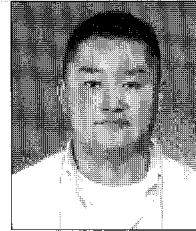


유체해석에 있어서 SPH법의 소개

Introduction to Smoothed Particle Hydrodynamics in Fluid Analysis



김 남 형*



고 행 식**

* 제주대학교 해양과학대학 토목환경공학전공 교수
** 제주대학교 대학원생

1. 서 론

컴퓨터의 용량과 연산속도가 증가함에 따라 이론적으로 해석이 쉽지 않은 물리적 현상들을 해결하기 위하여 컴퓨터를 이용한 수치모의기법들이 활발히 연구되어져 왔다. 이러한 수치모의기법들은 종래 많은 시간과 비용이 드는 실험에 의하지 않고서도 측정하기 어려운 물리적 현상을 예측하고, 실험에 의해서도 측정하기 어려운 복잡한 현상 내에서의 유체유동을 계산하는데 널리 이용되고 있다. 이러한 수치모의의 결과로 얻어지는 자료들도 또한 컴퓨터 그래픽 기술의 발전으로 실제의 유동현상과 가깝게 시간에 따라 가시적으로 보여줄 수 있고, 실시간으로 분석하는 것이 가능하게 되었다.

이러한 수치모의를 수행하기 위해 기존의 유체현상을 해석하는 방법에는 격자구조를 이용하여 해석하는 유한차분법(Finite Difference Method), 경계요소법(Boundary Element Method), 유한요소법(Finite Element Method) 등이 있다. 그러나 이 방법들은 격자들을 통해서 몇 개의 절점을 선정하고 이들의 연관성을 찾는 과정이 우선시 되어야 하기 때문에 움직이는 물질의 접촉면, 경계의 변형, 자유표면을 처리하기 위한 어려움을 가지고 있다.

최근에 격자를 선정해야 하는 번거로움과 어려움을 없애고 전체 계산 영역에서 흩어져 있는 입자만을 이용하여 기존의 방법들의 지닌 어려움을 해결해 보기 위한 무격자입자법(Meshfree Particle Method)들이 많이 개발되어 적용되고 있는 중이다. Smoothed Particle Hydrodynamics(SPH)법은 이들 무격자 방법 중의 하나

로서, 격자대신 입자를 이용한 순수 Lagrangian기법이다. 이 방법 역시 무격자 방법의 장점을 살려 이산적인 공간에서 보간점들로서 격자구조 대신에 완화입자들을 사용하여 물질의 대변형에 따른 이동경계, 자유수면, 물질의 접촉면을 쉽게 추적하여 처리할 수 있는 장점을 지니고 있다. 이 방법은 1970년대 천체물리학 분야(Gingold and Monaghan, 1977)에서 시작되었으며, 그 후 자유수면의 유동에 대한 적용(Monaghan, 1994), 점성을 고려한 유체해석(Takeda et al., 1994), 낮은 레이놀즈수에서 비압축성 유체해석(Morris et al., 1997), 파동문제의 적용(Monaghan and Kos, 1999), 해양구조물에 작용하는 파압연구(Gomez and Dalrymple, 2004) 등 다양한 분야로의 적용이 확장되어가고 있는 실정이다.

이 연구에서는 SPH의 기본원리를 시작하여 해석의 정확성과 효율성을 결정짓는 핵함수와 완화길이에 대해 기술하였고, 지배방정식에 따른 압력과 점성을 결정짓는 상태방정식과 인공점성을 차례로 또한 기술하였다. 아울러 SPH의 유체해석에 대한 적용성의 이해를 돕고자, 물기둥 붕괴와 고립파의 전파현상에 대한 유체현상의 해석기법을 기술하였다.

2. SPH법의 기본 이론

2.1 SPH 근사법(SPH Approximation)

SPH법은 요소나 격자가 아닌 입자를 통해 해석대상을 구성하

고, 핵함수를 이용하여 인접한 입자들의 물리량과 입자간의 관계로부터 각 입자들의 물리량(밀도, 속도, 에너지 등)을 계산한다. 임의 입자의 물리량을 결정하기 위하여 핵함수를 이용하는 핵함수 근사(Kernel Approximation)와 연속계의 적분을 이산계 입자의 총합으로 근사하는 입자근사(Particle Approximation)를 사용하고 있다. 일반적으로 SPH의 함수 $f(x)$ 는 적분형으로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$f(x) = \int_{\Omega} f(x') \delta(x-x') dx' \quad (1)$$

여기서 $\delta(x-x')$ 는 다음의 조건을 갖는 Dirac Delta 함수이다.

$$\delta(x-x') = \begin{cases} 1 & x = x' \\ 0 & x \neq x' \end{cases} \quad (2)$$

이에 기초하여 Dirac Delta 함수와 유사한 형태를 취하는 핵함수(W)를 이용하면 식 (3)과 같은 핵함수 근사식을 얻을 수 있다.

$$\langle f(x) \rangle = \int_{\Omega} f(x') W(x-x', h) dx' \quad (3)$$

여기서 $W(x-x', h)$ 는 핵함수이고, h 는 완화길이(Smoothing Length)로서 핵함수가 값을 가지게 되는 영역의 길이를 나타낸다.

SPH법은 유한개의 이산적인 입자들로 해석 영역이 구성되므로, 연속계의 영역 적분을 유한개의 입자들의 합으로 치환하면 핵함수 근사식 (3)은 다음과 같은 입자 근사식의 형태로 나타낼 수 있다.

$$\langle f(x_i) \rangle = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} f(x_j) W(x_i - x_j, h) \quad (4)$$

여기서 입자 i 에서의 입자 근사함수 $f(x)_i$ 는 주변 입자 j 의 함수와 핵함수에 의하여 표시되며, m_j 와 ρ_j 는 입자 j 의 질량과 밀도이고, m_j/ρ_j 는 입자 j 의 체적을 나타낸다. 그리고 공간도 함수 형태로서 입자근사식을 다음의 식 (5)와 같이 나타낼 수도 있다.

$$\langle \nabla f(x_i) \rangle = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} f(x_j) \nabla_i W_{ij} \quad (5)$$

$$W_{ij} = W(x_i - x_j, h) = W(|x_i - x_j|, h),$$

$$\nabla_i W_{ij} = \frac{x_i - x_j}{r_{ij}} \frac{\partial W_{ij}}{\partial r_{ij}} = \frac{x_{ij}}{r_{ij}} \frac{\partial W_{ij}}{\partial r_{ij}}$$

여기서 r_{ij} 은 입자 i 와 j 사이의 거리이다.

