영재교육연구 제 18권 제 1호
Journal of Gifted/Talented Education
2008. Vol 18. No 1, pp. 53~77

수학영재 학생들의 정다면체 정의 구성 활동 분석

고 은 성 이 경 화 송 상 헌

한국교원대 대학원 한국교원대학교 경인교육대학교

이 연구는 정다면체를 학습한 경험이 없는 초등학교 5학년 수학영재 21명을 대상으로 정다면체의 정의를 구성한 결과를 분석한 것이다. 학생들은 조별로 교구를 사용하여 정다면체를 직접 제작하고(활동1), 이들을 관찰하면서 그 특징을 기술한 뒤(활동2), 탐구한 내용을 토대로 정다면체의 정의를 구성하였다(활동3). 학생들이 구성한 정다면체의 정의를 분석하여 정다면체에 대한 완전한 정의를 구성한 경우와 불완전한 정의를 구성한 경우로 구분하고 각 경우들이 수학적 정의의 필수 조건에 어떻게 부합하는지를 확인하였다. 특히, 학생들이 정다면체를 관찰할 때 주목하는 요소와 학생들이 구성한 정다면체의 정의를 통합 분석하여 정의 구성 활동에 미치는 수학적 사고 요소와 수학영재 교육에의 시사점을 확인하였다.

주제어: 수학영재, 정의 구성, 정다면체, 수학적 사고, 추상화, 종합, 일반화

I. 서 론

수학은 하나의 이론적 체계로 수학적 정의는 그 이론적 체계에서 핵심적인 역할을 한다. 수학이 이론적 체계로 거듭나는 과정 속에서 나타나는 논리적 엄밀성과 창조성의 결합물이 바로 정의이며(Mariotti & Ficshbein, 1997), 심사숙고의 과정을 거친 후 기존에 존재해온 대상을 바라보는 새로운 방식이 떠올라 이를 담게 되는 틀이 바로 정의이다(조영미, 2001). 정의는 수학과 수학교육에서 중요한 부분을 차지하고 있는 것으로, 수학적 개념

교신저자: 이경화(khmath@knue.ac.kr)

* 이 논문은 2005년도 정부재원(교육인적자원부 학술연구조성사업비)으로 한국학술진흥재단의 지원을 받아 연구되었음(KRF-2005-079-BS0123)

을 이해하고 문제를 해결하거나 증명하는데 있어서 정의가 차지하는 중요한 역할에 대해서는 이미 여러 연구자들에 의해 강조되어 오고 있다(강흥규와 조영미, 2002; 조영미, 2001; Falcade, Mariotti & Laborde, 2004; Harel, Selden & Selden, 2006; Mariotti & Fischbein, 1997; Ouvrier-Buffet, 2002, 2004, 2006; Shir & Zaslavsky, 2001, 2002). 그리고 수학 학습에서 완성된 정의를 제공하는 것이 아닌 정의를 구성하는 활동은 문제 해결, 추측, 일반화, 형식화, 증명 등의 다른 수학적 활동 못지않게 중요한 것으로 평가받고 있다(De Villiers, 1998; Freudenthal, 1973; Mariotti & Fischbein, 1997; Ouvrier-Buffet, 2004, 2006).

그 동안 여러 연구자들(고은성, 이경화, 2007; 고은성, 이경화, 송상헌, 2008; 김민정, 이경화, 송상헌, 2008; 김지원, 송상헌, 2004; 나귀수, 이경화, 한대희, 송상헌, 2007; 류현아, 정영옥, 송상헌, 2007; 송상헌, 신은주, 2007; 송상헌, 임재훈, 정영옥, 권석일, 김지원, 2007; 송상헌, 정영옥, 임재훈, 신은주, 이향훈, 2007; 송상헌, 장혜원, 정영옥, 2006; 송상헌, 허지연, 임재훈, 2006; 신은주, 신선화, 송상헌, 2007; 신을진, 송상헌, 2006; 이경화, 최남광, 송상헌, 2007; 최영희, 도종훈, 2004; Hekimoglu, 2004; Koichu & Berman, 2005; Lee, 2005; Sriraman, 2003, 2004a; Tsamir & Dreyfus, 2002; Yim, Song & Kim, 2008)에 의해 수학과의 여러 영역에서 폭넓은 주제를 통해 수학영재아들이 보이는 사고 특성을 보다 세밀하게 분석하려는 시도가 있어왔다. 이들의 연구에 따르면 수학영재 학생들은 문제를 해결하거나 증명하는 과정에서 뛰어난 일반화, 형식화, 정당화, 증명, 추론 능력을 보인다고 하였다. 그리고, 특히, 류현아, 정영옥, 송상헌(2007), 송상헌, 장혜원, 정영옥(2006), 송상헌, 허지연, 임재훈(2006), 이경화, 최남광, 송상헌(2007), 그리고 Yim, Song & Kim (2008)에서는 기하영역에서 수학영재의 정당화를 비롯한 능력의 우수성에 주목하였다.

한편, 수학교육학 분야에서 정의 관련 연구는 수학적 정의의 역할과 특징에 대한 학생들의 수학적 정의에 대한 인식 조사(Shir & Zaslavsky, 2001, 2002; Zaslavsky & Shir, 2005)와 정의 구성을 위한 상황의 개발(De Villiers, 1998; Falcade, Mariotti & Laborde, 2004; Mariotti & Fischbein, 1997; Ouvrier-

Buffet, 2002, 2004, 2006)에 초점을 두어 왔다. 본 연구는 이러한 선행연구를 토대로 수학영재아들이 직접 정의를 구성하는 활동을 관찰하여 정의 구성 활동과 관련된 수학적 사고 요소를 분석하고 그것이 주는 수학영재교육에의 시사점에 대해 알아보고자 한다.

II. 이론적 배경

1. 수학적 정의

수학적 정의에 대한 개념에는 수학적 정의의 역할과 특징(즉, 수학적 정의가 갖추어야 할 조건)이 포함된다(Zaslavsky & Shir, 2005). 자주 사용되는 수학적 정의에 대한 접근은 “정의는 이론의 한 부분”이라는 것이다. 여러 연구자들에 의해 수학적 정의에 대한 몇몇의 특징이 중요한 것으로 받아들여지고 있다(Shir & Zaslavsky, 2001, 2002; Van Dormolen & Zaslavsky, 2003; Zaslavsky & Shir, 2005). 이들을 간단히 살펴보면 다음과 같다.

