_R^{(i)} - y_R^{(G)}) & (x_R^{(i)} - x_R^{(G)}) & 0 \end{bmatrix}$$

$$[B_R^{(2)}] = \begin{bmatrix} 0 & -(z_R^{(o)} - z_R^{(G)}) & (y_R^{(o)} - y_R^{(G)}) \\ (z_R^{(o)} - z_R^{(G)}) & 0 & -(x_R^{(o)} - x_R^{(G)}) \\ -(y_R^{(o)} - y_R^{(G)}) & (x_R^{(o)} - x_R^{(G)}) & 0 \end{bmatrix}$$

$$[B_R^{(3)}] = \begin{bmatrix} 0 & -(z_R^{(o)} - z_R^{(i)}) & (y_R^{(o)} - y_R^{(i)}) \\ (z_R^{(o)} - z_R^{(i)}) & 0 & -(x_R^{(o)} - x_R^{(i)}) \\ -(y_R^{(o)} - y_R^{(i)}) & (x_R^{(o)} - x_R^{(i)}) & 0 \end{bmatrix}$$

$$[B_R^{(4)}] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

$$b_{11} = (x_R^{(o)} - x_R^{(G)})(x_R^{(i)} - x_R^{(G)}) - b_{33}$$

$$\begin{aligned}
 b_{12} &= (y_R^{(o)} - y_R^{(G)})(x_R^{(i)} - x_R^{(G)}) \\
 b_{13} &= (z_R^{(o)} - z_R^{(G)})(x_R^{(i)} - x_R^{(G)}) \\
 b_{21} &= (x_R^{(o)} - x_R^{(G)})(y_R^{(i)} - y_R^{(G)}) \\
 b_{22} &= (y_R^{(o)} - y_R^{(G)})(y_R^{(i)} - y_R^{(G)}) - b3 \\
 b_{23} &= (z_R^{(o)} - z_R^{(G)})(y_R^{(i)} - y_R^{(G)}) \\
 b_{31} &= (x_R^{(o)} - x_R^{(G)})(z_R^{(i)} - z_R^{(G)}) \\
 b_{32} &= (y_R^{(o)} - y_R^{(G)})(z_R^{(i)} - z_R^{(G)}) \\
 b_{33} &= (z_R^{(o)} - z_R^{(G)})(z_R^{(i)} - z_R^{(G)}) - b3 \\
 b3 &= (x_R^{(o)} - x_R^{(G)})(x_R^{(i)} - x_R^{(G)}) + (y_R^{(o)} - y_R^{(G)})(y_R^{(i)} - y_R^{(G)}) \\
 &\quad + (z_R^{(o)} - z_R^{(G)})(z_R^{(i)} - z_R^{(G)})
 \end{aligned}$$

$$[B_R^{(5)}] = \begin{bmatrix} 0 & -(z_R^{(o)} - z_R^{(c)}) & (y_R^{(o)} - y_R^{(c)}) \\ (z_R^{(o)} - z_R^{(c)}) & 0 & -(x_R^{(o)} - x_R^{(c)}) \\ -(y_R^{(o)} - y_R^{(c)}) & (x_R^{(o)} - x_R^{(c)}) & 0 \end{bmatrix}$$

마찬가지로, Fig. 3(c)의 종동기어에 대하여 station(o)와 (i)사이의 변수들 간의 관계를 유도하면 다음과 같다.

$$\vec{u}_N^{(o)} = \vec{u}_N^{(i)} - [B_R^{(3)}]\vec{\theta}_N^{(i)} \quad (13)$$

$$\vec{\theta}_N^{(o)} = \vec{\theta}_N^{(i)} \quad (14)$$

$$\vec{F}_N^{(o)} = m_N \vec{u}_N^{(i)} + m_N [B_N^{(1)}]\vec{\theta}_N^{(i)} + \vec{F}_N^{(i)} - \vec{F}_N^{(c)} \quad (15)$$

$$\begin{aligned}
 \vec{M}_N^{(o)} &= -m_N [B_N^{(2)}]\vec{u}_N^{(i)} + \{([J_N] - m_N [B_N^{(4)}])\vec{\theta}_N^{(i)} + [G_N]\vec{\theta}_N^{(o)}\} \\
 &\quad - [B_N^{(3)}]\vec{F}_N^{(i)} + \vec{M}_N^{(i)} + [B_N^{(5)}]\vec{F}_N^{(c)} \quad (16)
 \end{aligned}$$

치접촉부 진동모델인 스프링요소의 자유물체도는 Fig. 4와 같다.

