韓國數學教育學會誌 시리즈 E
<數學教育 論文集>
제 22집 제 1호, 2008. 2. 65-77

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 22, No. 1, Feb. 2008. 65-77

# 종이접기에서 Haga 정리의 증명과 일반화에 대한 연구

이 성 현 · 정 상 혁 (울산과학고등학교)
한 인 기 (경상대학교)

Haga 정리는 정사각형 색종이의 접기를 통해 얻어지는 선분들의 비를 수학화시킨 정리로, 종이접기에 관련된 수학적 내용의 탐구에서 폭넓게 활용된다. 본 연구에서는 과학고등학교의 수학 영재교육을 통해 얻어진 산출물인 Haga 정리의 새로운 증명 방법, Haga 제 2정리의 일반화로 발전된 정리를 제시하였다.

## 1. 서 론

2007년에 개정 고시된 수학과 교육과정(교육인적자원부, 2007, p.45)에서는 학생들의 수학적 사고와 추론능력을 발전시키기 위해 '...학생 스스로 수학적 사실을 추측하게 하고, 이를 정당화하거나 증명해 보게 할 수 있다. 수학적 사실이나 명제를 분석하고, 수학적 관계를 조직하고 종합하며 ...'와 같이 기술하면서, 수학적 사고와 추론 능력 계발에서 수학적 명제의 분석 및 증명 활동을 강조하고 있다. 특히 Kolmogorov(1959)는 수학 영재교육에서 논리적 추론 능력의 중요성을 강조하면서, 이것이 수학 영재성의 주요한 구성 요소가 된다고 주장하였다. 즉 명제에 대한 논증활동은 수학영재들의 수학적 활동의 중요한 부분이 된다는 것을 알 수 있다.

한편 한인기 · 에르든예프(2005, p.68)는 창의성을 계발시킬 수 있는 수학교육에 대해 언급하면서 '학생들이 미지의 세계에서 길을 찾고 스스로 지식의 영역을 확장하는 방법을 터득하도록 하는데 교육의 초점을 맞추어야 한다. ...학생들이 내용을 이해하고 깊이 생각하며, 물음에 대한 다양한 풀이 방법을 찾도록 가르치는 것이 중요하다'고 주장하면서, 수학 지식의 영역을 확장시키는 수학적 발명의 경험을 강조하였다. 그리고 창의적 수학활동의 한 예로 주어진 명제에 대한 다양한 증명 방법의 발명을 제시하였다.

최근 들어, 수학분야에서 수학 영재학생들의 창의적 수학활동에 관련된 교수학적 연구들이 활발하게 이루어지고 있으며(이강섭 · 신현용, 2001; 황선욱, 2000; 방승진, 2000; 한인기, 2006; 유윤재, 2006 등), 중등학교 영재들의 수학적 발명의 결과들도 소개되고 있다(한인기 외 4인, 2005; 유익승 · 김정수 · 김연호 · 김형균, 2007; 방승진 외 6인, 2007; 김수환 외 5인, 2007; 한인기 외 5인, 2007). 이를 통해, 수학영재들의 창의적 수학활동 및 창의적 산출물(수학적 발명)에 대해 진지한 논의가 이루어진다는 점에서

* ZDM 분류 : G93
* MSC2000 분류 : 97D50
* 주제어 : Haga 정리, 종이접기, Haga 정리의 일반화

이들 연구의 교육적인 의의를 찾을 수 있을 것이다.

본 연구에서는 Haga(芳賀和夫) 정리의 다양한 탐구에 대해 고찰할 것이다. Haga 정리는 Haga 제 1정리, Haga 제 2정리, Haga 제 3정리가 있으며, 정사각형 색종이의 접기를 통해 얻어지는 선분들의 비를 수학화시킨 정리로, 종이접기에 관련된 수학적 내용의 탐구에서 폭넓게 활용되는 정리이다. 본 연구에서 Haga 정리에 대해 조사하면서 밝혀진 하나의 사실은 Haga 정리의 다양한 활용에 비해, Haga 정리 자체에 대한 다양한 증명이 알려지지 않았다는 것이다.

본 연구는 수학 영재교육에서 창의적인 수학적 발견의 한 사례를 소개하는 연구로, 과학고등학교의 수학 영재교육을 통해 얻어진 산출물인 Haga 정리의 새로운 증명 방법, Haga 제 2정리의 일반화로 발전된 정리를 제시할 것이다. 본 연구의 결과들은 중등학교의 수학 영재교육에 활용될 수 있는 좋은 자료가 될 것이며, 특히 과학고등학교 수준의 창의적 산출물에 대한 폭넓은 논의를 위한 기초자료를 제공할 수 있을 것으로 기대된다.