무모순성(non-contradicting): 정의가 지닌 모든 조건들이 함께 존재할 수 있어야 한다. 즉, 정의가 포함하고 있는 여러 조건들 사이에 모순이 있어서는 안 된다.

명확성(unambiguous): 정의의 의미가 유일하게 해석되어야 한다. 해석하는 관점에 따라 다르게 해석되어져서는 안 된다.

불변성(invariant): 표현의 변화에도 의미가 보존되어야 한다.

계층성(hierarchical): 기본적인 개념이나 이전에 정의된 개념에 기초해서 이루어져야 한다. 예를 들면, ‘직각은 두 선분이 수직으로 만나서 이루는 각이다’와 같이 새로운 개념은 좀 더 포괄적인 개념에 몇 가지 성질을 추가하여 묘사하게 된다.

최소성(minimal): 좋은 정의는 꼭 필요한 성질보다 더 많은 성질을 요구하지 않는다. 예를 들면, ‘직사각형은 네 각이 모두 직각인 사각형이다.’보다는 ‘직사각형은 세 각이 직각인 사각형이다.’가 좋은 정의이다.

무모순성과 명확성은 모든 개념의 정의에 대해 필수적인 조건이며, 불변성과 계층성은 적용 가능할 때 필수적인 조건으로 본다. 그리고 이 외의 정의의 조건으로 우아함(elegant)을 들기도 하지만 이는 논리적 관점에서 반드시 필요한 것은 아니며 사회문화적으로 선택적인 조건에 해당된다. 본 연구와 관련하여 정다면체의 정의에서 무모순성은 학생들이 정의에서 문장으로 나열한 조건들이 모순이 없어야 함을 의미하며, 명확성은 학생들이 구성한 정의의 의미가 유일하게 해석되어야 함을 의미한다. 최소성의 경우, 학생들이 최초에 구성한 정의에서 불필요한 조건을 확인하고 제외시키려는 노력을 하는지 여부에 주목하여 파악하고자 한다.

2. 정의 구성 활동

Ouvrier-Buffet(2004)는 학생들이 자발적으로 정의를 구성하도록 하는 상황이 개발될 필요가 있다고 주장하면서 정의 구성이 이루어질 수 있는 상황을 분류하기, 재정의하기, 문제해결로 구분하였다. 분류하기 상황에서는 정의하고자 하는 새로운 개념에 대해 적절한 예와 반례를 이용하여 정의를 구성한다. 재정의하기 상황에서는 친숙한 개념에 대해 예와 반례를 이용하여 정의를 구성하거나 부정확한 정의를 수정하여 정의를 발전시켜나가는 활동이 이루어진다. 그리고 다른 상황에서 정의를 구성하거나 정의를 확장시키기도 한다. 문제해결 상황에서는 문제해결 자체가 정의 구성을 필요로 하는 상황으로 초중고 학생들 수준에 적절한 문제해결 상황의 개발은 거의 이루어지지 못하고 있는 실정이다.

Mariotti & Fischbein(1997)은 기하학적 도형의 정의를 구성하기 위한 활동을 다음과 같은 절차를 통하여 안내할 것을 제안하였다.: (1) 먼저 정의할 도형을 관찰한다. (2) 도형의 특징을 확인하고 이 특징들로부터 성질들을 기술한다. (3) 성질들을 이용하여 정의를 구성하고 다시 도형을 관찰하면서 구성한 정의를 확인한다.

3. 수학적 사고와 정의

정의는 수반되는 개념과 일치하는 것으로(Ouvrier-Buffet, 2006), Lakatos

는 개념 형성과 정의 구성을 함께 고려했다(Ouvrier-Buffet, 2006에서 재인용). 추상화 과정은 개념의 형성 과정에서 매우 중요한 것으로, Skemp (1996)는 예를 통하여 새로운 개념을 형성해 나가는 과정을 추상화 과정과 동일한 것으로 간주하였다. 추상화 과정은 다양한 예에서 공통된 특성을 발견하는 것으로, 어떤 대상들이 주어졌을 때 그 각각의 차이점은 무시하고 공통적 성질에만 관심을 집중시키는 동안 그 공통된 성질을 추출하는 심적 활동이 일어나게 되는데, 이런 심적 활동의 결과를 소위 개념이라 부르며 이러한 개념 형성 과정을 추상화 과정이라 하였다. 추상화(abstracting)란 일상생활에서 우리의 경험들 사이의 유사성을 인식하는 활동을 말하며, 추상(abstraction)은 영속하는 사고 변화의 한 종류이면서 추상화의 결과로 Skemp (1987)는 이를 '개념'이라 하고 추상화의 결과인 개념에 대한 정교하고 정확한 설명을 '정의'라고 하였다(Skemp, 1996). 즉 정의를 구성하는 것은 개념 형성을 전제로 하며, 개념 형성은 추상화를 수반하는 것이다. 이때 추상화 과정에 여러 사고 요소가 작용하게 되는데 Dreyfus는 일반화와 종합(synthesizing)을 추상화 과정에 있어서 필수 불가결한 선행 요소라고 하였다(Tall, 2003).

많은 수학교육 연구자들은 일반화를 개별적인 사실에서 일반적인 사항을 이끌어 내고 귀납할 수 있는 과정으로 설명한다. Piaget는 일반화를 높은 수준의 조작으로 간주하였을 뿐 아니라 일반화를 반영적 추상화의 진화하는 과정으로 여기고 있다(Sriraman, 2004b). 일반화는 특수한 것에서 어떤 사실을 이끌어 내거나 유도하며, 공통 성질을 추출하며, 타당한 영역을 확장하는 활동이다. 학생들은 경험을 통해 적절한 조건 하에서 일원 일차방정식의 해가 하나라는 것과 대부분의 이원, 그리고 삼원 일차 연립방정식은 유일한 해를 갖는다는 것을 알 수 있다. 다음에 학생들은 n원 일차 연립방정식으로 이것을 일반화한다. 그러나 일반화 과정에서 새로운 개념의 형성을 필요로 하는 경우도 있다. 예를 들어 수로 이루어진 수열의 수렴으로부터 함수열의 수렴으로의 전이가 그러한 경우로, 여기서는 함수 공간 위에서의 위상을 필요로 한다. 따라서 이와 같은 일반화 과정에서는 인지적 요구가 상당히 늘어난다(Tall, 2003).