치접촉 압축력의 크기를 정의하면 다음과 같다.

$$F_{th} = K_{th}(\Delta R - \Delta N) \quad (17)$$

여기서 ΔR 는 점 R의 치 접촉방향의 압축 변형량, ΔN 는 점 N의 치 접촉방향의 인장 변형량이고 K_{th} 는 등가 스프링 상수이다. 앞서 보여준 Fig. 2-(b),

(c)에서 스프링 모델의 반력 $\vec{F}_R^{(c)}$, $\vec{F}_N^{(c)}$ 대신에 무게 중심 G에 일반화된 힘 벡터 $\vec{f}_R^{(G)}$, $\vec{f}_N^{(G)}$ 로 대체시키면 다음과 같다.

$$\vec{f}_R^{(G)} = \begin{pmatrix} \vec{F}_R^{(G)} \\ \vec{M}_R^{(G)} \end{pmatrix}, \quad \vec{f}_N^{(G)} = \begin{pmatrix} \vec{F}_N^{(G)} \\ \vec{M}_N^{(G)} \end{pmatrix} \quad (18)$$

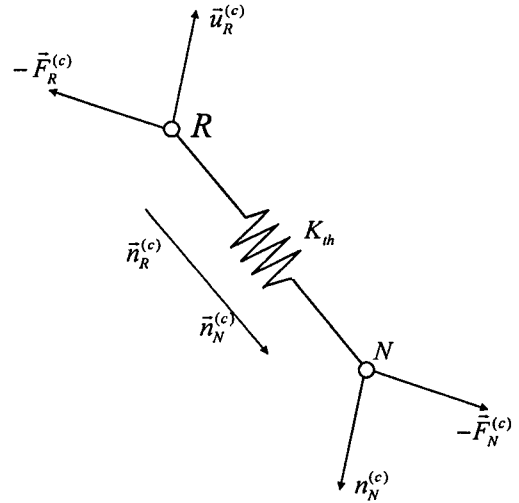


Fig. 4 Model of bevel gear pair

양기어의 몸체를 탄성변형체로 보면 무게중심 G에서의 변위와 힘의 관계는 다음과 같이 된다.

$$\vec{f}_R^{(G)} = K_G \vec{\Delta d}_R \quad (19)$$

$$\vec{f}_N^{(G)} = K_G \vec{\Delta d}_N \quad (20)$$

여기서

$$\vec{\Delta d}_R = \vec{d}_R - \vec{d}_N, \quad \vec{\Delta d}_N = \vec{d}_N - \vec{d}_R$$

$$K_G = \begin{bmatrix} K^{(FF)} & K^{(FM)} \\ K^{(MF)} & K^{(MM)} \end{bmatrix}$$

K_G 는 유연영향계수법을 이용하고 유한요소모델을 개발하여 산출할 수 있다.⁹

식 (18)~(20)을 행렬과 벡터 관계식으로 나타내고 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} \overrightarrow{S_R^{(o)}} \\ \overrightarrow{S_N^{(o)}} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} T_{RR} & T_{RN} \\ T_{NR} & T_{NN} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \overrightarrow{S_R^{(i)}} \\ \overrightarrow{S_N^{(i)}} \end{pmatrix} \quad (21)$$

여기서,

$$\overrightarrow{S_R^{(i)}} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{d_R^{(i)}} \\ \overrightarrow{f_R^{(i)}} \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{S_R^{(o)}} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{d_R^{(o)}} \\ \overrightarrow{f_R^{(o)}} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{S_N^{(i)}} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{d_N^{(i)}} \\ \overrightarrow{f_N^{(i)}} \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{S_N^{(o)}} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{d_N^{(o)}} \\ \overrightarrow{f_N^{(o)}} \end{pmatrix}$$