2.2 핵함수(Kernel Function)

핵함수는 Dirac Delta 함수와 유사한 특성을 나타내야 함으로 다음과 같은 세 가지 조건을 만족해야 한다.

- Normalization Condition: $\int_{\Omega} W(x-x', h) dx' = 1$
- Delta Function Property: $\lim_{h \rightarrow 0} W(x-x', h) = \delta(x-x')$ (6)
- Compact Condition: $W(x-x', h) = 0$ when $|x-x'| > \kappa h$

여기서 κ 는 핵함수와 관련된 상수이고, 핵함수의 유효면적을 정의한다.

핵함수로는 일반적으로 2차원 공간상에서 Gaussian 핵함수 (7)과 Cubic Spline 핵함수(8)이 사용된다.

$$W(R, h) = \frac{1}{\pi h^2} e^{-R^2} \quad (7)$$

$$W(R, h) = \frac{15}{7\pi h^2} \times \begin{cases} \frac{2}{3} - R^2 + \frac{1}{2} R^3 & 0 \leq R < 1 \\ \frac{1}{6} (2-R)^3 & 1 \leq R < 2 \\ 0 & R \geq 2 \end{cases} \quad (8)$$

여기서 $R = \frac{|x-x'|}{h}$ 이다.

이 함수들을 그래프로 도식하여 비교해 보면 Fig. 1과 같이 나타내어진다. Fig. 1에서 Gaussian 핵함수는 공간영역이 $3h$ 내의 입자까지 계산되는 반면, Cubic Spline 핵함수는 공간영역

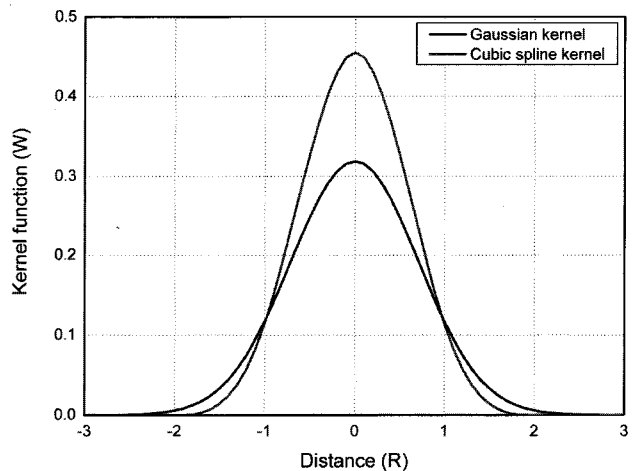


Fig. 1 Shape of Kernel Function

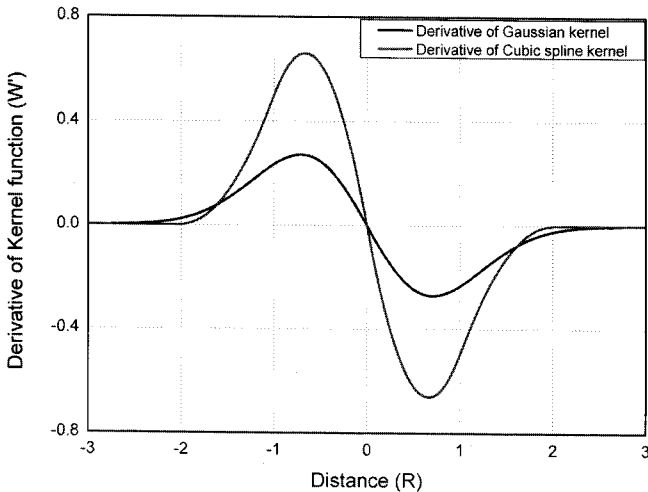


Fig. 2 Shape of derivative of Kernel Function

역이 $2h$ 내에 입자까지 계산하게 된다. 그리고 Fig. 2는 이 함수들의 일차 도함수를 그래프로 도식화하였다. 이런 핵함수들의 연속성으로 인해서 SPH법은 기존의 격자를 이용한 해석방법과는 달리 격자망이 필요 없다는 장점을 가지게 된다. 여기서는 가장 일반적으로 쓰이는 Cubic Spline 핵함수를 사용하여 해석하였다.

2.3 완화길이(Smoothing Length)

완화길이는 Fig.3 에서와 같이 핵함수의 효과가 미치는 유효 폭을 나타내며, 또한 한 입자에 대한 다른 입자의 영향거리를 나타낸다. 이 완화거리는 계산의 효율성과 정확성에 직접적으로 영향을 주게 된다. 만약 완화거리가 너무 작을 때에는 가하는 힘에 비해 지배면적에 입자가 너무 적어 낮은 정확성을 초래하고, 그와 반대로 완화거리가 너무 길 때에는 너무 많은 입자들로 인해 계산시간이 많이 걸려 효율성이 떨어지며, 또 입

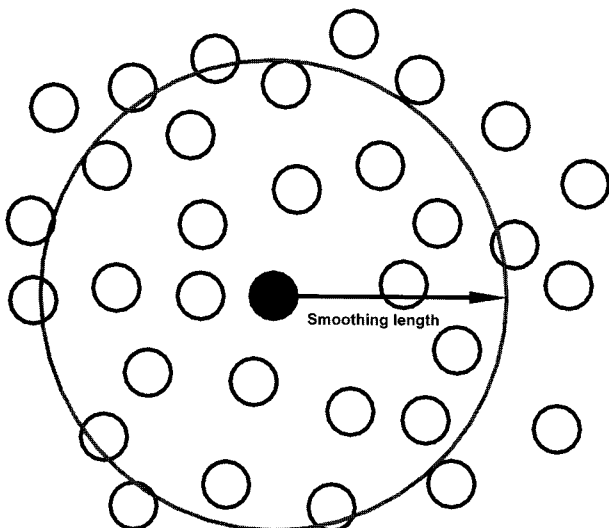


Fig. 3 Smoothing Length

자들 사이에 Smoothed Out되는 경우가 발생해 정확성이 오히려 나빠지게 된다. SPH법에서는 2차원일 경우 자신을 포함한 이웃하는 입자의 수가 20~30개 분포되는 것을 최선으로 하고 있다. 그리고 입자들이 격자 안에 놓여지게 되는 경우에는 초기입자 간격의 1.2배 정도를 최선으로 한다. 이것은 FDM에서 Grid-Cell의 폭과 같다.