Dreyfus에 의하면 종합은 부분들을 결합하고 구성하여 전체적 실체를 형성하는 것을 의미한다. 학생들은 활동 과정에서 지금까지 배운 많은 사실들을 떠올리고, 새로운 사실들을 알게 되는데 활동 과정의 후반부에서 지금까지 알고 있는 이러한 서로 무관해 보이는 사실들은 하나의 상(picture)으로 합쳐지게 된다. 그리고 그 속에서 각각의 사실들은 상호 관련을 맺게 된다. 이와 같이 하나의 상으로 합쳐지는 과정이 종합이다(Tall, 2003). Descartes는 다른 현상들 사이의 연관성과 관계에 대한 즉각적인 인지를 일련의 연속적인 논리 연역적 사고와 비교하면서 전자의 중요성을 강조하였다. 그리고 Poincaré와 Hadamard도 역시 수학자의 사고 특성을 설명하면서 논리적 사고와 함께 본질적 관계와 연결성을 인지할 수 있는 능력의 중요성을 언급하였다. Duncker는 수학적 능력에 대한 그의 연구에서 문제 상황에서 자료를 검사하고 상황으로부터 벗어나서 일련의 상황에 대한 재조직에 의해 갑작스런 이해가 일어나는 것을 경험을 하게 되는데 이는 한 번에 상황의 여러 측면을 볼 수 있을 때 가능하다고 하면서 이를 수학영재의 사고 특성의 하나로 소개하였다(Krutetskii, 1976). 이와 같이 Descartes, Poincaré, Hadamard, 그리고 Duncker에 의해 설명되고 있는 수학적 사고 과정은 주어진 문제 상황 또는 사실들을 바탕으로 이루어지는 연결성과 관계의 인식을 중시하고 전체적인 통합을 필요로 한다는 측면에서 Dreyfus가 종합이라고 명명한 것과 유사함을 알 수 있다.

추상화는 일반적인 성질을 얻어낸다는 점에서 일반화와 관련되며, 전체적인 실체를 구성한다는 점에서 종합과 관련된다는 것을 살펴보았다. 그러나 일반화나 종합은 추상화보다 인지적인 부담이 적은 것으로, 일반화는 지식 구조의 확장과 관련이 있으나 추상화를 위해서는 정신적 재구성이 필요하다. 추상화는 수학적 대상들의 성질과 대상 사이의 관계로부터 정신적 구조를 형성하는 구성적 활동으로 이것은 성질과 관계들을 추출해냄으로써 가능해진다. 학생의 입장에서 이와 같은 구성적 정신 활동은 의도된 상황과 무관한 구조는 버리고 추상적 개념의 구조의 일부가 되는 수학적 구조에 관심을 집중시킬 때 일어난다. 따라서 무관한 상세한 내용들이 생략되고 그 결과 상황의 복잡성이 감소되는 반면 그 구조가 중요하게 된다(Tall, 2003).

4. 정다면체

정다면체는 모든 면들이 합동인 정다각형이고 다면각들이 모두 합동인 다면체이다. 정다각형은 모든 위수에 대해 존재하지만 정다면체는 오직 다섯 개만이 존재한다. 정다면체는 각각 그것이 갖고 있는 면의 수에 따라 이름을 붙여, 정4면체, 정6면체, 정8면체, 정12면체, 정20면체라 부른다(Eves, 1995). 정다면체에 존재하는 규칙성이 우연에 의한 것이 아니라는 사실은 상당히 의미 있는 현상이다. 우리는 정다면체에 대하여 꼭지점, 모서리, 면과 관련된 다양한 일반적인 성질들을 나열할 수 있다. 그러나 다양한 성질들 중에 어떠한 것을 선택하여 어떠한 방식으로 조합하는 가에 따라 특정한 다면체를 정의하기도 하고, 단순한 사실의 나열이 되기도 한다(Mariotti & Fischbein, 1997). 이는 정다면체의 꼭지점, 모서리, 면과 관련된 다양한 일반적인 성질들의 연결성, 관계 등의 인지여부에 의존하는 것이다.

학교수학에서 사용하는 정다면체의 일반적인 정의는 다음의 3가지의 조건을 포함한다. “정다면체는 (1)모든 면들이 합동이고 (2)각 꼭지점에 모이는 모서리(또는 면)의 개수가 같은 (3)볼록다면체이다.” 그런데 학생들이 정다각형으로부터 정다면체를 유추하면서 정다각형이 “모든 각의 크기가 같은(합동) 다각형”이라는 사실로부터 정다면체는 “모든 면이 합동인 다면체”라고만 오해하기 쉽다.

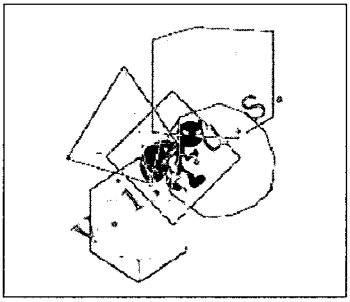
III. 연구 방법

1. 연구의 과제

본 연구에서 학생들은 교구(Zonodome System)를 이용하여 5가지의 정다면체를 직접 만들어보고 이를 관찰한 후, 관찰을 통하여 알게 된 정다면체의 특징, 성질 등을 기록한다. 그리고 이를 토대로 정다면체의 정의를 구성한다. 이는 Mariotti & Fischbein(1997)가 제시하고 있는 개념 정의 활동 순서와 유사함을 알 수 있다. 이 연구를 위해 설계된 교수 실험은 영재교육원 정규수업의 일부분으로 6개의 조로 나누어 3시간 연속으로 이루어졌다. 수

업은 크게 3개의 활동으로 구성되어 있는데 각각의 활동은 다음과 같다.