$$T_{RR} = M_{RR} + K_{th} R_{RR} \quad (22)$$

$$T_{RN} = K_{th} R_{RN} \quad (23)$$

$$T_{NR} = K_{th} R_{NR} \quad (24)$$

$$T_{NN} = M_{NN} + K_{th} R_{NN} \quad (25)$$

이다. 여기서

$$T_{RR} = \begin{bmatrix} [J] & -[B_R^{(2)}] & [0] & [0] \\ [0] & [J] & [0] & [J] \\ [K_{RN}^{(11)}] & [K_{RN}^{(12)}] & [J] & [0] \\ [K_{RN}^{(21)}] & [K_{RN}^{(22)}] & -[B_R^{(2)}] & [J] \end{bmatrix}$$

$$[K_{RN}^{(11)}] = -[K_{RN}^{(FF)}]$$

$$[K_{RN}^{(12)}] = -[K_{RN}^{(FF)}][B_N^{(1)}] - [K_{RN}^{(FM)}]$$

$$[K_{RN}^{(21)}] = -[K_{RN}^{(MF)}] + [B_R^{(3)}][K_{RN}^{(FF)}]$$

$$[K_{RN}^{(22)}] = -[K_{RN}^{(MF)}][B_N^{(1)}] - [K_{RN}^{(MM)}] + [B_R^{(3)}][K_{RN}^{(FF)}][B_N^{(1)}] + [B_R^{(3)}][K_{RN}^{(FM)}]$$

$$T_{RN} = \begin{bmatrix} [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] \\ [K_{RN}^{(33)}] & [K_{RN}^{(34)}] & [0] & [0] \\ [K_{RN}^{(43)}] & [K_{RN}^{(44)}] & [0] & [0] \end{bmatrix}$$

$$[K_{RN}^{(33)}] = [K_{RN}^{(FF)}]$$

$$[K_{RN}^{(34)}] = [K_{RN}^{(FF)}][B_N^{(1)}] + [K_{RN}^{(FM)}]$$

$$[K_{RN}^{(43)}] = [K_{RN}^{(MF)}] - [B_R^{(3)}][K_{RN}^{(FF)}]$$

$$[K_{RN}^{(44)}] = [K_{RN}^{(MF)}][B_N^{(1)}] + [K_{RN}^{(MM)}] - [B_R^{(3)}][K_{RN}^{(FF)}][B_N^{(1)}] + [B_R^{(3)}][K_{RN}^{(FM)}]$$

$$T_{NR} = \begin{bmatrix} [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] \\ [K_{NR}^{(11)}] & [K_{NR}^{(12)}] & [0] & [0] \\ [K_{NR}^{(21)}] & [K_{NR}^{(22)}] & [0] & [0] \end{bmatrix}$$

$$[K_{NR}^{(11)}] = [K_{NR}^{(FF)}]$$

$$[K_{NR}^{(12)}] = [K_{NR}^{(FF)}][B_N^{(1)}] + [K_{NR}^{(FM)}]$$

$$[K_{NR}^{(21)}] = [K_{NR}^{(MF)}] - [B_N^{(3)}][K_{NR}^{(FF)}]$$

$$[K_{NR}^{(22)}] = [K_{NR}^{(MF)}][B_N^{(1)}] + [K_{NR}^{(MM)}] - [B_N^{(3)}][K_{NR}^{(FF)}][B_N^{(1)}] - [B_N^{(3)}][K_{NR}^{(FM)}]$$

$$T_{NN} = \begin{bmatrix} [J] & -[B_N^{(2)}] & [0] & [0] \\ [0] & [J] & [0] & [J] \\ [K_{NN}^{(33)}] & [K_{NN}^{(34)}] & [J] & [0] \\ [K_{NN}^{(43)}] & [K_{NN}^{(44)}] & -[B_N^{(2)}] & [J] \end{bmatrix}$$

$$[K_{NR}^{(33)}] = -[K_{NR}^{(FF)}]$$

$$[K_{NR}^{(34)}] = -[K_{NR}^{(FF)}][B_N^{(1)}] - [K_{NR}^{(FM)}]$$

$$[K_{NR}^{(43)}] = -[K_{NR}^{(MF)}] + [B_N^{(3)}][K_{NR}^{(FF)}]$$

$$[K_{NR}^{(44)}] = -[K_{NR}^{(MF)}][B_N^{(1)}] - [K_{NR}^{(MM)}] + [B_N^{(3)}][K_{NR}^{(FF)}][B_N^{(1)}] + [B_N^{(3)}][K_{NR}^{(FM)}]$$

이다.