2.4 지배방정식(Governing Equation)

기본방정식인 연속방정식, 운동량방정식, 에너지방정식을 사용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \frac{\partial v^\beta}{\partial x^\beta} \quad (9)$$

$$\frac{Dv^\alpha}{Dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} \quad (10)$$

$$\frac{De}{Dt} = \frac{\sigma^{\alpha\beta}}{\rho} \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\beta} \quad (11)$$

여기서 ρ 는 밀도, v 는 속도, e 는 에너지, σ 는 응력텐서, t 는 시간으로 표현되고, α, β 는 텐서표기로 공간에서 나타내는 방향을 표현한다.

또, 응력과 점성에 대해서는 Newtonian유체로서 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\sigma^{\alpha\beta} = -p\delta^{\alpha\beta} + \tau^{\alpha\beta} \quad (12)$$

$$\tau^{\alpha\beta} = \mu\epsilon^{\alpha\beta} \quad (13)$$

$$\epsilon^{\alpha\beta} = \frac{\partial v^\beta}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\beta} - \frac{2}{3}(\nabla v)\delta^{\alpha\beta}$$

여기서 p 는 압력, τ 는 전단응력, μ 는 점성계수를 나타낸다. 에너지방정식(11)을 압력과 점성에 대하여 표현하면 다음과 같다.

$$\frac{De}{Dt} = -\frac{p}{\rho} \frac{\partial v^\beta}{\partial x^\beta} + \frac{\mu}{2\rho} \epsilon^{\alpha\beta} \epsilon^{\alpha\beta} \quad (14)$$

연속방정식(9)를 항등조건(15)와 입자근사식을 이용하여 SPH법으로 정식화시키면 다음과 같다.

$$-\rho \frac{\partial v^\beta}{\partial x^\beta} = -\left(\frac{\partial(\rho v^\beta)}{\partial x^\beta} - v^\beta \frac{\partial \rho}{\partial x^\beta} \right) \quad (15)$$

$$\frac{D\rho_i}{Dt} = \sum_{j=1}^N m_j v_{ij}^\beta \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta} \quad (16)$$

$$v_{ij}^\beta = (v_i^\beta - v_j^\beta)$$

운동량방정식(10)을 항등조건(16)과 입자근사식을 이용하여 SPH법으로 정식화시키면 다음과 같다.

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left(\frac{\sigma^{\alpha\beta}}{\rho} \right) + \frac{\sigma^{\alpha\beta}}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial x^\beta} \quad (17)$$

$$\frac{Dv_i^\alpha}{Dt} = \sum_{j=1}^N m_j \left(\frac{\sigma_i^{\alpha\beta}}{\rho_i^2} + \frac{\sigma_j^{\alpha\beta}}{\rho_j^2} \right) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta} = - \sum_{j=1}^N m_j \left(\frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2} \right) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\alpha} + \quad (18)$$

$$\sum_{j=1}^N m_j \left(\frac{\mu_i \epsilon_i^{\alpha\beta}}{\rho_i^2} + \frac{\mu_j \epsilon_j^{\alpha\beta}}{\rho_j^2} \right) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta}$$

$$\epsilon_i^{\alpha\beta} = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} v_{ji}^\beta \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\alpha} + \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} v_{ji}^\alpha \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta} -$$

$$\left(\frac{2}{3} \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} v_{ji}^\beta \nabla_i W_{ij} \right) \delta^{\alpha\beta}$$

에너지방정식(14)를 두 개의 항등조건(19), (20) 입자근사식을 이용하여 SPH법으로 정식화시키면 다음과 같다.

$$-\frac{p}{\rho} \frac{\partial v^\beta}{\partial x^\beta} = \frac{p}{\rho^2} \left(-\rho \frac{\partial v^\beta}{\partial x^\beta} \right) = \frac{p}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt} \quad (19)$$

$$-\frac{p}{\rho} \frac{\partial v^\beta}{\partial x^\beta} = -\frac{\partial}{\partial x^\beta} \left(\frac{p v^\beta}{\rho} \right) + v^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left(\frac{p}{\rho} \right) \quad (20)$$

$$\frac{De_i}{Dt} = \frac{1}{2} \sum_j^N m_j \left(\frac{p_j}{\rho_j^2} + \frac{p_i}{\rho_i^2} \right) v_{ij}^\beta \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta} + \frac{\mu_i}{2\rho_i} \epsilon_i^{\alpha\beta} \epsilon_i^{\alpha\beta} \quad (21)$$

앞에 기술한 기본방정식에서 인공점성의 영향과 외부의 힘을 고려하여 SPH법으로 정식화하여 표현하면 다음과 같다.

$$\frac{D\rho_i}{Dt} = \sum_{j=1}^N m_j v_{ij}^\beta \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta} \quad (22)$$

$$\frac{Dv_i^\alpha}{Dt} = \sum_{j=1}^N m_j \left(\frac{\sigma_i^{\alpha\beta}}{\rho_i^2} + \frac{\sigma_j^{\alpha\beta}}{\rho_j^2} + \Pi_{ij} \right) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta} + F_i^\alpha \quad (23)$$

$$\frac{De_i}{Dt} = \frac{1}{2} \sum_j^N m_j \left(\frac{p_j}{\rho_j^2} + \frac{p_i}{\rho_i^2} + \Pi_{ij} \right) v_{ij}^\beta \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta} + \frac{\mu_i}{2\rho_i} \epsilon_i^{\alpha\beta} \epsilon_i^{\alpha\beta} \quad (24)$$

여기서 v_i, x_i 는 각각 입자 i 의 속도, 위치를 나타내고, F_i 는 외부 힘, ∇_i 는 입자 i 에 대한 핵함수 증감을 나타낸다. 압력 P_i 는 약한 압축성이라는 가정아래에서 상태방정식(25)를 이용하고, Π_{ij} 는 인공점성(28)를 통하여 구한다.

