韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 22집 제 1호, 2008. 2. 53-63

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 22, No. 1, Feb. 2008. 53-63

관성능률을 이용한 등식 및 부등식의 증명에 대한 연구

한 인 기 (경상대학교)
손 진 오 · 이 광 록 · 백 수 현 · 송 아 롬 · 정 기 영 (경남과학고등학교)

수학 영재교육에서 여러 학문영역의 지식을 종합하며, 이를 바탕으로 창의적으로 문제를 해결하는 능력과 경험을 가지는 것은 매우 중요하다. 본 연구에서는 물리학의 역학분야에서 연구되는 관성능률 개념을 수학적 문제해결의 도구로 활용하여 몇몇 등식들, 부등식들에 대한 새로운 증명방법을 제시하며, 관성능률을 이용한 문제해결 방법의 특징들을 고찰하였다.

1. 서 론

아르키메데스는 수학자, 물리학자, 공학자로 인류 문명의 발전에 큰 기여를 하였으며, 수학의 역사에서도 가장 뛰어난 수학자의 한 사람으로 손꼽히고 있다. 특히 아르키메데스는 물리학적(역학적) 방법을 수학 분야에 활용하여, 다양한 수학문제를 해결하는 천재성을 보여주었다.

수학 영재교육에서 아르키메데스가 행했던 것과 같은 여러 학문영역의 지식을 종합하며, 이를 바탕으로 창의적으로 문제를 해결하는 능력과 경험을 가지는 것은 매우 중요하다(한국교육개발원, 2000; 방승진 · 이우식 · 김헌남, 2003). 특히 물리학과 수학 분야의 연구는 밀접한 관련한 관련을 가지며, 물리학에서 수학적 방법을 이용하여 문제를 해결하거나 또는 수학분야에서 물리학적 방법을 이용한 탐구를 수행하기도 한다.

물리학 관련 주제들의 수학교수학적 활용에 대한 국내 연구들을 살펴보면, 첫째 김선희 · 김기연(2005), 홍갑주(2005), 박달원(2006), 한인기 · 홍동화(2006), 한인기 외 5인(2007) 등은 지렛대 원리 및 무게중심 개념의 수학적 활용에 관련된 몇몇 방법들을 제시하였다. 둘째로, 한인기 · 이지은(2004)은 물리학의 키르히호프 법칙을 이용한 직사각형의 분할 문제에 대한 한 가지 해결 방법을 소개하였다. 이들 연구를 통해, 수학과 물리학의 지식들을 통합 가능성을 모색하고 수학적 탐구방법의 확장을 위한 방향을 제시했다는 것은 수학교수학적으로 의미롭다고 할 수 있을 것이다.

본 연구에서는 물리학의 역학분야에서 연구되는 관성능률 개념을 수학적 문제해결의 도구로 활용하여 몇몇 등식들, 부등식들에 대한 새로운 증명방법을 제시하며, 관성능률을 이용한 문제해결 방법의 특징들을 고찰할 것이다. 이를 통해, 다양한 수학적 탐구방법의 계발을 위한 기초자료를 제공하

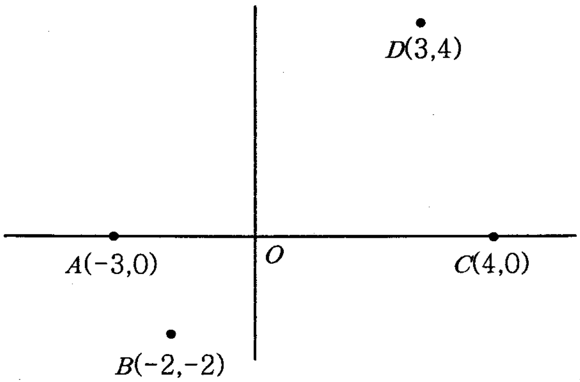
* ZDM 분류 : D53
* MSC2000 분류 : 97D50
* 주제어 : 관성능률, 무게중심, 등식, 부등식, Lagrange 정리

며, 수학과 물리학 분야의 긴밀한 관련성을 바탕으로 창의적인 수학탐구를 수행하는 예들을 제시할 수 있을 것으로 기대된다.