## 2. Haga 정리의 새로운 증명

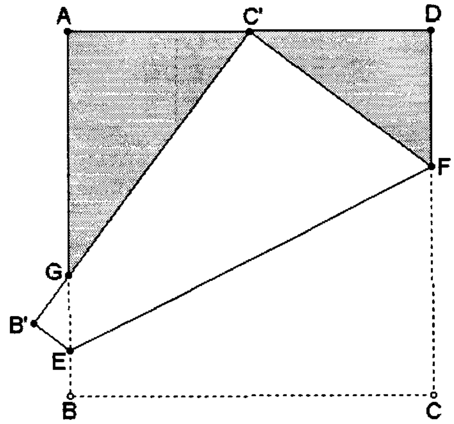
Haga 정리는 Haga 제 1정리, Haga 제 2정리, Haga 제 3정리가 있는데, 본 연구에서는 이들 정리에 대해 과학고등학교의 학생들과 수학 탐구활동 과정에서 얻어진 새로운 증명 방법을 제시할 것이다.

Haga 정리에 대한 새로운 증명방법이 얻어진 과정을 살펴보자. 과학고등학교 학생들과의 종이접기에 관련된 수학 탐구활동을 진행하였다. 이를 위해, Haga 정리의 기존 증명을 소개하였고, 이를 종이접기 활동과 연결하여 탐구활동을 수행하였다(탐구활동이 Haga 정리에 대한 새로운 증명방법을 고안하는데 초점이 맞추어지지는 않았음). 그런데 본 논문의 저자들 중의 한 명인 과학고등학교 학생이 Haga 정리에 대한 새로운 증명을 찾아서 제시하였다. 이제 얻어진 Haga 정리의 증명 방법들을 살펴보도록 하자.

### (1) Haga 제 1정리

Haga 제 1정리는 정사각형 색종이 ABCD에서 꼭지점 C를 변 AD의 중점에 포개었을 때(<그림 1>) 얻어지는 색종이 모양의 수학적 성질 탐구에 관련된다. Haga 제 1정리에 대한 일반적인 증명을 살펴보자(김은희, 2003; 김향숙 외 4인, 2005; 芳賀和夫, 1996, 1999).

**Haga 제 1정리**. 정사각형 색종이 ABCD에서 꼭지점 C를 변 AD의 중점에 포개어 C′이라 하자(<그림 1>). 그러면 직각삼각형 C′DF, GAC′, GB′E는 각각 변들의 비가 3:4:5이며, AG:GB=2:1이다.




<그림 1>

**증명**. 우선 직각삼각형 C′DF, GAC′, GB′E가 닮음임을 증명하자. 직각삼각형 GAC′와 GB′E에서 각 B′GE와 AGC′는 맞꼭지각으로 같으므로, 직각삼각형 GAC′와 GB′E는 닮음이 된다. 한편 직선 B′E와 C′F는 평행이고 AB와 CD가 평행이므로, 각 B′EG와 C′FD는 동위각으로 같게 된다. 즉 직각삼각형 C′DF와 GB′E는 닮음이 된다. 결국 세 직각삼각형 C′DF, GAC′, GB′E는 닮음이 된다.

이제 직각삼각형 C′DF의 변들의 비가 3:4:5임을 보이면, 직각삼각형 C′DF와 닮음인 삼각형 GAC′, GB′E의 변들의 비도 3:4:5가 된다는 것이 증명된다. 이를 위해 정사각형 ABCD의 한 변의 길이를 1이라 하고, CF를 $x$라 하자. 그러면 삼각형 C′DF에서 DF는 $1-x$이고, C′D는 $\frac{1}{2}$, C′F는 $x$가 된다. 이제 피타고라스 정리를 사용하면, $x^2=(1-x)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2$을 얻게 된다. 이 방정식을 풀면, $x=\frac{5}{8}$이다. 따라서 DF는 $\frac{3}{8}$, C′D는 $\frac{1}{2}$, C′F는 $\frac{5}{8}$이고, DF:C′D:C′F = 3:4:5가 된다. 결국 직각삼각형 C′DF, GAC′, GB′E의 변들의 비가 3:4:5임을 알 수 있다.