2.5 상태방정식(State Equation)

비압축성 유동해석에서 운동량 방정식을 통하여 압력항을 효과적으로 계산하는 일은 어려운 과제이다. SPH법에서는 비압축성 자유수면의 유동을 위해 유체의 압력은 약한 압축성이라는 가정 아래에서 다음의 상태방정식으로부터 얻을 수 있다 (Monaghan, 1994).

$$P = B \left[\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right] \quad (25)$$

여기서 ρ_0 는 초기밀도이고, γ 는 무차원 상수이지만, 대부분의 경우 7의 값을 사용한다. 그리고 B 는 초기 압력으로 밀도의 최대 변화조건에 따라 결정되는 상수이고 다음과 같은 식을 가진다.

$$B = \frac{\rho_0 c^2}{\gamma} \quad (26)$$

비압축성의 유체의 흐름을 위해 Monaghan(1994)은 밀도변동(δ)을 다음과 같이 나타낸다.

$$\delta = \frac{\Delta\rho}{\rho_0} = \frac{|\rho - \rho_0|}{\rho_0} = \frac{v_b^2}{c^2} = M^2 \quad (27)$$

여기서 v_b 는 유체의 체적 속도이고, M 은 Mach Number를 나타낸다. 음속 c 가 커질 경우, Mach Number는 작아지고 밀도변동 역시 거의 무시되므로, 유체의 비압축성을 잘 나타내기 위해 Mach Number가 0.1를 넘지 않도록 초기 압력을 설정한다.

2.6 인공점성(Artificial Equation)

인공점성은 경계면에서의 수치적 발산을 제거하기 위하여 SPH법에서 사용된다. Monaghan and Gingold(1983)는 인공점성 Π_{ij} 에 대한 다음의 식 (28)을 제시하였다.

$$\Pi_{ij} = \begin{cases} \frac{-\alpha \bar{c}_{ij} \mu_{ij} + \beta \mu_{ij}^2}{\rho_{ij}}, & v_{ij} \cdot x_{ij} < 0 \\ 0, & v_{ij} \cdot x_{ij} \geq 0 \end{cases} \quad (28)$$

$$\bar{c}_{ij} = \frac{c_i + c_j}{2}, \quad \rho_{ij} = \frac{\rho_i + \rho_j}{2}, \quad \mu_{ij} = \frac{h v_{ij} \cdot x_{ij}}{x_{ij}^2 + \eta^2}$$

여기서 x_{ij} 는 입자 i 와 입자 j 의 상대위치, v_{ij} 는 입자 i 와 입자 j 의 상대속도를 나타내며, c 는 음속을 나타낸다. α 항은 운동량 보존 방정식의 전단과 체적점성의 역할을 하며, β 항은 Von Neumann-Richtmyer Viscosity와 유사한 것으로 높은 Mach Number를 가진 충돌에서 입자들이 서로 섞이는 것을 방지하며, η 항은 분모가 영이 되지 않도록 하기 위한 작은 값으로 수치적인 발산을 방지하기 위한 값이다.

2.7 경계벽 조건(Boundary Condition)

경계벽을 설정하기 위해선 고정된 입자들로 이루어진 경계입자를 이용하여야 한다. 경계입자는 공간상에 고정되어 있으면서, 유체의 자유로운 입자들과 상호작용을 하게 된다. 이러한 경계입자들이 고체벽면의 역할을 하기 위해서 Monaghan(1994)이 제시한 방법 가상입자들을 사용하였고, 경계벽의 침투를 막기 위해서 Lennard-Jones형태의 다음 식을 사용하였다. 이 식은 입자들은 경계벽 근처에서 강한 반발력을 생성해 유체입자의 물리적인 경계벽 침투를 막아준다(Monaghan, 1994).

$$f(r) = \begin{cases} D \left[\left(\frac{r_0}{r_{ij}} \right)^{n_1} - \left(\frac{r_0}{r_{ij}} \right)^{n_2} \right] \frac{x_{ij}}{r_{ij}^2}, & \left(\frac{r_0}{r_{ij}} \right) \leq 1 \\ 0, & \left(\frac{r_0}{r_{ij}} \right) > 1 \end{cases} \quad (29)$$

여기서 n_1, n_2 는 매개변수이고, D 는 최대속도 v_{max}^2 의 값을 사용하였다. 그리고 유체입자와 고체입자의 반발력 생성거리를 결정짓는 r_0 는 초기입자 간격으로 설정하였다.

2.8 시간 적분(Time Integration)

시간적분은 Leap-Frog법을 사용하여 연속방정식과 운동량 방정식에 의하여 결정된 밀도, 속도의 항을 시간에 대해 적분하였다. 밀도에 대한 시간 적분은 시간 t 에서의 각 변수의 값에 변수의 미분값과 시간 증분의 곱을 더하여 시간 $t + \delta_t$ 에서의 값을 계산하는 형태로 식 (30)과 같이 나타낸다.

$$\rho_i^{n+1} = \rho_i^n + \frac{D\rho_i}{Dt} \delta_t^n \quad (30)$$

여기서 n 과 $n+1$ 은 각각 시간 t 와 $t + \delta_t$ 를 나타낸다.

속도의 경우에는 t 와 $t + \delta_t$ 의 중간 시간에서의 값을 구하는 형태로 식 (31)과 같이 나타낸다. 이는 중앙 적분법을 위치 변수인 x_i 에 적용하기 위한 것으로서 속도 적분식(31)로부터 입자위치는 식 (32)와 같이 결정된다.

$$v_i^{n+\frac{1}{2}} = v_i^{n+\frac{1}{2}} + \frac{Dv_i}{Dt} \frac{(\delta_t^n + \delta_t^{n-1})}{2} \quad (31)$$

$$x_i^{n+1} = x_i^n + v_i^{n+\frac{1}{2}} \delta_t^n \quad (32)$$

여기서 $n - \frac{1}{2}$ 과 $n + \frac{1}{2}$ 은 각각 시간 $t - \frac{1}{2} \delta_t$ 와 $t + \frac{1}{2} \delta_t$ 을 나타낸다.