2. 관성능률의 기본 성질

관성능률(moment of inertia)은 물리학의 역학분야에서 주로 다루는 개념으로, 회전관성, 즉 회전운동에서 직선 운동의 질량에 해당하는 물리량이다. 흔히 말하는 질량은 직선 운동을 유지하려는 관성의 정도를 나타내는 물리량이므로, 회전 관성은 자신의 회전 운동을 유지하려는 정도를 나타내는 양이 된다.

질량점 (X_1, m_1), (X_2, m_2), $\cdots$, (X_n, m_n)이 주어졌다고 하자. Prasolov(2001)에 의하면, 임의의 점 M에 대한 이들 질량점의 관성능률 I_M은 값 $m_1MX_1^2+m_2MX_2^2+\cdots+m_nMX_n^2$에 의해 정의된다. 예를 들어, <그림 1>에서 원점 O에 대한 질량점 $(A, 2)$, $(B, 5)$, $(C, 10)$, $(D, 1)$의 관성능률을 구해보자. OA^2은 9, OB^2은 8, OC^2은 16, OD^2은 25이므로, I_O는 $18+40+160+25=243$이 된다.



<그림 1>

임의의 점에 대한 관성능률을 무게중심에 대한 관성능률을 이용하여 구하는 방법인 Lagrange 정리를 살펴보자.

정리 1 (Lagrange 정리). n개의 질량점 (X_1, m_1), (X_2, m_2), $\cdots$, (X_n, m_n), 이들 질량점의 무게중심 G, 임의의 점 X가 주어졌다. $m=m_1+m_2+\cdots+m_n$이라 하면, 등식 $I_X=I_G+mXG^2$가 성립한다.

증명. 질량점 (X_1, m_1), (X_2, m_2), $\cdots$, (X_n, m_n)의 점 X에 대한 관성능률을 생각하면, 등식

$I_X = m_1 XX_1^2 + \cdots + m_n XX_n^2$을 얻을 수 있다. 이때 $XX_1^2 = |\overrightarrow{XX_1}|^2 = \overrightarrow{XX_1}^2$임을 감안하면 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} I_X &= m_1 XX_1^2 + \cdots + m_n XX_n^2 = m_1 |\overrightarrow{XX_1}|^2 + \cdots + m_n |\overrightarrow{XX_n}|^2 \\ &= m_1 (\overrightarrow{XG} + \overrightarrow{GX_1})^2 + \cdots + m_n (\overrightarrow{XG} + \overrightarrow{GX_n})^2 \\ &= m_1 (\overrightarrow{XG}^2 + 2\overrightarrow{XG} \cdot \overrightarrow{GX_1} + \overrightarrow{GX_1^2}) + \cdots + m_n (\overrightarrow{XG}^2 + 2\overrightarrow{XG} \cdot \overrightarrow{GX_n} + \overrightarrow{GX_n^2}) \\ &= (m_1 + \cdots + m_n)\overrightarrow{XG}^2 + (m_1 \overrightarrow{GX_1} + \cdots + m_n \overrightarrow{GX_n^2}) + 2\overrightarrow{XG}(m_1 \overrightarrow{GX_1} + \ldots + m_n \overrightarrow{GX_n}) \end{aligned}$$

이제 (X_1, m_1), (X_2, m_2), $\cdots$, (X_n, m_n)의 무게중심 G에 대해, 무게중심의 정의로부터 등식 $m_1 \overrightarrow{GX_1} + \ldots + m_n \overrightarrow{GX_n} = \vec{0}$이 성립하므로, $I_X = m\overrightarrow{XG}^2 + I_G = mXG^2 + I_G$가 성립함을 알 수 있다. □

정리 1의 등식 $I_X = mXG^2 + I_G$에서 I_G는 $m_1 GX_1^2 + m_2 GX_2^2 + \cdots + m_n GX_n^2$이므로, 각 질량점의 무게 m_i를 양수값으로 잡으면 I_G, mXG^2은 양의 값을 가지게 된다. 이로부터 부등식 $I_X \geq mXG^2$, $I_X \geq I_G$를 얻을 수 있다. 부등식 $I_X \geq mXG^2$, $I_X \geq I_G$를 이용하면, 몇몇 부등식들에 대한 흥미로운 증명을 얻을 수 있다.