활동1: 정다면체 만들기(조별 활동). 학생들에게 정다면체를 암시하는 겨냥도를 제공한다. 그리고 이 그림을 참고하여 학생들이 교구를 이용하여 조별로 정다면체를 만들어 보도록 한다. 다음 [그림 1]은 학생들에게 단서를 위해 제공한 정다면체 그림이다.



[그림 1] 학생들에게 제시한 정다면체 그림.

활동2: 정다면체 관찰하기(개별 활동). 학생들은 조별로 만든 정다면체를 관찰한 후, 각 정다면체에서 관찰한 내용(특징, 성질 등)을 활동지에 기록한다.

활동3: 정다면체 정의하기(개별 활동). 활동2에서 관찰한 내용을 토대로 정다면체를 정의하여 이를 활동지에 기록한다. 이 때, 활동1에서 제작한 정다면체를 계속적으로 관찰할 수 있도록 허용한다.

연구를 위한 본 활동을 시작하기에 앞서 학생들과 "정사각형"과 "소수"의 정의가 무엇인지에 대한 토론을 통하여 "정의"라는 단어의 의미를 상기시켰다. 앞서 제시한 정의의 조건에 대한 설명은 제시하지 않았다. 이는 정다면체에 대한 수학적 정의를 구성하는 과정에서 학생들 스스로 정의가 갖추어야 할 조건에 얼마나 주목하고 어떤 방식으로 그 조건들을 통제해나가는지 확인하기 위한 조치이다.

2. 연구 대상

본 연구의 대상은 영재교육진흥법과 그 시행령에 따라 과학기술부의 재

정 지원을 받아 운영되는 대학 부설 과학영재교육원의 프로그램에 참여하고 있는 초등학생 5학년 21명(남자 14명, 여자 7명)이다. 이들은 1년에 과학 60시간, 수학 42시간으로 설계된 교육프로그램에 참여하고 있는데, 수학은 3시간 단위의 프로그램으로 대수, 기하, 확률 등 다양한 분야로 구성되어 있으며, 학생들의 문제해결 능력과 추론 능력, 정당화 능력 등의 신장에 초점을 두고 이루어진다.

연구의 과제인 정다면체에 대해서는 7차 정규교육과정의 5학년 1학기(5-가 단계)에서 정육면체를 다루고(교육부, 2006a) 중학교 1학년 2학기(7-나 단계)에서 다른 모든 종류의 정다면체를 다룬다(교육부, 2000). 5-가 교과서에서는 실생활의 소재(상자)를 예시하면서 직사각형 6개로 둘러싸인 도형을 직육면체로 약속하고, 특히 정육면체는 크기가 같은 정사각형 6개로 둘러싸인 도형이라고 약속한다. '합동'의 개념은 5학년 2학기(5-나 단계)에서 학습(교육부, 2006b)하였다. 실험은 2006년 11월 말(5학년 2학기)에 이루어졌으므로 정육면체의 정의와 합동에 대한 개념은 학습한 상태이다.

3. 자료 수집 및 분석

가. 자료 수집

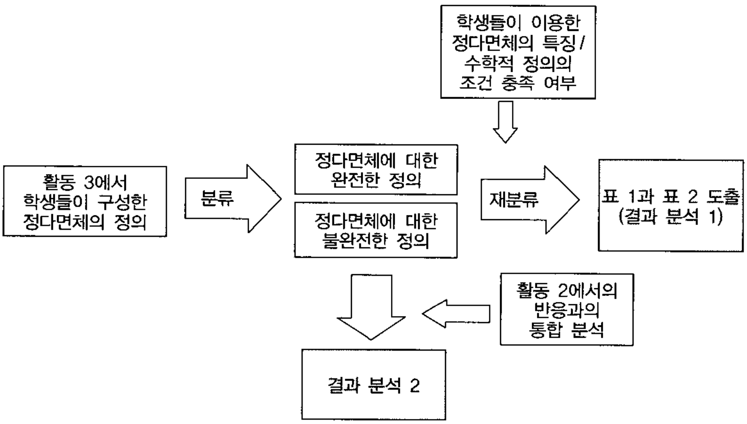
Tsamir & Dreyfus(2002)에 따르면 추상화 과정은 학생들이 사용하는 과제, 활동에서 이용하는 여러 가지 구체물 등에 영향을 받는 것으로, 수학적 개념이 구성되는 현상을 관찰하는 것은 방법론적으로 해결하기 어려운 문제라고 지적하면서 이러한 현상을 관찰할 수 있는 교수 실험을 설계하는 것은 더욱 어렵다고 언급하였다. 왜냐하면 이러한 현상은 학생이 혼자서 조용히 앉아있을 때, 문제를 해결하기 위해 무엇인가를 생각할 때 일어날 수 있기 때문이다. 그래서 자료로부터 결과를 추론하거나 문제를 해결하기 위하여 전략을 탐구하는 것과 같은 지식의 습득과 관련된 관찰 가능한 '인식론적 행동'의 분석을 통하여 수학적 구조가 구성되는 현상을 관찰하는 것으로 이 문제를 해결하고자 하였다. 개인 활동, 소그룹 활동, 교사 안내에 의한 탐구 활동 등과 같은 사회적 문맥 속에서 학생들이 활동지에 기록한 내용, 면담 내용 등의 언어적 표현이 바로 이러한 관찰 가능한 행동에 해당

된다.

이 연구에서 사용한 분석을 위한 주된 자료는 학생들이 기록한 활동지이며, 그들이 기록한 내용 중 용어나 표현 등에 대해 정확한 확인이 필요한 경우에는 수업 후 개별 면담을 실시하였다. 학생들의 수학적인 정의 구성 활동에 직접적인 영향을 미치지 않도록 수업하는 것이 중요하였기 때문에, 수업은 전체 학급을 대상으로 하는 설명보다는 개별 활동을 중심으로 진행되었다. 그러므로 학생들의 개별 활동지에 나타난 사고 과정 관련 자료와 수업 후 개별 면담 자료는 이 연구에서 가장 핵심적인 것이다.