2.3 베벨기어시스템의 고유진동 해석

전달행렬법은 고유치 해석을 위해서 직접탐색 방법으로 고유진동수를 구하거나, 특성방정식의 멱급수항으로 유도하여 고유진동수를 구하는데, 자유도가 많은 복잡한 다단 치차계의 경우, 계산오차가 크고 일부 고유진동수를 빠뜨릴 염려가 있다.

다축을 동시에 고려한 전달행렬법을 수식적으로 정리하면 다음과 같다. i 번째 스테이션의 상태 변수 벡터 $\underline{s}_i(t)$ 에 대하여 $\underline{s}_i(t) = \underline{s}_i e^{st}$ 라 할 때, 스테이션 i 와 $i+1$ 사이의 일반적인 다축 전달행렬 관계식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\underline{s}_{i+1} = \underline{L}_i \underline{s}_i \quad (26)$$

여기서 L_i 는 i 번째 필드의 다축 국부전달행렬로서,

$$(A\lambda - B)\underline{x} = 0 \quad (34)$$

$$L_i = L_{i0} + L_{i1}\lambda + L_{i2}\lambda^2 \quad (27)$$

여기서,

로 표현된다. 여기서 L_{i0} 은 강성요소에 의한, L_{i1} 는 감쇠요소에 의한, 그리고 L_{i2} 는 관성요소에 의한 다축 국부전달행렬이다. 다축 회전기계의 양단 사이의 전달행렬 관계식은 국부전달행렬의 연속적인 곱에 의해 다음과 같이 얻어진다.

$$\underline{S}_N = H\underline{S}_1 \quad (28)$$

여기서, H 는 누적된 다축 전달행렬식으로 다음과 같이 정의된다.

$$H = \prod_{j=1}^{N-1} L_{N-j} \quad (29)$$

양단의 경계조건은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\underline{Q} = B_{S_N}^T \underline{S}_N \quad (30)$$

$$\underline{S}_1 = B_L \underline{z} \quad (31)$$

여기서 B_r , B_L 은 각각 스테이션 N 과 스테이션 1 에서의 축의 경계조건으로 부터 정의되는 상수 행렬이다.

식 (30), (31)를 식 (28)에 적용하면, 다음과 같은 고유치 식을 얻는다.

$$\underline{Q} = D_p(\lambda)\underline{z} \quad (32)$$

여기서, $D_p(\lambda) = B_r^T H B_L$ 이고 이를 λ 로 표현되는 특성행렬로 나타내면 다음과 같다.

$$D_p(\lambda) = E_0 + E_1\lambda + E_2\lambda^2 + \dots + E_{p-1}\lambda^{p-1} + E_p\lambda^p \quad (33)$$

식 (33)을 일반화된 고유치 문제로 바꾸면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & E_p \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & E_p & E_{p-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & E_{p-1} & E_{p-2} \\ 0 & 0 & E_p & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & E_p & E_{p-1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ E_p & E_{p-1} & E_{p-2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & E_1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & E_p & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & E_p & E_{p-1} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & E_{p-1} & E_{p-2} & 0 \\ 0 & E_p & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & E_3 & E_2 & 0 \\ E_p & E_{p-1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & E_3 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & -E_0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} \lambda^{(p-1)} \underline{z} \\ \lambda^{(p-2)} \underline{z} \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} \cdot \lambda^1 \underline{z}$$

이다. 식 (34)는 일반고유치 알고리즘을 이용하면 고유진동수와 상태벡터를 빠짐없이 구할 수 있다.

3. 베벨기어시스템의 진동특성 연구

베벨기어 시스템의 가진원은 회전 불평형에 의한 가진, 기어접촉부의 치형오차에 의한 가진, 치형 피치오차로 인한 가진, 베어링과 회전축의 설치오차로 인한 가진 등이 있으며 그 밖에 치형강성계수의 시간적 변화로 인한 자려가진과 구름베어링 부에서의 유격 및 비선형 변형으로 인한 가진 등이 있다.