정리 2. 질량점 (X_1, m_1), (X_2, m_2), $\cdots$, (X_n, m_n), 이들 점의 무게중심 G를 생각하자. $m = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$, 질량점 X_i와 X_j사이의 거리를 a_{ij}라 하면, 점 G에 대한 이들 질량점의 관성 능률은 $\frac{1}{m}\sum_{i<j} m_i m_j a_{ij}^2$이다.

증명. 질량점 (X_1, m_1), (X_2, m_2), $\cdots$, (X_n, m_n), 이들의 무게중심 G, 임의의 점 X에 대해, $I_X = I_G + mGX^2$임을 증명하였다. X대신에 X_1을 대입하자. 그러면 다음 등식이 성립한다.

$$I_{X_1} = m_2 X_1 X_2^2 + \cdots + m_n X_1 X_n^2 = I_G + mGX_1^2$$

이제, 등식의 양변에 m_1을 곱하자. 그러면, 등식

$$m_1 m_2 X_1 X_2^2 + \cdots + m_1 m_n X_1 X_n^2 = m_1 I_G + m_1 m GX_1^2$$

이 얻어진다. 같은 방법으로 X대신에 X_2, $\cdots$, X_n을 대입하여, 다음 등식들을 얻을 수 있다.

$$m_2 m_1 X_1 X_2^2 + \cdots + m_2 m_n X_2 X_n^2 = m_2 I_G + m_2 m GX_2^2$$

....

$$m_n m_1 X_1 X_2^2 + \cdots + m_n m_{n-1} X_{n-1} X_n^2 = m_n I_G + m_n m GX_n^2$$

이제, 얻어진 등식들을 변끼리 서로 더하자. 그러면 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} 2(&m_1 m_2 X_1 X_2^2 + m_1 m_3 X_1 X_3^2 + \cdots + m_1 m_n X_1 X_n^2 + m_2 m_3 X_2 X_3^2 + \cdots + m_2 m_n X_2 X_n^2 \\ &+ m_3 m_4 X_3 X_4^2 + \cdots + m_3 m_n X_3 X_n^2 + \cdots + m_{n-1} m_n X_{n-1} X_n^2) = mI_G + mI_G \end{aligned}$$

가 얻어진다. 즉 $2\sum_{i<j} m_i m_j a_{ij}^2 = 2mI_G$가 된다. 이로부터 구하는 등식 $I_G = \frac{1}{m}\sum_{i<j} m_i m_j a_{ij}^2$가 증명된다. □

정리 2의 등식 $I_G = \frac{1}{m}\sum_{i<j} m_i m_j a_{ij}^2$에서는 질량점들의 무게중심에 대한 관성능률을 질량점들의 거리를 이용하여 구할 수 있다. 예를 들어 삼각형의 무게중심에 대한 관성능률은 변들의 거리를 이용하여 나타낼 수 있다. 삼각형의 세 꼭지점에 놓인 질량점 $(A, 1)$, $(B, 1)$, $(C, 1)$을 생각하면, 삼각형의 무게중심 G에 대한 이들 점의 관성능률은 $\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)$가 된다. 이를 이용하면 삼각형에 관련된 몇몇 흥미로운 등식들을 증명할 수 있다.

3. 관성능률을 이용한 등식 및 부등식 탐구

(1) 관성능률을 이용한 등식들의 증명

관성능률을 이용하여 삼각형, 사면체에서 점들 사이의 거리에 관한 몇몇 등식들을 쉽게 증명할 수 있다. 특히 정리 2에서 질량점들의 무게중심에 대한 관성능률을 질량점들 사이의 거리를 이용하여 나타낼 수 있으므로, 삼각형의 변들, 사면체의 모서리들이 포함된 다음 등식들을 관성능률을 이용하여 증명하자.

문제 1. 한 변의 길이가 $2a$인 정삼각형 ABC에서 내접원 위의 점 P를 잡았다. 이때 등식 $PA^2+PB^2+PC^2=5a^2$을 증명하여라.

증명. 정삼각형 ABC의 각 꼭지점에 무게 1을 놓아, 질량점 $(A, 1)$, $(B, 1)$, $(C, 1)$을 생각하자. Lagrange 정리에 의해 $I_P = I_G + 3GP^2$가 성립한다. I_P를 구하면 $PA^2+PB^2+PC^2$이 되며, 정리 2에 의해 무게중심 G에 대한 관성능률 I_G는 $\frac{1}{3}(4a^2+4a^2+4a^2)$이다. 그리고 정삼각형에서 무게중심 G로부터 내접원 위의 점 P까지의 거리는 높이의 $\frac{1}{3}$과 같으므로, $GP = \frac{\sqrt{3}}{3}a$가 된다.