한편 삼각형 C′AG에서 DF:C′D = C′A:AG = 3:4이고, C′A는 $\frac{1}{2}$이므로, AG는 $\frac{2}{3}$가 된다. 결국 점 G는 변 AB를 2:1로 내분한다. □

Haga 제 1정리는 직각삼각형의 변들의 비, 선분들의 비에 대한 규칙성을 나타내므로, 정리의 증명을 위해 '직각삼각형의 변들, 선분들의 길이를 구해야 한다'고 탐색의 방향을 설정하는 것은 자연스러운 접근이라 할 수 있다. 살펴본 증명에서는 세 직각삼각형 C′DF, GAC′, GB′E가 닮음임을 보인 후에, 삼각형 C′DF에 피타고라스 정리를 사용하여 변들의 길이의 비가 3:4:5임을 유도하고, 나머지 직각삼각형들 GAC′, GB′E의 변들의 길이의 비도 3:4:5임을 보였다.

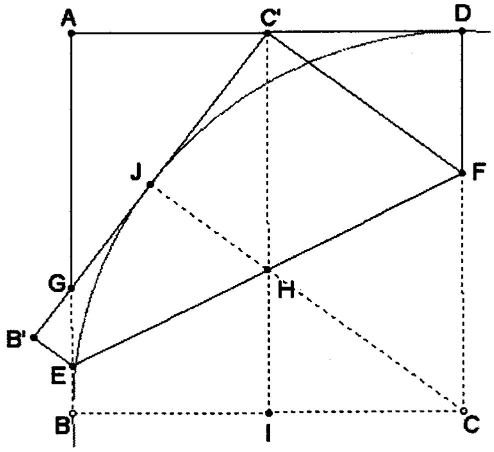
본 연구에서는 원의 접선의 성질, 피타고라스 정리를 이용하여 직각삼각형 GAC′의 변들의 길이를 구하여 Haga 제 1정리에 대한 다른 증명방법을 발명하였다. 이를 자세히 살펴보자.

**보조정리** 1. 한 변이 1인 정사각형 색종이 ABCD에서 꼭지점 C를 변 AD의 중점에 포개어 C′이라 하고, 변 BC의 중점 I를 잡아 C′I를 접어 EF와의 교점을 H라 하자. 그리고 꼭지점 C를 중심으로 반지름이 1인 원을 그리자(그림 2). 그러면, 직선 CH와 C′G의 교점 J는 원과 직선 C′G의 접점이다.

**증명**. 점 J가 직선 C′G와 원의 접점임을 보이기 위해, CJ⊥C′G이고 CJ의 길이가 1이라는 것을 보이자. 우선 삼각형 HCF와 HC′F가 합동이 된다는 것을 보이자. 종이접기에 의해 CF가 C′F와 포개지므로 선분 CF와 C′F는 같고, 각 C′FH과 CFH가 같으며, 선분 FH는 공통이다. 그러므로 SAS 합동조건에 의해 삼각형 HCF와 HC′F는 합동이다. 이로부터 선분 CH와 C′H가 같다는 것을 알 수 있다.

한편 삼각형 HJC′과 HIC에서 각 JHC′과 IHC는 맞꼭지각으로 같고, 각 HC′J와 HCI도 같게 된다 (각 JC′H와 HC′F의 합이 90°이고 각 HCI와 HCF의 합도 90°인데 각 HC′F와 HCF의 크기가 같으므로). 그리고 선분 C′H와 HC가 같으므로, 이들 삼각형은 ASA 합동조건에 의해 합동이다. 이로부터 각 HJC′과 HIC는 같으며 직각이 된다.

한편 선분 CJ는 선분 CH와 HJ의 합이다. 그런데 CH=C′H, HJ=HI이므로, 선분 CJ의 길이는 선분 C′I 의 길이와 같은 1이 된다. □




<그림 2>

<그림 2>에서 직선 C′G 뿐만 아니라, 직선 C′D, GB도 점 C를 중심으로 반지름이 1인 원의 접선임을 알 수 있다. 그리고 접선의 성질로부터 <그림 2>에서 C′D=C′J, GJ=GB임을 알 수 있다.

**Haga 제 1정리의 다른 증명**. 직각삼각형 AGC′을 생각하자(그림 2). 우선 AC′의 길이가 $\frac{1}{2}$임을 생각하자. 이제 GB의 길이를 $x$라 하면 AG의 길이는 $1-x$이다. 한편 <그림 2>에서 선분 C′G는 C′J와 GJ의 합과 같다. 그런데 선분 보조정리 1에 의해, C′D=C′J, GJ=GB이므로, C′G는 C′D와 GB의 합과 같다. 즉 C′G는 $\frac{1}{2}+x$가 된다.