회전불평형에 의한 가진진동수는 회전속도(ω)와 같다. 베어링과 회전축의 설치오차로 인한 가진은 회전속도의 정수배($2\omega, 3\omega$ etc)로 나타난다. 기어 접촉부에서 치형가공오차, 피치오차와 구동시의 부하에 의한 치접촉부의 변형으로 인해 치합전달오차를 발생시킨다. 이것으로 인해 기어 화인소음을 발생시킨다. 이 때의 가진진동수는 축의 회전각속도에 기어 잇수를 곱한 소위 치통과 주파수(Ω)가 된

다. 또, 치접촉부의 강성계수는 접촉위치에 따라 주기적으로 변하므로 이에 대한 자려가진력은 회전축 진동수와 치통과 주파수 및 그의 정수배의 측파대 (side bands)($k\Omega \pm \omega$, $k=1, 2, 3$ etc)주파수가 된다. 기어접촉부에서의 백래쉬 효과 및 베어링의 간격에 의한 비선형특성이 큰 경우는 회전수의 1/2, 1/3등에서 공진이 일어나는 소위 분수조화진동을 일으킨다. 베어링과 회전축의 설치오차, 치형강성계수의 시간적 변화, 구름베어링 부에서의 유격 및 비선형 변형등에 의한 이차적가진은 일차적 가진원의 조합에 의해 나타난다.¹⁰

기어-로터 시스템의 진동/소음은 기어-로터 시스템의 가진진동수와 고유진동수가 일치 할 때 발생한다. 가진 진동수를 γ_i , $i=1, 2, \dots$ 라 하고 기어-로터 시스템 고유진동수를 λ_i , $i=1, 2, \dots, N$ 이라 하면,

$$\gamma_i = \lambda_i \tag{35}$$

일 때 공진 떨림이 발생하는데, $\gamma_i = c_i \omega_{cr}$ 로 놓으면 위험속도는

$$\omega_{cr} = \lambda_i / c_i \tag{36}$$

가 된다. 운전속도 범위 내에 위험속도가 존재하지 않도록 설계를 한다.

Table 1은 Fig. 4의 베벨기어 시스템의 진동모델에 대한 축의 제원을 나타낸다. Table 2는 기어제원을 나타낸다. Table 3은 전달행렬법에 의해 구한 베벨기어시스템의 고유진동수를 나타내고 Table 4는 베벨기어시스템의 가진원을 나타낸다. Table 4를 근거로 하여 캠벨선도(Campbell diagram)인 Fig. 5를 얻었다. Fig. 5는 베벨기어시스템의 입력축 기준속도 50rpm~3000rpm에 대한 고유진동수와 가진 진동수의 변화를 나타내고 있다.

Fig. 5에서 운전속도(1500rpm) 근처인 1476rpm, 1502rpm서 위험속도가 존재하고, 그 때의 고유진동수는 50.07Hz, 984.12Hz이다. 1476rpm은 구동축의 축어긋남에 의해 발생하고 1502rpm은 치합전달오차에 의해 발생하므로, 저감대책은 구동축의 축정렬과 베벨기어 쌍의 치형수정이 필요하다.

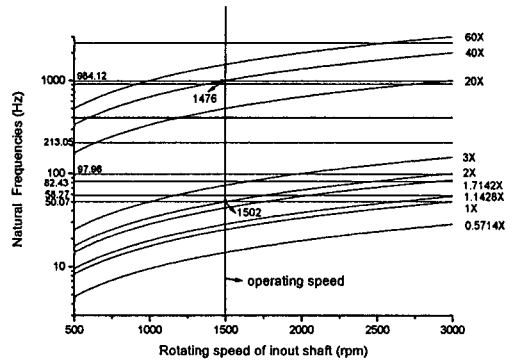


Fig. 5 Campbell diagram

Table 1 Shaft specifications

Description	S #1	S #2
length (m)	0.4	0.4
diameter (m)	0.02	0.02
Young's modulus (N/m ²)	2×10^{11}	2×10^{11}
Poisson's ratio	0.25	0.25