이제 이들을 등식 $I_P = I_G + 3GP^2$에 대입하면, $PA^2+PB^2+PC^2 = \frac{1}{3}(4a^2+4a^2+4a^2)+a^2$이고, 이로부터 등식 $PA^2+PB^2+PC^2=5a^2$이 증명된다. □

문제 1에서는 점 P를 정삼각형의 내접원 위에서 잡았는데, 외접원 위의 점 Q에 대해서도 유사한 등식을 증명할 수 있다. 다음 문제 2를 생각하자.

문제 2. 한 변의 길이가 $2a$인 정삼각형 ABC에서 외접원 위의 점 Q를 잡았다. 이때 등식 $QA^2+QB^2+QC^2=8a^2$을 증명하여라.

증명. 정삼각형 ABC의 각 꼭지점에 무게 1을 놓아, 질량점 $(A,1)$, $(B,1)$, $(C,1)$을 생각하자. Lagrange 정리에 의해 $I_Q=I_G+3GQ^2$가 성립한다. I_Q를 구하면 $QA^2+QB^2+QC^2$이 되며, 정리 2에 의해 무게중심 G에 대한 관성능률 I_G는 $\frac{1}{3}(4a^2+4a^2+4a^2)$이다. 그리고 정삼각형에서 무게중심 G로부터 외접원 위의 점 Q까지의 거리는 높이의 $\frac{2}{3}$과 같으므로, $GQ=\frac{2\sqrt{3}}{3}a$가 된다.

이제 이들을 등식 $I_Q=I_G+3GQ^2$에 대입하면, $QA^2+QB^2+QC^2=\frac{1}{3}(4a^2+4a^2+4a^2)+4a^2$이고, 이로부터 등식 $QA^2+QB^2+QC^2=8a^2$이 증명된다. □

문제 3. 삼각형 ABC의 외심 O, 무게중심 G, 외접원의 반지름 R, 변의 길이 a, b, c에 대해, 등식 $a^2+b^2+c^2=9R^2-9GO^2$을 증명하여라.

증명. 삼각형 ABC의 각 꼭지점에 무게 1을 놓아, 질량점 $(A,1)$, $(B,1)$, $(C,1)$을 생각하자. 정리 2에 의해 $I_G=\frac{a^2+b^2+c^2}{3}$가 성립한다. 한편 관성능률의 정의에 의해 $I_O=OA_2+OB_2+OC_2$인데 O가 삼각형의 외심이므로 $OA_2+OB_2+OC_2=3R^2$이 된다.

이제 Lagrange 정리 $I_O=I_G+3GO^2$를 생각하면, 등식 $3R^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{3}+3GO^2$를 얻을 수 있다. 이로부터 $a^2+b^2+c^2=9R^2-9GO^2$가 증명된다. □

삼각형 ABC에서 수심 H에 대해 $3GO$와 OH가 같다는 것을 감안하면, 문제 3의 등식으로부터 삼각형의 외접원의 반지름, 외심, 수심에 관련된 등식 $a^2+b^2+c^2=9R^2-OH^2$가 얻어진다. 한편 문제 3을 사면체로 유추하면, 다음과 같은 흥미로운 등식을 얻을 수 있다.

문제 4. 사면체 $DABC$의 외심 O, 무게중심 G, 외접구의 반지름 R, 모서리의 길이 a, b, c, d, e, f에 대해, 등식 $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2=24R^2-36GO^2$을 증명하여라.