나. 자료 분석

먼저 활동3에서 수집한 학생들의 반응을 정다면체에 대한 완전한 정의와 불안전한 정의로 분류하였다. 다음에 이를 정다면체를 정의하기 위해 학생들이 사용한 요소(예를 들면 면의 합동, 한 꼭지점에 모이는 모서리의 수, 두 면이 이루는 각 등)에 따라 재분류하여 <표 1>을 작성하고, 학생들이 구성한 정의가 수학적 정의를 위한 필수 조건을 얼마나 충족시키는지 조사하여 <표 2>를 작성하였다. 그리고 학생들이 활동2에서 정다면체를 관찰할 때 정다면체의 어떠한 요소에 주목했는지 확인하고 이를 활동3의 반응과 함께 통합하여 분석하였다. 자료 분석 절차에 대한 개요는 [그림 2]와 같다.



[그림 2] 자료 분석 절차.

IV. 연구 결과 및 분석

이 연구에서 논의되는 내용들은 기존의 틀에 의해 분류되고 조직된 것이 아니라, 학생들의 반응을 통하여 얻어진 내용을 토대로 귀납적인 과정으로 얻어진 결과들이다(Denzin & Lincoln, 1994; Goetz & LeCompte, 1984).

1. 활동3의 반응에 대한 분석 결과

가. 정다면체에 대한 정의의 완전성에 대한 분석

정다면체의 수학적 정의에 따르면 정다면체는 각 면이 합동인 정다각형으로 이루어졌으며 각 꼭지점에 모이는 모서리의 수가 같은 볼록다면체이다. 이를 정다면체의 면이 갖는 특징과 꼭지점이 갖는 특징으로 나누어 볼 수 있다. 면이 갖는 특징은 합동인 정다각형이라는 것이고, 꼭지점이 갖는 특징은 각 꼭지점에 모인 모서리의 수가 같다는 것이다. 학생들의 반응을 분석한 결과 면이 갖는 특징에 대한 내용은 '합동인 정다각형으로 이루어져 있다, 면의 넓이와 모서리의 길이가 같다, 면의 크기와 모서리의 길이가 같다, 면의 모양과 모서리의 길이가 같다, 한 종류의 정다각형으로 이루어져 있다'로 나누어졌으며, 꼭지점이 갖는 특징에 대한 내용은 '각 꼭지점에 모인 모서리의 수가 같다, 각 꼭지점에 모인 면의 수가 같다, 각 꼭지점에서의 입체각의 크기가 모두 같다'로 나누어졌다. 그리고 이 외에 '두 면이 이루는 각의 크기가 같다'는 성질에 주목한 학생도 있었다. 이를 <표 1>과 같이 면이 갖는 특징과 꼭지점이 갖는 특징으로 분류하고, 이를 토대로 활동3에서의 학생들의 반응을 정다면체에 대한 완전한 정의와 불완전한 정의로 분류하였다. 즉, 행과 열의 조건들을 각각 하나 이상씩 포함하고 있어야 완전한 정의가 되며 행과 열의 조건 들 중 각각에서 하나도 제시하지 못하면 불완전한 정의가 된다.

그리고 학생들이 정의를 구성하기 위해 정다면체의 어떠한 특징을 이용했는지에 따라 재분류하였다. 21명의 학생 중 5명이 정다면체에 대한 완전한 정의를 구성하였으며, 16명의 학생은 정다면체에 대한 불완전한 정의를 구성하였다. 이들 중 정의 구성 자체에 대해 어려움을 갖는 학생도 있었다.

<표 1> 정다면체에 대한 정의의 완전성에 대한 분석 결과

면이 갖는 특징 / 꼭지점이 갖는 특징	합동인 정다각형	면의 넓이와 모서리의 길이가 같다	면의 크기와 모서리의 길이가 같다	면의 모양과 모서리의 길이가 같다	한 종류의 정다각형으로 이루어져 있다	기타
각 꼭지점에 모인 모서리의 수가 같다	2	1	–	–	–	–
각 꼭지점에 모인 면의 수가 같다	–	–	–	–	–	–
각 꼭지점에서의 입체각 크기가 같다	–	–	1	–	–	–
두 면이 이루는 각의 크기가 같다	–	1	–	–	–	–
기타	4	1	–	3	4	4

□ 정다면체에 대한 완전한 정의, □ 정다면체에 대한 불완전한 정의

1) 면이 갖는 특징에 대한 다양한 설명

6명의 학생을 제외하고 정다면체의 면이 갖는 특징인 합동인 정다각형을 설명하기 위해 정규 교육과정에서 학습이 이루어진 합동, 정다각형과 같은 용어를 사용하지 못하였다. 이 학생들은 면의 넓이, 면의 크기, 면의 모양, 한 종류의 정다각형 등 다양한 용어를 사용하여 정다면체의 면이 갖는 특징인 합동인 정다각형을 설명하였다.

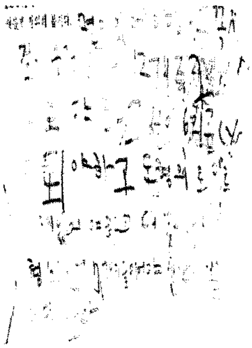
2) 꼭지점이 갖는 특징에 대한 인식 부족

정다면체를 정의하는데 있어 17명의 학생이 면이 갖는 특징을 이용한 반면 꼭지점이 갖는 특징을 이용한 학생은 단지 5명이었다. 이는 학생들이 다면체보다 평면도형을 많이 경험해 평면도형에 익숙해 있으며 이미 학습이 이루어진 다면체들에 대한 설명은 면이 갖는 특징에 의존해 이루어지기 때문인 것으로 생각해 볼 수 있다. 그리고 각 꼭지점에 모인 모서리의 수가 같다는 특징을 이용한 학생이 2명인 반면 각 꼭지점에 모인 면의 수가 같다는 것을 이용한 학생은 한 명도 없었는데 이는 실험에 이용한 교구의 영향으로 볼 수 있을 것이다(Tsamir & Dreyfus, 2002).

3) 정다면체의 정의 구성 자체를 어려워 함

4명의 학생이 정다면체의 정의를 구성할 때 면이 갖는 특징과 꼭지점이

갖는 특징 모두를 이용하지 못했다. 이 학생들의 경우 정의 구성 자체를 어려워하고 있었다. 정다면체의 경우 우선 5가지의 정다면체 각각의 개념이 정의 되어야 하고 이를 종합하여 정다면체를 정의해야 한다. 이러한 계층적인 정의 구성 과정을 어려워하였다. 다음 [그림 3]은 한 학생이 구성한 정다면체의 정의이다. 이 학생의 경우 5가지의 정다면체 각각이 지니고 있는 특징들을 일일이 나열하는 식으로 정다면체를 정의하고 있다.