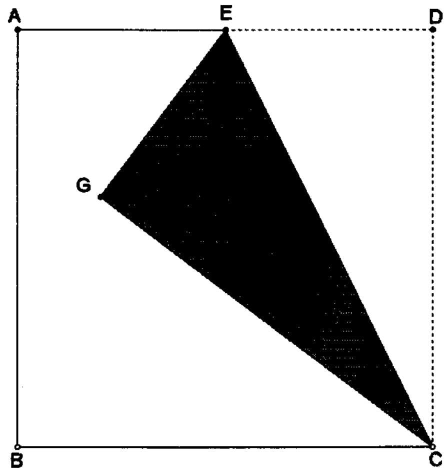
이제 직각삼각형 AGC′에 피타고라스 정리를 이용하면, $\left(\frac{1}{2}+x\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+(1-x)^2$를 얻게 되며, 이로부터 $x$, 즉 GB의 길이는 $\frac{1}{3}$이 됨을 알 수 있다. 그러면 AG의 길이는 $\frac{2}{3}$, C′G의 길이는 $\frac{5}{6}$가 된다. 이로부터 AC′:AG:GC′은 3:4:5가 증명된다. 한편 GB의 길이가 $\frac{1}{3}$, AG의 길이가 $\frac{2}{3}$이므로 AG:GB는 2:1임을 알 수 있다. □

기술한 첫 번째 일반적인 증명방법에서는 종이접기에서 접혀져 겹쳐지는 선분들인 FC와 FC′이 같다는 것을 이용하여 직각삼각형 C′FD의 변들의 길이를 하나의 미지수로 나타내어 피타고라스 정리로 등식을 유도하였다. 그러나 본 연구에서 제시한 다른 증명 방법에서는 보조선으로 원을 작도하여, 원에 대한 접선의 성질을 이용하여 직각삼각형 AGC′의 변들을 하나의 미지수로 나타내어 피타고라스 정리로 등식을 유도하였다.

### (2) Haga 제 2정리

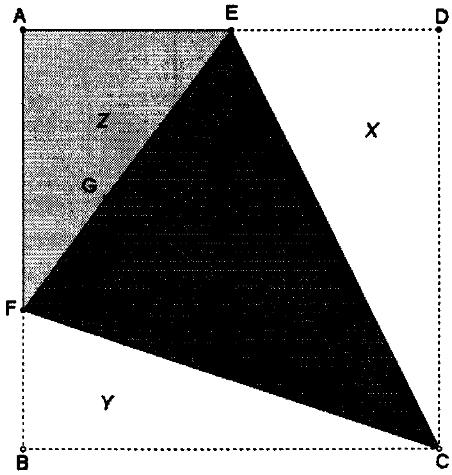
Haga 제 2정리는 정사각형 색종이 ABCD를 변 AD의 중점 E와 꼭지점 C를 지나도록 접었을 때 (<그림 3>) 얻어지는 색종이 모양의 수학적 성질 탐구에 관련된다. Haga 제 2정리의 일반적인 증명 방법을 살펴보자(김은희, 2003; 김향숙 외 4인, 2005; 芳賀和夫, 1996, 1999).

**Haga 제 2정리**. 정사각형 색종이 ABCD에서 변 AD의 중점 E와 꼭지점 C를 지나는 직선을 따라 색종이를 접어, 꼭지점 D가 G로 옮겨졌다(<그림 3>). 직선 EG와 변 AB의 교점을 F라 하면, AF:FB=2:1이다.




<그림 3>

**증명**. 우선 점 E, G, F가 한 직선에 속함을 보이자. 삼각형 EDC를 접어 EGC의 위치에 포개어 놓으므로 각 EGC는 90°이고 선분 CG와 CD는 같다. 이제 B가 G와 포개지도록 색종이를 접자. 그러면 선분 BC와 CG가 같고 각 FBC가 90°이므로 <그림 4>와 같은 종이접기를 얻을 수 있다. 특히 각 EGC와 FGC가 직각이므로, 점 E, G, F는 한 직선에 속하고, 삼각형 AEF가 얻어진다.




<그림 4>

<그림 4>의 삼각형들의 넓이를 생각하자. 삼각형 EDC와 EGC는 넓이가 같고, 삼각형 FGC와 FBC는 넓이가 같다. 가령 삼각형 EDC, EGC의 넓이를 $X$, 삼각형 FGC, FBC의 넓이를 $Y$, 삼각형

EAF의 넓이를 $Z$라 하자. 그러면 이들의 넓이의 합 $2X+2Y+Z$는 정사각형의 넓이와 같게 된다. 가령 정사각형의 한 변의 길이가 1이라 하면, $2X+2Y+Z=1$을 얻게 된다.