증명. 사면체 $DABC$의 각 꼭지점에 무게 1을 놓아, 질량점 $(A,1)$, $(B,1)$, $(C,1)$, $(D,1)$을 생각하자. 정리 2에 의해 $I_G=\frac{a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2}{6}$가 성립한다. 한편 관성능률의 정의에 의해 $I_O=OA_2+OB_2+OC_2+OD^2$인데 O가 사면체의 외심이므로 $OA_2+OB_2+OC_2+OD^2=4R^2$이 된다. 이제 Lagrange 정리 $I_O=I_G+6GO^2$를 생각하면, 등식 $4R^2=\frac{a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2}{6}+6GO^2$를 얻을 수 있다. 이로부터 $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2=24R^2-36GO^2$가 증명된다. □

(2) 관성능률을 이용한 부등식들의 증명

Lagrange 정리 $I_X = mXG^2 + I_G$로부터 얻어지는 부등식 $I_X \geq mXG^2$, $I_X \geq I_G$를 이용하면, 몇몇 부등식들을 흥미롭게 증명하고 일반화시킬 수 있다. 우선 $I_X \geq mXG^2$을 이용한 부등식들의 증명을 살펴보자.

문제 5. 부등식 $3(1+a^2+a^4) \geq (1+a+a^2)^2$을 증명하여라.

증명. 임의의 점 X로부터 1, a, a^2만큼 떨어져 있으며 일직선상에 놓여있는 세 질량점 $(X_1, 1)$, $(X_2, 1)$, $(X_3, 1)$을 생각하자. 그러면 이들 점의 X에 대한 관성능률은 $1+a^2+a^4$이며, X에서 이들 질량점의 무게중심 G까지의 거리는 $\frac{1}{3}(1+a+a^2)$이다.

이제 Lagrange 정리 $I_X = mXG^2 + I_G$로부터 얻어지는 부등식 $I_X \geq mXG^2$에 얻어진 값들을 대입하면, 부등식 $1+a^2+a^4 \geq 3 \cdot \left(\frac{1+a+a^2}{3}\right)^2$이 얻어진다. 얻어진 부등식을 정리하면 증명하려는 부등식 $3(1+a^2+a^4) \geq (1+a+a^2)^2$이 유도된다. □

문제 5의 부등식은 중국사천대학(1994, p.207)의 참고서적에 제시된 것으로, 이 책에서는 인수분해를 이용한 대수식의 변형을 이용하여 다음과 같이 증명하였다.

$$3(1+a^2+a^4)-(1+a+a^2)^2 = 2a^4-2a^3-2a+2 = 2[a^3(a-1)-(a-1)]$$
$$= 2(a-1)^2(a^2+a+1) = 2(a-1)^2\left[\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right].$$

이때 $(a-1)^2 \geq 0$, $\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4} > 0$이므로, $2(a-1)^2\left[\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right] \geq 0$가 된다. 그러므로 $3(1+a^2+a^4) \geq (1+a+a^2)^2$이 성립한다. □

이와 같은 증명은 전형적인 방법으로, 부등식 $A \geq B$을 증명하기 위해 대수식들의 변형과정을 거쳐 부등식 $A-B \geq 0$를 증명하였다. 이러한 증명방법의 한 가지 문제는 부등식의 증명과정에 사용된 대수식의 변형과정이 그 문제에 국한되는 경우가 많으며, 증명하려는 부등식의 일반화에 많은 어려움이 발생할 수 있다는 점이다.

본 연구에서 제시한 관성능률을 이용한 부등식의 증명에서는 사용된 질량점의 개수를 늘리면, 부등식의 일반화된 형태를 쉽게 얻을 수 있는 경우가 많다. 예를 들어, 문제 5를 다음과 같이 일반화시킬 수 있다.

문제 6. 부등식 $(n+1)(1+a^2+a^4+a^6+\ldots+a^{2n}) \geq (1+a+a^2+a^3+\ldots+a^n)^2$을 증명하여라.

증명. 임의의 점 X로부터 $1, a, a^2, a^3, \cdots, a^n$만큼 떨어져 있으며 일직선상에 놓여있는 질량이 1인

$n+1$개의 질량점 X_1, X_2, $\cdots$, X_n, X_{n+1}을 생각하자. 그러면 이들 점의 X에 대한 관성능률은 $I_X = 1 + a^2 + a^4 + a^6 + \ldots + a^{2n}$가 된다. 한편 X에서 이들 질량점의 무게중심 G까지의 거리 XG는 $\dfrac{1+a+a^2+a^3+\ldots+a^n}{n+1}$이다. 질량점들의 무게의 합이 $n+1$이므로, 부등식 $I_X \geq mXG^2$로부터 다음 부등식을 얻을 수 있다.

$$1+a^2+a^4+a^6+\ldots+a^{2n} \geq (n+1)\left(\frac{1+a+a^2+a^3+\ldots+a^n}{n+1}\right)^2$$

이제 부등식의 우변에 있는 $n+1$을 좌변으로 이항하면, 구하는 부등식이 증명된다. □

문제 5의 부등식은 문제 6의 부등식에서 n이 2인 경우에 해당한다. 문제 6와 유사한 방법으로 다음과 같은 다양한 부등식들을 증명할 수 있다.