"면이 있어야 하고 꼭지점이 4개, 8개, 12개 즉 2×수이어야 하고, 선이 6의 곱(×)이 되야 하고, 도형으로 이루어져 있어야 하고, 대각선이 삼각형 빼고 □개의 곱이어야 한다. 입체이어야 한다."

[그림 3] MJG 학생이 구성한 정다면체의 정의.

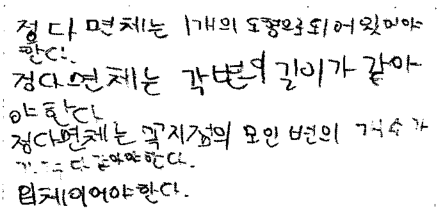
나. 수학적 정의에 대한 인식 조사

<표 2>는 학생들의 수학적 정의에 대한 인식을 알아보기 위해 활동3에서 학생들이 구성한 정의가 얼마나 수학적 정의를 위한 조건을 충족시키는지 분석한 결과이다. 수학적 정의의 필수적인 조건 중 불변성과 계층성은 정다면체의 경우 반드시 필요한 조건이 아닌 것으로 분석에서 제외하였다.

<표 2> 수학적 정의를 위한 조건 충족 여부에 대한 분석 결과

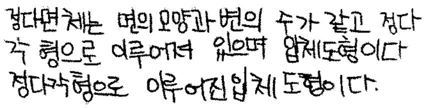
수학적 정의의 요건 / 학생들의 반응	무모순성	명확성	최소성
정다면체에 대한 완전한 정의를 구성(5명)	5	5	1
정다면체에 대한 불완전한 정의를 구성(16명)	12	11	3
총인원	17	16	3

분석 결과 정다면체에 대한 완전한 정의를 구성한 학생들과 불완전한 정의를 구성한 학생들 대부분이 수학적 정의를 위한 필수 조건인 무모순성과 명확성을 충족시켰다. 그러나 완전한 정의를 구성한 학생들 대부분이 최소성 조건을 만족시키지 못하고 있다. 최소성은 사회문화적인 선택적 조건이며 아직 개념이 형성 과정에 있는 경우 이것이 최소의 것인지 아닌지를 결정할 수 있는 충분한 지식이 없기 때문에 학습자에게 최소성은 개념에 대한 이해의 발달을 방해할 수 있다.



[그림 4] 정다면체에 대한 완전한 정의를 구성한 학생의 예.

[그림 4]는 정다면체에 대한 완전한 정의를 구성한 학생의 예이다. 이 학생의 경우 꼭지점에서의 특징과 면에서의 특징을 모두 기술하고 있으며 무모순성, 명확성을 모두 만족하고 있다. 정다면체에 대한 불완전한 정의를 구성한 학생들 대부분 수학적 정의를 위한 필수적인 조건을 충족시키고 있었다. [그림 5]는 불완전한 정의를 구성한 학생의 예이다. 이 학생의 경우 정다면체에 대한 완전한 정의를 하지는 못했지만 무모순성과 명확성 조건을 충족시키고 있음을 알 수 있다.



[그림 5] 정다면체에 대한 불완전한 정의를 구성한 학생의 예.

2. 활동2와 활동3의 반응에 대한 통합 분석 결과

가. 정다면체에 대한 완전한 정의를 구성한 경우

<표 3>은 정다면체에 대한 완전한 정의를 구성한 학생들이 활동2에서 정

다면체를 관찰하고 특징을 기술할 때 주목한 요소를 정리한 것이다. 대부분의 학생들이 면의 수에서 꼭지점의 수까지 다양한 요소에 주목을 하고 있다. 그러나 한 명만이 한 꼭지점에 모이는 모서리의 수에 주목했으며, 꼭지점에서의 입체각, 두 면이 이루는 각에 주목한 학생은 한명도 없었다. 이는 활동3에서 정다면체를 정의할 때 활동2에서 주목한 특징 외에 더 필요한 특징이 있다는 것을 학생들이 자발적으로 인식했다는 것이다. 다음은 정다면체에 대한 완전한 정의를 구성한 학생들의 활동2와 활동3을 통합 분석한 결과이다.

<표 3> 정다면체에 대한 완전한 정의를 구성한 학생들이 활동2에서 주목한 요소

구분	면의 수	면의 모양	면의 넓이	모서리 수	모서리 길이	꼭지점 수	한 꼭지점에 모이는 모서리의 수	기타
학생수 (5명)	4	5	2	4	3	5	1	1

1) 적절한 특징의 선택과 우수한 일반화 능력

<표 4>는 한 학생의 활동2와 활동3에서의 반응이다. 이 학생의 경우 활동2에서 5개의 정다면체를 관찰하고 특징을 기술할 때 한 꼭지점에 모이는 모서리의 수, 면의 모양, 모서리의 길이와 수, 모서리가 이루는 각의 크기, 꼭지점의 수, 입체대각선의 수 등에 주목을 하였다. 그리고 활동3에서 정다면체의 정의를 구성할 때 활동2에서 관찰한 특징들 중 정의를 위해 필요한 요소인 한 꼭지점에 모이는 모서리의 수, 면의 모양을 적절히 선택하여 정의를 구성하고 있다. 그리고 이 학생의 경우 선택한 요소의 특징을 일반화시키는데 뛰어난 능력을 보여주고 있다. 즉, 정사면체, 정육면체, 정팔면체, 정십이면체, 정이십면체의 한 꼭지점에 모이는 모서리의 수는 각각 3개, 3개, 4개, 3개, 5개이고, 이루는 각 면의 모양은 정삼각형, 정사각형, 정삼각형, 정오각형, 정삼각형인 특징을 일반화시켜 각 꼭지점에 모이는 모서리의 수가 같으며 합동인 정다각형으로 이루어져 있다고 표현하고 있다.