이제 선분 FB의 길이를 $x$라 하자. 그러면 선분 AF는 $1-x$이므로, $X=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{4}$, $Y=\frac{1}{2}\times x\times1=\frac{x}{2}$, $Z=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times(1-x)=\frac{1-x}{4}$가 얻어진다. 이들 식을 등식 $2X+2Y+Z=1$에 대입하면, $\frac{1}{2}+x+\frac{1-x}{4}=1$를 얻게 된다. 이로부터 $x=\frac{1}{3}$이고, AF:FB = 2:1이 성립한다. □

기술한 증명방법은 삼각형의 넓이를 이용한 방법으로, 문제해결 과정에서 넓이 개념을 중심으로 탐색을 수행한다면 쉽게 증명방법을 찾을 수 있을 것이다. 그런데 우리는 Haga 제 1정리의 증명에서 선분의 길이를 이용하여 유사한 선분의 비를 증명하였으므로, '선분의 길이를 이용하여 비를 구할 수는 없을까?'라는 물음을 가질 수 있다. 본 연구에서는 이 물음을 바탕으로 Haga 제 2정리의 다른 증명을 찾았다.

**Haga 제 2정리의 다른 증명**. <그림 4>에서 점 E, G, F가 한 직선에 속함을 보였다고 하자. 이제 FB를 $x$, AF를 $1-x$라 놓자. 삼각형 EDC와 EGC, 삼각형 FBC와 FGC의 합동으로부터 선분 EG와 ED, 선분 FB와 FG가 같다는 것을 알 수 있다. 결국 직각삼각형 AEF에서 AE는 $\frac{1}{2}$, AF는 $1-x$, FE는 $\frac{1}{2}+x$가 된다. 이제 피타고라스 정리를 이용하면 $\left(\frac{1}{2}+x\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+(1-x)^2$가 얻어진다. 이로부터 $x=\frac{1}{3}$이고, AF:FB = 2:1이 성립한다. □

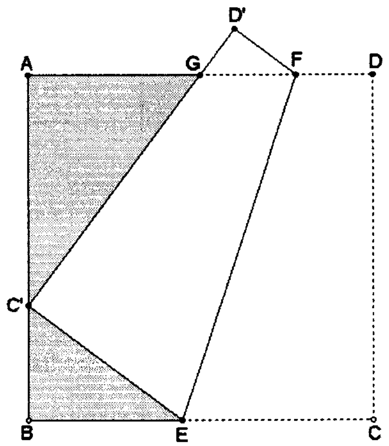
본 연구에서 제시한 Haga 제 2정리에 대한 증명방법은 Haga 제 1정리에 대한 증명방법과 유사하고 증명과정도 평이하지만, 흥미롭게도 조사했던 선행연구들(김은희, 2003; 김향숙 외 4인, 2005; 芳賀和夫, 1996, 1999)에는 이러한 방법이 제시되어 있지 않았다.

### (3) Haga 제 3정리

Haga 제 3정리는 정사각형 색종이 ABCD에서 꼭지점 C를 변 AB를 따라 움직이며 접다가 변 CD의 자취가 변 AD의 중점을 지날 때(<그림 5>) 얻어지는 색종이 모양의 수학적 성질 탐구에 관련된다. Haga 제 3정리의 일반적인 증명방법을 살펴보자(김은희, 2003; 김향숙 외 4인, 2005; 芳賀和夫, 1996, 1999).

**Haga 제 3정리**. 정사각형 색종이 ABCD의 꼭지점 C가 변 AB를 따라 움직이며 그 자취를 C′, 꼭

지점 D의 자취를 D′라 하자(<그림 5>). 직선 C′D′가 변 AD의 중점 G를 지나면, AC′:C′B=2:1이다.




<그림 5>

**증명**. 정사각형 ABCD의 한 변의 길이를 1이라 하고, 직선 C′D′가 변 AD의 중점을 지날 때의 BC′을 $x$라 하자. 그러면 AC′은 $1-x$, AG는 $\frac{1}{2}$이다. 우선 직각삼각형 C′BE와 GAC′이 닮음임을 보이자. 각 GC′E가 90°이므로 각 GC′A와 각 BC′E의 합은 90°이다. 한편 각 BC′E와 각 BEC′의 합이 90°이므로 각 GC′A와 BEC′는 서로 같다. 이로부터 직각삼각형 C′BE와 GAC′는 닮음이다. 그러므로 BE를 $y$라 놓으면, 비례식 $\frac{1}{2}:1-x=x:y$를 얻게 되고, 결국 BE는 $2x(1-x)$이다. 그러면 EC′은 $1-2x(1-x)$가 된다.