문제 7. 양수 $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$에 대해 다음 부등식을 증명하여라.

$$\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2+\ldots+a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n}$$

증명. 임의의 점 X로부터 거리가 $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$만큼 떨어져 있으며 일직선상에 놓여있는 질량이 1인 n개의 질량점 X_1, X_2, $\cdots$, X_n을 생각하자. 그러면 이들 점의 X에 대한 관성능률은 $I_X = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2$이 된다. 이제 이들 질량점의 무게중심 G를 생각하면, X에서 G까지의 거리 XG는 $\dfrac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n}$이 된다.

이제 부등식 $I_X \geq mXG^2$을 생각하자. 이제 I_X, XG를 대입하면, 다음 부등식을 얻을 수 있다.

$$a_1^2+a_2^2+a_3^2+\ldots+a_n^2 \geq n \cdot \left(\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n}\right)^2$$

이제 우변의 분모에 있는 n을 좌변으로 넘기고 양변에 제곱근을 취하면, 구하는 부등식이 증명된다. □

문제 7의 증명에서는 임의의 점 X로부터 거리가 $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$만큼 떨어져 있는 n개의 질량점 $(X_1, 1)$, $(X_2, 1)$, $\cdots$, $(X_n, 1)$을 생각하였다. 만약 n개의 질량점 $\left(X_1, \dfrac{1}{a_1}\right)$, $\left(X_2, \dfrac{1}{a_2}\right)$, $\cdots$, $\left(X_n, \dfrac{1}{a_n}\right)$을 생각하면, 다음 부등식을 증명할 수 있다.

문제 8. 양수 $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$에 대해, 다음 부등식을 증명하여라.

$$(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right) \geq n^2$$

증명. 임의의 점 X로부터 거리가 $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$만큼 떨어져 있으며 일직선상에 놓여있는 질량이 $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \cdots, \frac{1}{a_n}$인 n개의 질량점 $X_1, X_2, \cdots, X_n$을 생각하자. 그러면 이들 점의 X에 대한 관성능률은 $I_X = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$이 되며, X에서 이들 질량점의 무게중심 G까지의 거리 XG는

$$\frac{a_1\frac{1}{a_1} + a_2\frac{1}{a_2} + a_3\frac{1}{a_3} + ... + a_n\frac{1}{a_n}}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + ... + \frac{1}{a_n}} = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + ... + \frac{1}{a_n}}$$ 이다.

이제 질량점들의 무게의 합 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + ... + \frac{1}{a_n}$와 부등식 $I_X \ge mXG^2$을 생각하면, 다음 부등식을 얻을 수 있다.

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n \ge \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + ... + \frac{1}{a_n}\right) \cdot \left(\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + ... + \frac{1}{a_n}}\right)^2$$

부등식 우변을 정리하여 분모를 좌변으로 이항하면, 구하는 부등식이 유도된다. □

이제 임의의 점 X로부터 거리가 $\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \frac{b_3}{a_3}, \cdots, \frac{b_n}{a_n}$만큼 떨어져 있으며 일직선상에 놓여있는 질량이 $a_1^2, a_2^2, a_3^2, \cdots, a_n^2$인 n개의 질량점 $X_1, X_2, \cdots, X_n$을 생각하여, 다음 부등식을 증명하자.

문제 9. 양수 $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$에 대해, 다음 부등식을 증명하여라.