이렇게 결정된 위치, 밀도, 속도는 다시 다음 시간에서의 각 변수들의 시간 미분을 계산하기 위하여 사용되며, 이와 같은 과정을 시간에 따라 반복하게 된다.

2.9 해석의 안정조건(Stability Condition)

해석의 정확성과 안정성을 위해서는 무조건적인 시간증분 (δ_t) 설정 보다는 해석의 안정조건 범위 내에서의 시간증분 설정이 필요하다. 여기서는 Shao and Lo(2004)의 Courant조건식과 점성확산을 고려한 조건식(33)을 이용하였다. 이 둘 조건을 만족하는 범위 내에서 시간증분을 설정하였다.

$$\delta_t \leq 0.1 \frac{l_0}{V_{max}}, \quad \delta_t \leq 0.125 \frac{l_0^2}{\nu} \quad (33)$$

여기서 l_0 는 초기입자들의 간격, V_{max} 는 최대속도, ν 는 동점성계수이다.

3. SPH법의 해석결과 및 고찰

3.1 물기둥 붕괴에 관한 수치모의

Fig. 4에 나타난 것과 같이 10m×3m인 전체영역에서 폭과 높이의 비가 1:2인 1.25m×2.5 크기의 물기둥을 입자수 20×40개로 동일한 간격으로 배열하였다. 여기서 시간증분 $\delta_t = 10^{-4}$ sec, 중력가속도 $g = 9.81$ m/sec²의 값을 각각 가진다. 경계입자는 아래바닥면 10m와 왼쪽벽면 3m에 배열하였고, 입자

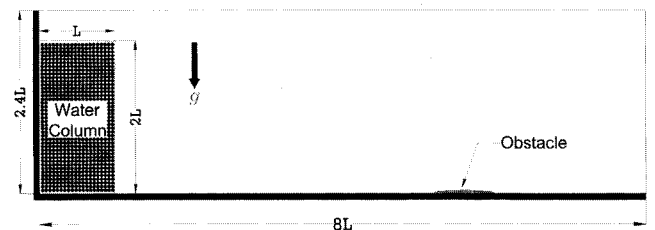


Fig. 4 Definition sketch showing a water column collapse ($L=1.25$)