Table 2 Gear specifications

Description	Pinion	Gear
Number of teeth	20	35
Mass (kg)	9.1	23.8
I_d (kg m ²)	0.0193	0.1217
I_p (kg m ²)	0.0386	0.2434
Shaft angle	90°	
Tooth stiffness (N/m)	1×10^8	
Pressure angle	20°	

Table 3 Natural frequency of bevel gear system

Mode #	Natural Frequency
1	50.07
2	58.27
3	82.43
4	97.96
5	213.05
6	393.14
7	400.95
8	919.75
9	984.12
10	2564.46
11	4093.51
12	7510.57

Table 4 Forcing frequency of run speed

Self Exciting Source	Equation
Mass Unbalance (ω_1)	1X
Mass Unbalance (ω_2)	0.5714X
Misalignment (input shaft)	2 X
Misalignment (input shaft)	3 X
Misalignment (output shaft)	1.1428 X
Misalignment (output shaft)	1.7142 X
Gear Profile Error (Ω)	20X
Gear Profile Error (2 Ω)	40X
Gear Profile Error (3 Ω)	60X

4. 결론

본 연구에서는 전달행렬법을 이용하여 베벨기어 쌍의 진동 모델을 개발하고 베벨기어 시스템의 진동특성을 파악하였다.

1) 한 쌍의 베벨기어를 회전하는 두 개의 강체와 탄성 변형하는 치접축부, 즉 두 기초원에 연결된 한 개의 스프링 요소로 가정하는 베벨기어 쌍의 수학적 진동모델을 개발하였다.

2) 베벨기어시스템을 Hibner's branch을 이용한 전달행렬법으로 유도하고, 고유진동수를 구하기 위하여 λ 로 표현되는 특성 행렬로 전환하여 고유진동특성을 해석하였다.

3) 베벨기어시스템의 가진원과 고유진동수를 구하여 위험속도 평가를 하였다. 운전속도(1500 rpm) 근처인 1476 rpm, 1502 rpm서 위험속도가 존재하였고, 그 때의 고유진동수는 50.07 Hz, 984.12 Hz이다. 1476rpm은 구동축의 축어긋남에 의해 발생하고 1502 rpm은 치합전달오차에 의해 발생하므로, 저감대책은 구동축의 축정렬과 베벨기어 쌍의 치형수정이 필요할 것으로 사료된다.

참고문헌

1. Prohl, M. A., "A General Method for calculating Critical Speeds of Flexible Rotors," ASME

Journal of Applied Mechanics, Vol. 12, No. 1, pp. A-142-A-148, 1945.

2. Lund, J. W., "Stability and Damped Critical Speeds of Flexible Rotor in Fluid-Film Bearings," ASME Journal of Engineering for Industry, Vol. 96, No. 2, pp. 509-517, 1974.

3. Bansal, P. N. and Kirk, R. G., "Stability and Damped Critical Speeds of Rotor-Bearing Systems," ASME Journal of Engineering for Industry, Vol. 97, No. 3, pp. 1325-1332, 1975.

4. Kim, D. and David, J. W., "An Improved Method for Stability and Damped Critical Speeds of Rotor-Bearing Systems," ASME Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 112, No. 1, pp. 112-118, 1990.

5. Goodwin, M. J., "Dynamics of Rotor-bearing System," Principle Lecture, Dept. of Mech. and Computer-Aided Engineering, Staffordshire polytechnic, Staffordshire Polytech., pp. 1-100, 1989.

6. Rao, J. S., "Rotor Dynamics," 2nd edition, John Wiley & Sons, pp. 9-44, 1991.

7. Mitchell, L. D., "A New Branching Technique for the static and Dynamic Analysis of Geared System," Vibration in Rotating Machinery, I Mech E Conference Publication, pp. 110-114, 1980.

8. Park, N. G., "An Analysis investigation of Geared System Dynamics Containing Spur and Helical gears," Ph. D, North Carolina State University, pp. 10-50, 1987.

9. Kim, H. S., "A Development of Program for Auto Mesh Generation for Calculation of Stiffness Matrix of Spiral Bevel Gear Pairs," M. S. Pusan National University, pp. 3-20, 1998.

10. Lee, H. W., "A Study on Development of Railway Reducer for Low Noise/Vibration," Journal of the Korean Society of Precision Engineering, Vol. 21, No. 2, pp. 130-137, 2004.