<표 4> 활동2와 활동3에서 JSH 학생의 반응

활동2에서 주목한 요소	한 꼭지점에 모인 모서리의 수, 면의 모양, 모서리의 길이와 수, 모서리가 이루는 각, 꼭지점의 수, 입체대각선의 수
활동3에서의 반응	정다면체란 ① 각 꼭지점마다 모서리가 같은 수로 모인다. ② 각 면이 합동인 정다각형이어야 된다.

2) 필요한 성질의 인식과 우수한 종합 능력

<표 5>는 한 학생의 활동2와 활동3에서의 반응이다. 이 학생의 경우 활동2에서 5개의 정다면체를 관찰하고 특징을 기술할 때 면의 모양과 수, 꼭지점의 수, 모서리의 수 등에 주목을 하였다. 그러나 활동3에서 정다면체의 정의를 구성할 때 활동2에 기술한 특징 외에 두 면이 이루는 각의 크기를 추가로 이용하였다. 이는 활동2에서 관찰한 특징들로부터 정다면체를 정의하기 위해 필요한 성질을 인식해 낸 것으로 활동2에서 관찰한 특징들 사이의 관계를 인식한 것이다. 즉, 정다면체를 이루는 요소 및 특징들에 대한 종합이 이루어진 것이다.

<표 5> 활동2와 활동3에서 KHJ 학생의 반응

활동2에서 주목한 요소	면의 모양과 수, 꼭지점의 수, 모서리의 수
활동3에서의 반응	정다면체란 1개의 면의 넓이와 변의 길이가 서로 같다. 각각의 또 옆에 있는 면의 각도가 같다

나. 정다면체에 대한 불완전한 정의를 구성한 경우

<표 6>은 정다면체에 대한 불완전한 정의를 구성한 학생들이 활동2에서 정다면체를 관찰하고 특징을 기술할 때 주목한 요소를 정리한 것이다. 정다면체에 대한 완전한 정의를 구성한 학생들과 마찬가지로 대부분의 학생들이 면의 수에서 꼭지점의 수까지 다양한 요소에 주목을 하였다. 그리고 4명

의 학생이 한 꼭지점에 모이는 모서리의 수에 주목을 했음에도 불구하고 이 학생들은 활동3에서 정다면체를 정의할 때 한 꼭지점에 모인 모서리의 수를 이용하지 않았다. 이것은 그 학생들에게 활동2에서 관찰한 정다면체의 특징이 단지 특징으로만 남아있을 뿐 여러 특징들 사이의 관계를 인식하여 성질로 발전시키지 못했기 때문이다. 다음은 정다면체에 대한 불완전한 정의를 구성한 학생들의 활동2와 활동3을 통합 분석한 결과이다.

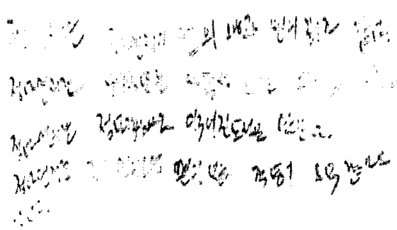
<표 6> 정다면체에 대한 불완전한 정의를 구성한 학생들이 활동2에서 주목한 요소

구분	면의 수	면의 모양	면의 넓이	모서리 수	모서리 길이	꼭지점 수	한 꼭지점에 모이는 모서리의 수	기타
학생수 (16명)	16	15	1	16	7	16	4	9

1) 추상화를 위한 종합에 능숙하지 못함

<표 7>은 한 학생의 활동2와 활동3에서의 반응이다. 이 학생의 경우 활동2에서 5개의 정다면체를 관찰하고 특징을 기술할 때 면의 모양과 수, 두 모서리의 수, 꼭지점의 수, 한 꼭지점에 모인 모서리의 수 등에 주목을 하였다. 그러나 활동3에서 정다면체의 정의를 구성할 때 활동2에 기술한 특징 중 면의 모양과 넓이, 모서리의 길이 등만 이용하고 한 꼭지점에 모인 모서리의 수는 이용하지 않았다. 이는 활동2에서 관찰한 특징들로부터 정다면체를 정의하기 위해 필요한 성질을 인식해 내지 못하고 있는 것이다.

<표 7> 활동2와 활동3에서 ACY 학생의 반응

활동2에서 주목한 요소	면의 모양과 수, 두 모서리의 수, 꼭지점의 수, 한 꼭지점에 모인 모서리의 수	
활동3에서의 반응		"정다면체란 정다면체의 면의 모양과 면의 길이가 같다. 정다면체란 삼각형 또는 사각형 또는 오각형으로 이루어져 있다. 정다면체란 정다각형으로 이루어진 도형을 말한다. 정다면체란 길이, 면의 모양, 면의 넓이 등이 모두 같다."

2) 추상화를 위한 일반화에 능숙하지 못함

<표 8>은 한 학생(JYH)의 활동2와 활동3에서의 반응이다. 이 학생의 경우 활동2에서 5개의 정다면체를 관찰하고 특징을 기술할 때 면의 수, 꼭지점의 수, 변의 수, (면)+(꼭지점)−(변)=2인 성질, 두 모서리가 이루는 각의 크기 등에 주목을 하였다. 그러나 활동3에서 정다면체의 정의를 구성할 때 활동2에 기술한 특징들을 일반화시키지 못하고 단순히 나열하는 수준에서 정의를 구성하고 있다.

<표 8> 활동2와 활동3에서 JYH 학생의 반응

활동2에서 주목한 요소	면의 수, 꼭지점의 수, 변의 수, (면)+(꼭지점)−(변)=2인 성질, 두 모서리가 이루는 각의 크기
활동3에서의 반응	여러가지 변의 길이가 같은 도형 여러개가 만나 만들어진다. 다면체를 이루는 도형의 종류가 같아도 도형 몇개가 다면체를 만드는지에 따라 모서리, 꼭지점의 수가 다른 다른종류의 다면체가 나온다. 모서리의 길이와 각의 크기가 모두 같다. 모서리는 6의 배수이다.

V. 결론 및 논의

본 연구는 초등학교 수학영재 학생들이 구성한 정다면체의 정의를 분석하여 면이 갖는 특징과 꼭지점에서의 특징으로 나누고 이를 세분화하면서 학생들이 구성한 정의가 수학적 정의를 위한 필수 조건들을 얼마나 충족하는지 확인하여 학생들의 수학적 정의에 대한 인식의 정도를 살펴본 것이다. 그리고 학생들이 구성한 정의를 정다면체에 대한 완전한 정의와 정다면체에 대한 불완전한 정의로 구분하고 그들이 정다면체를 관찰할 때 주목한 특징과 통합하여 분석하였다.