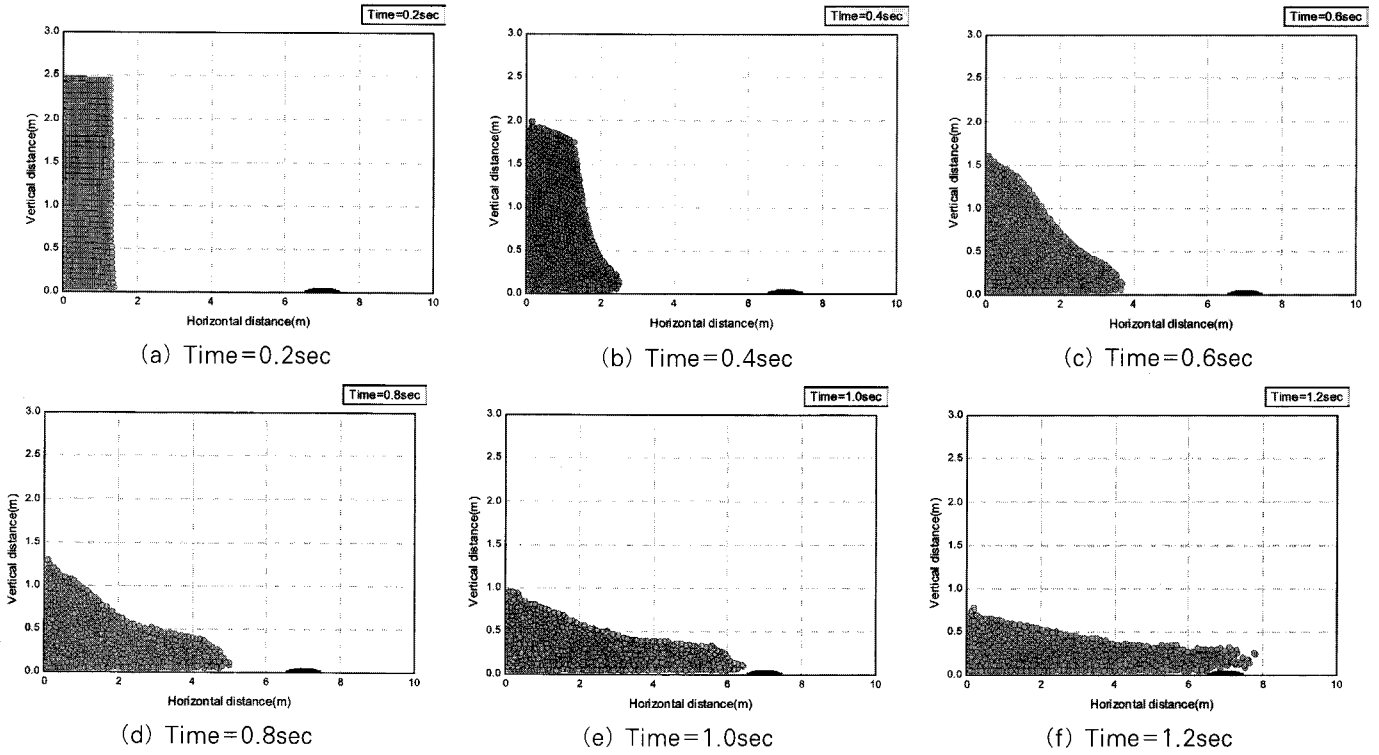


Fig. 5 Particle configurations on water column collapse

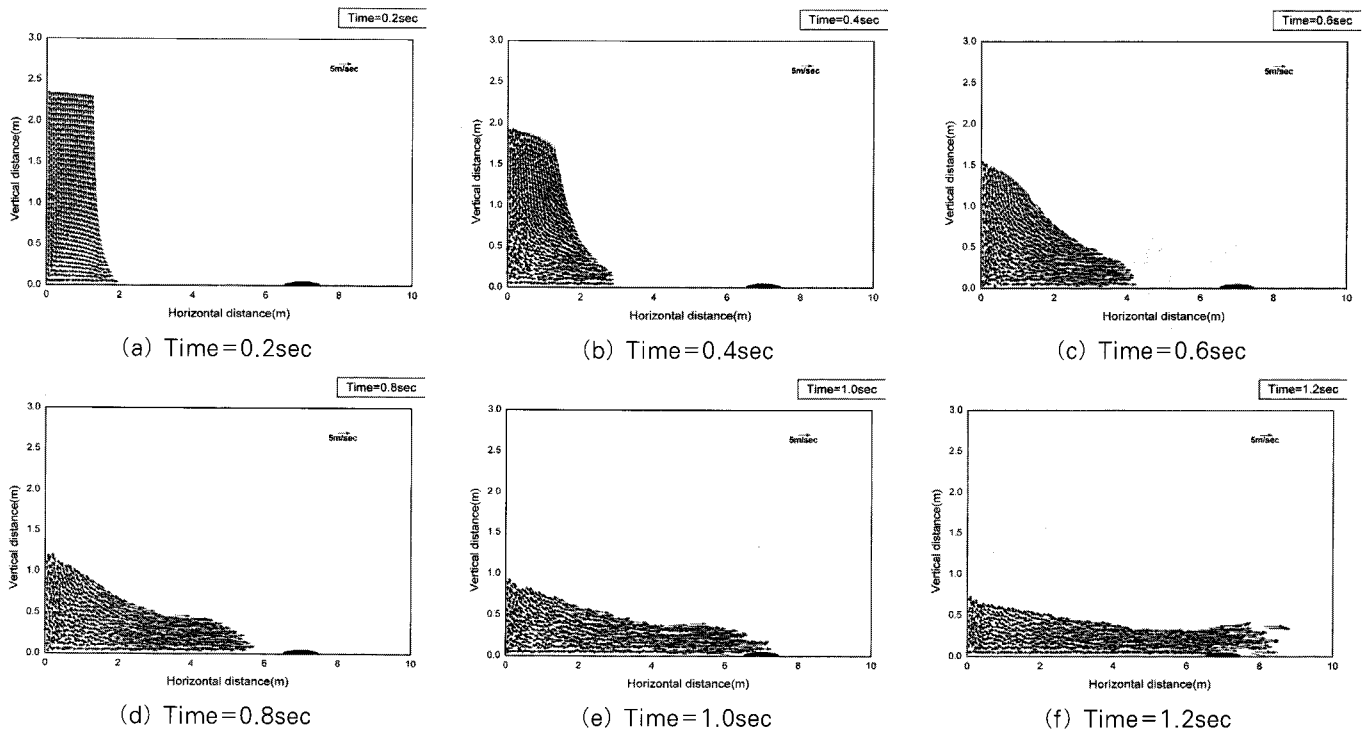


Fig. 6 Velocity vectors on water column collapse

배열은 Dalrymple and Kino(2000)가 제안한 엇갈림 배열을 사용하였다. 그리고 물기둥 붕괴가 일정시간 지난 후 장애물에 대한 유동현상을 알아보기 위해 7m지점에 폭 1m, 높이 0.1m의 타원형 장애물을 배치하였다. 이는 물기둥 붕괴에 큰 영향을 끼치지 않는 범위에서의 유동현상을 알아보기 위함이다.

해석결과의 입자분포와 속도벡터의 분포를 Fig. 5와 Fig. 6에 각각 나타내었다. Fig. 5(a)~(e)와 Fig. 6(a)~(e)는 정지해 있던 물기둥이 중력가속도에 의해 쏟아져 내린 현상을 입자와 속도벡터의 분포를 시간에 따라 보여주고 있고, Fig. 5(f)와 Fig. 6(f)은 물기둥 붕괴가 일정시간 지나서 타원형 장애물을

만나서 월류하는 현상을 입자분포와 속도벡터의 분포를 통해 보여주고 있다. Fig. 5(a)~(e)에서는 물기둥의 오른쪽 위 자유표면에서부터 붕괴하기 시작하여 점차 바닥을 따라 유동하고 있음을 관찰할 수 있으며, Fig. 5(f)에서는 타원형 장애물을 비교적 완만하게 월류하는 것을 알 수 있다. Fig. 6(a)~(e)에서는 쏟아져 내린 물이 시간이 지남에 따라 유속이 증가하면서 자유 수면이 바닥을 따라서 진행하는 것을 알 수 있으며, Fig. 6(f)에서는 완만한 타원형 장애물을 빠른 속도로 원래의 방향성을 유지하면서 진행하는 것을 볼 수 있다.

3.2 고립파 현상에 관한 수치모의

Fig. 7에 나타낸 것과 같이 Piston형식의 조파기를 이용하여 단일파봉 $\eta(x, t)$ 로 이루어진 고립파를 생성하였다. 그리고 일정한 수심(d)에서 다양한 진폭(a)의 변화에 따른 처오름 높이(R) 현상을 직립벽($\beta=90^\circ$)에 대해 수치모의 하였다. Fig. 7의 X_1 은 경사면 선단으로부터 고립파 파장(L)에 대하여 1/2 값 떨어진 곳으로 설정한다. 자유수면 비교 시 실험데이터와 동일한 시간대를 가지기 위함이다. 고립파 파장(L)에 관한 식은 Li and Raichlen(2001)이 제안한 식 (34)을 사용하였다.

$$L = \frac{2}{\sqrt{\frac{3a}{4d}}} \left[\operatorname{arccosh} \left(\sqrt{\frac{1}{0.05}} \right) \right] \quad (34)$$

고립파의 생성 조건으로는 시간에 따른 조파기의 이동변위에 관한 식 (35)를 사용하였다(Hughes, 1993).