이제 삼각형 C′BE에 피타고라스 정리를 사용하면, $(1-2x(1-x))^2=x^2+(2x(1-x))^2$이고 양변을 정리하면 $3x^2-4x+1=0$, $(3x-1)(x-1)=0$이 얻어진다. 이때 $x=1$은 근이 될 수 없으므로, $x=\frac{1}{3}$이다. 이로부터 AC′:C′B=2:1임이 증명된다. □

기술한 증명에서는 BC′을 $x$라 놓고 직각삼각형 C′BE와 GAC′의 닮음, 피타고라스 정리를 이용하여 선분 AC′:C′B의 비를 구했지만, <그림 5>에서 D′F를 $x$라 놓고 삼각형 GAC′과 GD′F의 닮음, 피타고라스 정리를 이용하여도 Haga 제 3정리에 대한 다른 증명을 얻을 수 있다.

**Haga 제 3정리의 다른 증명**. 선분 D′F를 $x$라 하면, GF는 $\frac{1}{2}-x$가 된다. 삼각형 GD′F가 직각

삼각형이므로, 피타고라스 정리를 이용하면 $\left(\frac{1}{2}-x\right)^2=\mathrm{GD}'^2+x^2$이다. 이로부터 $\mathrm{GD}'^2=-x+\frac{1}{4}$, 즉 $\mathrm{GD}'=\sqrt{-x+\frac{1}{4}}$ 이며, $\mathrm{GC}'=1-\sqrt{\frac{1}{4}-x}$ 이 된다.

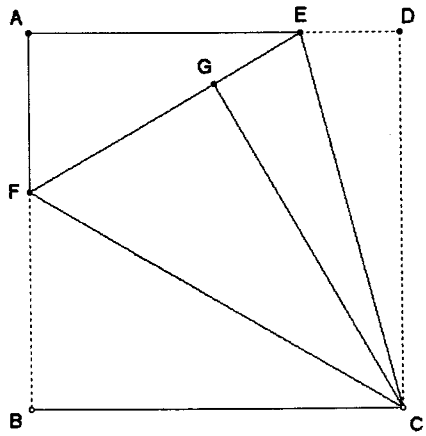
이제 닮은 직각삼각형 GAC′, GD′F를 생각하자. 이들 삼각형의 변들의 비로부터, $x$를 포함하는 등식 $\frac{1}{2}:\sqrt{\frac{1}{4}-x}=1-\sqrt{\frac{1}{4}-x}:\frac{1}{2}-x$를 얻을 수 있다. 비례식을 정리하면, $9x^2-2x=0$이고 $x=\frac{2}{9}$이다. 따라서 GC′은 $\frac{5}{6}$, AC′은 $\frac{2}{3}$이므로, AC′:C′B=2:1임이 증명된다. □

기존의 증명에서 이용한 직각삼각형 C′BE와 GAC′에서는 이들의 닮음을 그림으로부터 쉽게 찾기 어렵지만, 본 연구에서 제시한 증명에 이용한 직각삼각형 GAC′과 GD′F는 <그림 5>로부터 쉽게 찾을 수 있다는 장점을 가지고 있다.

## 3. Haga 제 2정리의 일반화와 증명

김향숙 외 4인(2005)의 연구에 Haga 제 1정리에 대한 일반화가 제시되어 있지만, Haga 제 2정리의 일반화에 대해서는 그 가능성만 언급했을 뿐 구체적인 내용 제시는 없다. 본 연구에서 제시하는 Haga 제 2정리의 일반화 및 그 증명은 Haga 정리의 새로운 증명방법과 마찬가지로, 과학고등학교에서 학생들과 수학 탐구활동을 진행하는 과정에서 얻어졌다.