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + ... + a_nb_n \le \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + ... + a_n^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + ... + b_n^2}$$

증명. 임의의 점 X로부터 거리가 $\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \frac{b_3}{a_3}, \cdots, \frac{b_n}{a_n}$만큼 떨어져 있으며 일직선상에 놓여있는 질량이 $a_1^2, a_2^2, a_3^2, \cdots, a_n^2$인 n개의 질량점 $X_1, X_2, \cdots, X_n$을 생각하자. 그러면 이들 점의 X에 대한 관성능률은 $I_X = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + ... + b_n^2$이다. 그리고 점 X에서 이들 질량점의 무게중심 G까지의 거리 XG는 $\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + ... + a_nb_n}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_n^2}$이다. 질량점들의 무게의 합은 $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + ... + a_n^2$이므로, 부등식 $I_X \ge mXG^2$로부터 다음 부등식을 얻을 수 있다.

$$b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + ... + b_n^2 \ge \left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + ... + a_n^2\right)\left(\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + ... + a_nb_n}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_n^2}\right)^2$$

이제, 부등식의 우변에 있는 분모를 좌변으로 이항하여, 양변에 제곱근을 취하면 구하는 부등식 $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + ... + a_nb_n \le \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + ... + a_n^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + ... + b_n^2}$을 얻게 된다. □

이제 Lagrange 정리 $I_X = I_G + mXG^2$에서 얻어지는 부등식 $I_X \ge I_G$을 이용하여, 문제 10의 부등식

을 증명하자.

문제 10. a, b가 양의 실수일 때, 다음 부등식을 증명하여라.

$$\left(\frac{a^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{b^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \geq \sqrt{a}+\sqrt{b}$$

증명. $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 만큼 떨어져 있는 두 질량점 $\left(A, \frac{1}{\sqrt{a}}\right)$, $\left(B, \frac{1}{\sqrt{b}}\right)$를 생각하자. 이들 점의 무게중심 G은 지렛대의 원리에 의해 $AG: GB=\sqrt{a}:\sqrt{b}$인 선분 AB에 속하는 점이다. 즉 $AG=\sqrt{a}$, $GB=\sqrt{b}$이다. 한편 선분 AB에서 $AX: XB=\sqrt{b}:\sqrt{a}$인 점을 잡아, $AX=\sqrt{b}$, $XB=\sqrt{a}$가 되도록 하자. 그러면 $I_X=\frac{b}{\sqrt{a}}+\frac{a}{\sqrt{b}}$, $I_G=\sqrt{a}+\sqrt{b}$가 된다.

Lagrange 정리 $I_X=I_G+mXG^2$에서 부등식 $I_X \geq I_G$를 생각하자. 그러면 부등식 $\frac{b}{\sqrt{a}}+\frac{a}{\sqrt{b}} \geq \sqrt{a}+\sqrt{b}$이 얻어진다. $a=\sqrt{a^2}$, $b=\sqrt{b^2}$이므로, 구하는 부등식 $\left(\frac{a^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{b^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \geq \sqrt{a}+\sqrt{b}$이 증명된다. □

4. 결 론

본 연구에서는 물리학의 역학분야에서 연구되는 관성능률 개념을 수학적 문제해결의 도구로 활용하여 몇몇 등식들, 부등식들에 대한 새로운 증명방법을 제시하며, 관성능률을 이용한 문제해결 방법의 특징들을 고찰하였다.

관성능률은 회전운동에서 직선 운동의 질량에 해당하는 물리량으로, 임의의 점 M에 대한 질량점 (X_1, m_1), (X_2, m_2), $\cdots$, (X_n, m_n)의 관성능률 I_M은 값 $m_1MX_1^2+m_2MX_2^2+\cdots+m_nMX_n^2$에 의해 정의된다. 본 연구에서는 관성능률을 이용하여 등식들, 부등식들을 증명하기 위해, Lagrange 정리 $I_X=I_G+mXG^2$와 질량점들의 무게중심에 대한 관성능률 공식 $\frac{1}{m}\sum_{i<j}m_im_ja_{ij}^2$을 이용하였다.