$$X_p(t) = \frac{a}{dl} \tanh[l(ct - X_0)] \quad (35)$$

그리고 이 식을 피스톤이 전 행정($S = X_0/2$)을 할 수 있게 시간에 관한 정수($t_c = X_0/c$)를 이용 변형하면 다음과 같은 피

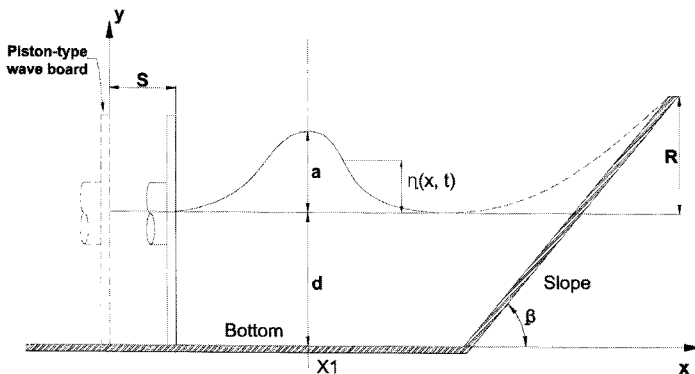


Fig. 7 Definition sketch showing a solitary wave

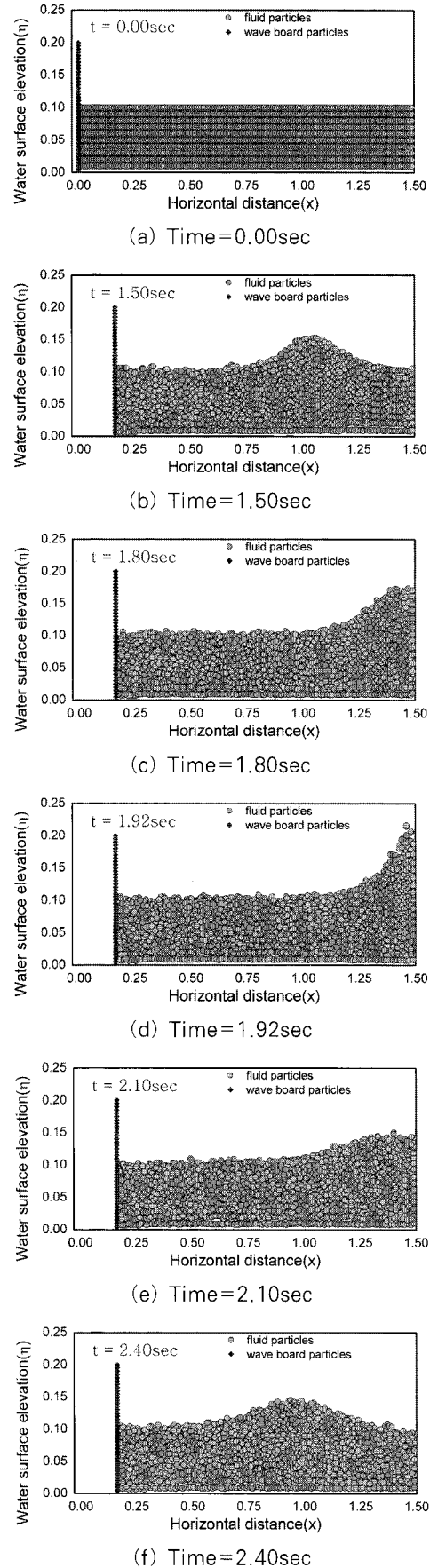


Fig. 8 Particle configurations on solitary wave propagation on a vertical wall

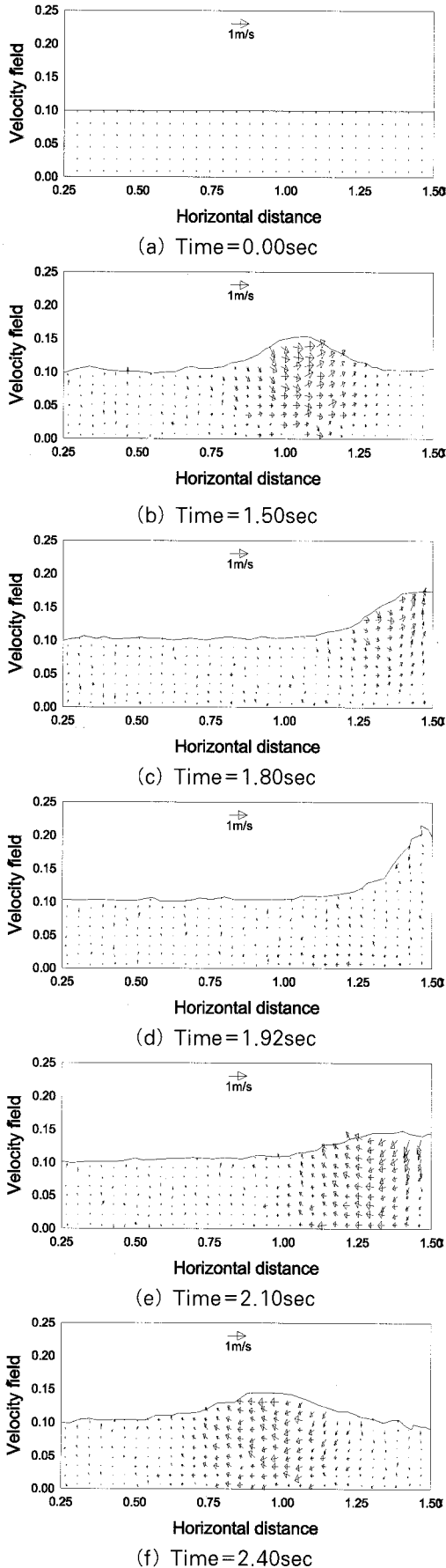


Fig. 9. Velocity distribution on solitary wave propagation on a vertical wall

스톤 전 행정에 관한 피스톤 이동변위에 관한 식 (38)과 이동 속도에 관한 식 (39)을 얻을 수 있다.

$$X_p(t) = \frac{a}{dl} \tanh [cl(t-t_c)] \quad (38)$$

$$v_p(t) = \frac{ac}{d} \operatorname{sech}^2 [cl(t-t_c)] \quad (39)$$

여기서, t_c 는 $X_p(0) \equiv -X_0$ 일 때의 시간으로 설정하였고, 고립파의 전파속도 c 는 $\sqrt{g(d+a)}$ 이고, l 은 $\sqrt{3a/4d^3}$ 이며, g 는 중력가속도를 나타낸다.