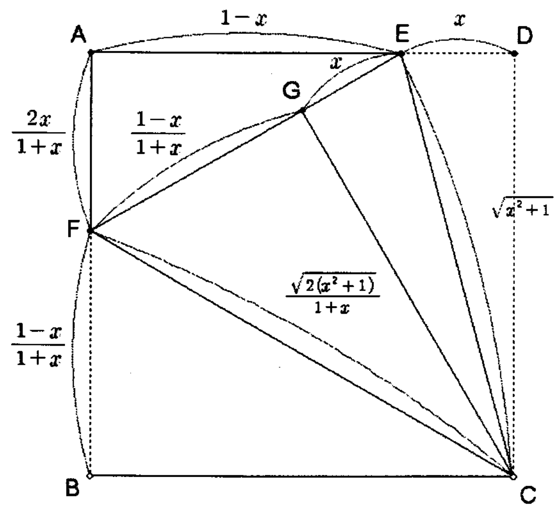
Haga 제 2정리에서는 정사각형 ABCD의 중점 E와 꼭지점 C를 지나는 종이접기를 했지만, 일반화에서는 점 E는 변 AD에 속하는 임의의 점이며(<그림 6>), 이때 선분 AF와 FB의 비를 조사하게 된다.




<그림 6>

**Haga 제 2정리의 일반화**. 정사각형 색종이 ABCD에서 변 AD의 임의의 점 E와 꼭지점 C를 지나는 직선을 따라 색종이를 접어, 꼭지점 D가 G로 옮겨졌다(<그림 6>). 직선 EG와 변 AB의 교점을 F라 하면, AF:FB=2ED:AE이다.

**증명**. 한 변이 1인 정사각형 ABCD에서 ED를 $x$라 하면, AE는 $1-x$가 된다. 이제 FB를 $y$라 놓으면 AF는 $1-y$가 된다. Haga 제 2정리의 증명과 같은 방법으로, 점 E, G, F는 한 직선 위의 점이 되고 직각삼각형 AFE가 만들어진다. 이제 삼각형 AFE에 피타고라스 정리를 사용하면, $(x+y)^2=(1-x)^2+(1-y)^2$이 된다. 이를 정리하면 $xy+x+y-1=0$, $y=\frac{1-x}{1+x}$이 얻어진다(<그림 7>). 그러면 AF는 $1-y$이므로 $\frac{2x}{1+x}$가 되며, AF:FB$=\frac{2x}{1+x}:\frac{1-x}{1+x}$, 즉 AF:FB$=2x:1-x$이므로 AF:FB=2ED:AE가 증명된다. □




<그림 7>

Haga 제 2정리의 일반화에서 $x$에 $\frac{1}{2}$를 대입하면 점 E가 선분 AD의 중점이 되어 Haga 제 2정리가 유도된다.

## 4. 결 론

Haga 정리는 정사각형 색종이의 접기를 통해 얻어지는 선분들의 비를 수학화시킨 정리로, 종이접기에 관련된 수학적 내용의 탐구에서 폭넓게 활용된다. 본 연구에서는 과학고등학교의 수학 영재교육을

통해 얻어진 산출물인 Haga 정리의 새로운 증명 방법, Haga 제 2정리의 일반화로 발전된 정리를 제시하였다.

Haga 제 1정리는 정사각형 색종이 ABCD에서 꼭지점 C를 변 AD의 중점에 포개었을 때 얻어지는 색종이 모양의 수학적 성질 탐구에 관련된다. 이 정리의 일반적인 증명에서는 직각삼각형의 닮음, 피타고라스 정리를 사용하는데, 본 연구에서는 원의 접선의 성질, 피타고라스 정리를 이용하여 선분의 길이를 구하는 새로운 증명방법을 제시하였다.

Haga 제 2정리는 정사각형 색종이 ABCD를 변 AD의 중점 E와 꼭지점 C를 지나도록 접었을 때 얻어지는 색종이 모양의 수학적 성질 탐구에 관련된다. 이 정리의 일반적인 증명에서는 삼각형의 넓이를 이용하지만, 본 연구에서는 Haga 제 1정리의 증명에서와 같이 선분의 길이를 이용한 증명을 제시하였다.

Haga 제 3정리는 정사각형 색종이 ABCD에서 꼭지점 C를 변 AB를 따라 움직이며 접다가 변 CD의 자취가 변 AD의 중점을 지날 때 얻어지는 색종이 모양의 수학적 성질 탐구에 관련된다. Haga 제 3정리의 일반적인 증명에서는 직각삼각형의 닮음, 피타고라스 정리를 이용하는데, 본 연구에서는 기존의 증명에서 고찰하지 않은 다른 삼각형들의 닮음을 이용하여 Haga 제 3정리에 대한 다른 증명을 얻었다.