Lagrange 정리를 이용하면 임의의 점에 대한 질량점들의 관성능률, 질량점들의 무게중심에 대한 관성능률, 임의의 점과 질량점 사이의 거리를 포함하는 등식을 얻을 수 있다. 특히 질량점들의 무게중심에 대한 관성능률을 질량점들의 거리를 이용하여 나타낼 수 있으므로, 삼각형의 변들, 사면체의 모서리들을 포함하는 등식들을 관성능률을 이용하여 쉽게 증명할 수 있다. 본 연구에서는 정삼각형의 내접원, 외접원에 속한 점 P, Q에 대해 등식 $PA^2+PB^2+PC^2=5a^2$, $QA^2+QB^2+QC^2=8a^2$을 관성능률을 이용하여 새롭게 증명하였다. 그리고 삼각형에서 등식 $a^2+b^2+c^2=9R^2-9GO^2$을 관성능률을 이용하여 증명하였고, 이를 사면체로 유추하여 $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2=24R^2-36GO^2$도 증

명하였으며, 증명방법의 특징에 대한 몇몇 논의를 제시하였다.

한편, 각 질량점의 무게를 양수값으로 하면 Lagrange 정리 $I_X=I_G+mGX^2$에서 I_G, mXG^2은 양의 값이 되며 부등식 $I_X\ge mXG^2$, $I_X\ge I_G$를 얻을 수 있다. 본 연구에서는 부등식 $I_X\ge mXG^2$을 이용하여 $3(1+a^2+a^4)\ge(1+a+a^2)^2$을 증명하고, 이것의 일반화된 부등식(문제 6)을 추측하고 증명하였다. 그리고 부등식 $I_X\ge mXG^2$을 이용하여 양수 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$에 대한 몇몇 부등식들을 증명하였고, 부등식 $I_X\ge I_G$을 이용하여 $\left(\frac{a^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{b^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\ge\sqrt{a}+\sqrt{b}$을 새롭게 증명하였다.

본 연구를 통해 얻어진 결과들은 다양한 수학적 탐구방법의 계발을 위한 기초자료를 제공하며, 수학과 물리학 분야의 긴밀한 관련성을 바탕으로 창의적인 수학탐구를 수행하는 예들을 제시할 수 있을 것으로 기대된다.

참 고 문 헌

김선희·김기연 (2005). 수학 영재의 심화학습을 위한 다각형의 무게중심 연구, 수학교육학연구 **15(3)**, pp.335-352.

박달원 (2006). 영재학생들을 위한 삼각형의 무게중심 지도 방법, 한국학교수학회논문집 **9(1)**, pp.93-104.

방승진·이우식·김헌남 (2003). 간학문적 접근을 통한 영재교육프로그램 개발에 관한 연구, 수학교육논문집 **17**, pp.141-158.

중국사천대학 (1994). 올림피아드 수학의 지름길 고급(상), 서울: 세화.

한국교육개발원 (2000). 수학과 영재교육과정 시안, 서울: 선우인쇄사.

한인기 외 5인 (2007). 사면체에서 지렛대의 원리를 이용한 선분들 및 평면들의 교차에 관한 성질 연구, 수학교육논문집 **21(4)**, pp.327-340.

한인기·꼴랴긴 (2006). 문제해결의 이론과 실제, 서울: 승산.

한인기·홍동화 (2006). 지렛대 원리를 활용한 선분의 비에 관련된 도형 문제의 해결에 대한 연구, 수학교육논문집 **20(4)**, pp.621-634.

한인기·이지은 (2004). 직사각형의 분할과 키르히호프의 법칙에 관한 연구, 수학교육논문집 **18(2)**, pp.265-276.

홍갑주 (2005). 도형의 무게중심과 관련된 오개념 및 논리적 문제, 학교수학 **7(4)**, pp.391-402.

Prasolov V.V. (2001). *Zadachi po Planimetrii*, Moscow: MTsNMO.

A Study on Proof of Equalities and Inequalities Using Moment of Inertia

Han, Inki
Dept of Math. Edu., RINS, Gyeongsang National University, 660-701, Korea
inkiski@gsnu.ac.kr

Son, Jin O; Lee, Kwang Rok; Baek, Soo Hean;
Song, A Rom & Chung, Ki Young
Gyeongnam Science High School, 660-851, Korea
jin5son@hanmail.net; dlrhkdfhr0@hanmaill.net; bshean1129@hanmail.net
aromsong@hanmail.net; zungkiyoung@hanmail.net

In this paper we study a new proof method of equalities and inequalities using moment of inertia. We analyze proof method using moment of inertia, and describe how to prove equalities and inequalities using moment of inertia.

* ZDM Classification : D53
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D50
* Key Words : moment of inertia, the center of gravity, equalities, inequalities, Lagrange's theorem