입사파고비 $a/d=0.5$ 일 때의 고립파에 관한 해석결과를 입자분포를 이용하여 시간대 별로 Fig. 8(a)~(f)에 나타내었다. Fig. 8(a)는 고립파가 생성되기 전에 정수면 상태를 보여주고, 고립파의 초오름 현상, 최대 초오름 현상, 처내림 현상은 Fig. 8(c), Fig. 8(d), Fig. 8(e)에서 보여주고 있다. Fig. 8(f)는 고립파가 처내림 후 처음 전파방향과 반대방향으로 전파하는 현상을 보여주고 있다.

입자분포를 통한 고립파의 해석결과와 같은 조건으로 속도 벡터를 이용하여 직립벽에 관한 고립파의 전파과정을 속도 분포화시켜 Fig. 9(a)~(f)에 나타내었다. Fig. 9(b)는 고립파봉이 위치한 곳에서 속도벡터가 빠르다는 것을 보여주고 있으며, Fig. 9(c)는 속도벡터가 직립벽에 수면에 대해 위로 향하는 것으로 초오름일 때를 보여주고 있으며, Fig. 9(d)는 고립파가 최대 초오름 높이에 이르렀을 때 큰 속도 변화 없는 것을 보여주고 있고, Fig. 9(e)는 속도벡터가 수면에 대해 아래로 향하는 것으로 처내림일 때의 현상을 보여주고 있다. Fig. 9(f)는 고립파의 처음의 전파 방향과 반대방향으로 역류하는 속도벡터를 보여주고 있고, 이는 처음의 전파속도에 비해 다소 감소된 현상을 보여주고 있다.

Fig. 8(a)~(f)과 Fig. 9(a)~(f)는 입자분포와 속도분포를 통해 고립파의 전파과정과 직립벽에서의 고립파로 인한 슬로싱 현상을 잘 재현하고 있다고 여겨진다.


4. 결론 및 요약

기존의 수치모의에 관한 방법으로는 격자를 이용하여 해석하는 방법이 대부분이었다. 그리고 이들 수치해석 방법은 격자 구조를 이용하기 때문에 움직이는 물질의 접촉면, 경계의 변형, 자유표면을 처리하는데 훨씬 많은 제약을 지니고 있다. SPH법은 기존의 격자를 이용하는 방법과는 달리 입자를 이용하는 무격자방법으로 물기둥 붕괴 및 고립파 전파현상에 대해 수치모

의를 수행하여 그 적용여부를 살펴보았다. 또한 물입자와 속도 벡터를 통한 가시화 및 자유수면의 변화를 통하여 물기둥 붕괴 시 유동변화현상에 대해 보다 더 세밀하게 나타낼 수 있었으며, 고립파 전파현상의 입자와 속도벡터를 통하여 파랑의 전파, 파랑의 처오름, 파랑의 처내림 등 파동현상의 가시화를 보다 쉽고 세밀하게 나타낼 수 있었다. 따라서 지금까지는 격자를 나누기가 어려워 수치해석이 꺼려졌던 분야인 미시유체역학분야에서도 SPH법이 크게 활용 될 수 있을 것으로 사료된다.

이 글은 저자들이 이미 발표한 논문(Kim and Ko, 2007; Kim and Ko, 2008)에서 일부분을 발췌했음을 밝혀 둔다.

참 고 문 헌

1. 김남형 · 고행식 (2007). SPH법을 이용한 물기둥 붕괴의 수치 모의, 대한토목학회논문집, 제27권 제3-B호, pp.313~318.
2. Dalrymple, R.A. and Kino, O. (2000). SPH Modeling of water waves, Proc. Coastal Dynm., Lund 2000.
3. Gingold, R.A. and Monaghan, J.J. (1977). Smoothed Particle Hydrodynamics: Theory and Application to Non-spherical stars, Mon. Not. R. Astr. Soc., 181, pp. 375~389.
4. Gomez-Gesteira, M. and Dalrymple, R.A. (2004). Using a 3D SPH method for wave impact on a tall structure, Journal of Waterway Port, Coastal Ocean Eng, Vol.130 (2), pp.63~69.
5. Hughes, S.A. (1993). Physical models and laboratory techniques in coastal engineering, World Scientific.
6. Kim, N.H. and Ko, H.S. (2008). Numerical Simulation on Solitary Wave Propagation and Run-up by SPH Method, KSCE Journal of Civil Engineering, Vol. 12, No. 4, pp. 221~226.
7. Li, Y. and Raichlen, F. (2001). Solitary wave runup on plane slopes, Journal of Waterway Port, Coastal and Ocean Engineering, 127, pp.33~44
8. Monaghan, J.J. (1994). Simulating free surface flows with SPH, Journal of Computational Physics, 110, pp.399~406.
9. Monaghan, J.J. and Gingold, R.A. (1983). Shock Simulation by the particle method SPH, Journal of Computational Physics, 52, pp.374~389.
10. Morris, J.P., Fox, P.J., and Zhu, Y. (1997). Modeling low Reynolds number incompressible flows using SPH, Journal of Computational Physics, 136, pp.214~226.
11. Shao, S.D. and Lo, E.Y.M. (2003). Incompressible SPH method for simulating Newtonian and Non-Newtonian flows with a free Surface, Advance Water Resources, Vol.26 (7), pp.787~800.
12. Takeda, H., Miyama, S.M. and Sekiya, M. (1994). Numerical simulation of viscous flow by smoothed particle hydrodynamics, Progress of Theoretical Physics, Vol. 92, No. 5, pp.939~960. 

[담당 : 이진학, 학회지편집위원 ; 노혁천, 편집위원장]