한편, Haga 제 1정리와 제 3정리에 대한 일반화가 문헌에 제시되어 있지만, Haga 제 2정리의 일반화에 대해서는 그 가능성만 언급되어 있을 뿐 구체적인 탐구는 제시되어 있지 않다. 본 연구에서는 Haga 제 2정리의 일반화를 시도하여, 일반화된 명제와 증명을 찾았다. Haga 제 2정리를 일반화시키면, 명제 '정사각형 색종이 ABCD에서 변 AD의 임의의 점 E와 꼭지점 C를 지나는 직선을 따라 색종이를 접어, 꼭지점 D가 G로 옮겨졌다. 직선 EG와 변 AB의 교점을 F라 하면, AF:FB=2ED:AE이다'를 얻을 수 있으며, 본 연구에서는 이 명제를 피타고라스 정리를 이용하여 증명하였다.

본 연구를 통해 얻어진 자료들은 중등학교의 수학 영재교육에 활용될 수 있는 좋은 자료가 될 것이며, 특히 Haga 정리나 그 일반화에 대한 증명과정에 사용된 수학적 지식의 수준을 고려하면, 중학교 수준의 학생들에게도 적용해 볼 수 있는 흥미있는 탐구 소재가 될 것이다. 그리고 본 연구의 결과는 과학고등학교 수준의 창의적 산출물에 대한 폭넓은 논의를 위한 기초자료를 제공할 수 있을 것으로 기대된다.

## 참 고 문 헌

교육인적자원부 (2007). 수학과 교육과정, 서울: 대한교과서주식회사.

김수환 외 5인 (2007). 가장 아름다운 수학공식에 관한 연구, 제 12회 국제수학영재교육세미나 프로시딩, pp.61-80.

김은희 (2003). 종이접기를 활용한 수학과 교수-학습에 관한 연구, 부산대학교 교육대학원 석사 논문.

김향숙 외 4인 (2005). 종이접기로 하는 재미있는 수학, 서울: 경문사.

방승진 외 6인 (2007). 수학분야 영재 수업 프로그램 연구: 기둥이 4개인 하노이 탑의 규칙성과 일반항, 수학교육논문집 **21(1)**, pp.19-32.

방승진 (2000). 주제탐구중심 수학영재교육, 수학교육학술지 **5**, pp.39-48.

유윤재 (2006). 창작물 중심 영재교육의 중요성, 수학교육논문집 **20(1)**, pp.1-8.

유익승·김정수·김연호·김형균 (2007). 디오판틴 방정식의 해들에 대한 연산 및 성질 연구, East Asian Mathematical Journal **23(3)**, pp.371-380.

이강섭·신현용 (2001). Proofs for gifted students, 수학교육학술지 **6**, pp.167-177.

한인기 외 4인 (2005). 헤론의 공식과 유사한 사면체의 부피 공식에 대한 연구, 수학교육논문집 **19(3)**, pp.517-526.

한인기 외 5인 (2007). 사면체에서 지렛대의 원리를 이용한 선분들 및 평면들의 교차에 관한 성질 연구, 수학교육논문집 **21(4)**, pp.663-676.

한인기 (2006). 한국과학영재학교의 R&E 운영 및 지도에 대한 연구: 2005년 수학 №7 과제를 중심으로, 수학교육논문집 **20(1)**, pp.19-32.

한인기·에르든예프 (2005). 유추를 통한 수학탐구, 서울: 승산.

황선욱 (2000). 교구 활용을 통한 수학 영재의 창의력 신장, 수학교육학술지 **5**, pp.117-124.

芳賀和夫 (1999). *オリガミクス 〈1〉 幾何図形折り紙*, 日本評論社.

芳賀和夫 (1996). *オリガミクスによる數學授業*, 明治図書出版.

Kolmogorov A. N. (1959). *O professii matematika*, Moskva: Izdat. Moskovskogo Universiteta.

# A Study on New Proofs and Generalization of Haga Theorem in Paper folding

**Lee, Seong Hyun & Jung, Sang Hyuk**
Ulsan Science High School, 689-821, Korea
mathlsh@use.go.kr & jsh911026@naver.com

**Han Inki[1)]**
Dept. of Math. Edu., Gyeongsang National University, 660-701, Korea
inkiski@gsnu.ac.kr

In this paper we study new proofs and generalization of Haga theorem in paper folding. We analyze developed new proofs of Haga theorem, compare new proofs with existing proof, and describe some difference of these proofs. We generalize Haga second theorem, and suggest simple proof of generalized Haga second theorem.

---

1) correspondent author
* ZDM Classification : G93
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D50
* Key Words : paper folding, Haga theorem, generalization, proof