대부분의 학생들이 정다면체의 정의를 구성할 때 면이 갖는 특징(정다각형)에는 주목을 하는 반면 꼭지점에서의 특징(꼭지점의 개수, 각)에는 주목하지 못하고 있었다. 이는 학생들이 교육과정에서 다면체보다 평면도형의 정의나 성질을 많이 경험해 평면도형을 이용하여 대상을 설명하는 것에 익

숙해져 있기 때문인 것으로 볼 수 있다. 그리고 면이 갖는 특징인 '합동인 정다각형'을 설명하기 위해 '합동'이나 '정다각형'이라는 용어를 사용하지 못하고 '면의 넓이가 같고 모서리의 길이가 같다.', '면의 모양이 같고 모서리의 길이가 같다.', '면의 크기가 같고 모서리의 길이가 같다.'등으로 설명하고자 하였다. 특히 우리나라 교육과정에서는 다각형을 배울 때도 오목다각형은 취급하지 않으므로 다면체에서도 '오목'인 경우의 반례를 생각해 내지는 못했다.

활동2와 활동3의 통합 분석을 통하여 학생들의 정다면체 개념의 추상화 과정에 영향을 미치는 수학적 사고 요소를 살펴보았다. 정다면체에 대한 완전한 정의를 구성한 학생들은 활동2에서 5가지의 정다면체에서 관찰한 특징들 중 적절한 것을 선택하고 이를 일반화시켜 정의를 구성하는데 성공한 반면 정다면체에 대한 불완전한 정의를 구성한 학생들은 활동2에서 관찰한 내용을 일반화시키지 못하고 나열하는 방식으로 정의를 구성하고 있었다. 그리고 정다면체에 대한 완전한 정의를 구성한 학생들은 활동3에서 정다면체의 정의를 구성할 때 활동2에서 주목하지 못한 특징들, 예를 들면 한 꼭지점에 모인 모서리의 수, 꼭지점에서의 입체각, 두 면이 이루는 각 등을 활동3에서 자발적으로 이용하여 정의를 구성하기도 하였다. 이는 '한 꼭지점에 모인 모서리의 수가 같다, 한 꼭지점에서의 입체각의 크기가 같다, 두 면이 이루는 각이 같다'는 사실이 정다면체의 속성을 이루는데 본질적인 요소임을 파악했기 때문에 가능한 것으로 볼 수 있다. 즉, 이 학생들은 정다면체를 이루는 요소, 정다면체의 특징들 간의 관계를 파악하고 이를 성질로 인식함으로써 관찰된 사실들을 일반화하고 종합할 수 있었다. 따라서 정다면체의 개념을 추상화하고 이를 이용하여 정다면체의 정의를 구성할 수 있었다. 그러나 정다면체에 대한 불완전한 정의를 구성한 학생들은 활동2에서 한 꼭지점에 모인 모서리의 수를 관찰하여 정다면체의 특징으로 기술하였으나 활동3에서 정다면체의 정의를 구성할 때 이를 이용하지 못하였다.

강홍규와 조영미(2002)는 예시를 통하여 사물을 정의하기 위해서는 학습자의 주의력과 이해력이 전제되어야 한다고 하였으며, Tall(2003)은 추상화 과정은 의도된 상황과 무관한 구조는 버리고 추상적 구조의 일부가 되는

수학적 구조에 관심을 집중시킬 때 일어난다고 하였다. 이 학생들은 정다면체를 정의하는데 있어 다른 다면체들과 구분할 수 있도록 하는 주의력과 각 요소들 간의 관계를 파악하기 위한 이해력이 부족한 것으로 판단된다.

연구의 결과를 통하여 알 수 있듯이 수학적 개념을 정의하는 활동은 이미 여러 연구(Dreyfus & Tsamir, 2004; Freudenthal, 1973; Hershkowitz, Schwarz & Dreyfus, 2001; Krutetskii, 1976; Skemp, 1987, 1996; Sriraman, 2003; Tall, 2003; Tsamir & Dreyfus, 2002)에서 확인된 수학 학습에서 중요한 특성인 일반화, 종합, 추상화 능력을 학생들에게서 확인하고, 또한 학생들에게 경험시킬 수 있는 유용한 활동이었다. 수학적 개념을 정의하기 위해서는 수학적 정의에 대한 인식보다도 관찰한 사실들을 일반화하는 능력, 개념을 구성하고 있는 요소들 간의 관계를 파악하여 종합하는 능력, 비본질적인 요소는 무시하고 본질적인 요소를 포착해내는 능력이 필요함을 두 그룹의 비교를 통하여 알 수 있었다. 따라서 개념 정의 활동이 수학영재 학생들을 위한 프로그램을 구성할 때 이용될 수 있을 것이며, 수학영재 학생들의 사고 특성으로 문제해결 능력, 일반화, 정당화 능력 외에도 개념을 구성하고 있는 요소들 간의 관계를 파악하여 종합하는 능력과 본질적인 요소를 포착해내는 추상화 능력 등도 고려되어야 함을 알 수 있었다.

정다면체에 대한 완전한 정의를 구성한 학생들의 경우 '전형적인 예'만을 통하여 수학적 개념을 정의하는 활동이 가능했으나, 정다면체에 대한 불완전한 정의를 구성한 학생들의 경우 '전형적인 예'만을 통하여 수학적 개념을 정의하는 활동이 그리 쉽지 않음을 알 수 있었다. 이 학생들에게 반례를 유도 또는 제시하거나 문제 해결 상황을 제시하여 어떻게 정다면체의 개념을 발전시켜나가면서 정의를 수정해 나가는지에 대한 연구 역시 좀 더 이루어져야 할 것이다. 그리고 본 연구는 주로 학생들의 활동지 내용과 이에 대한 간단한 면담 내용에 의존하여 이루어진 것으로 연구 결과를 일반화하는 데 제한점이 따른다. 추상화 능력을 파악하기는 매우 어려우므로 사고과정에 대한 세부적인 정보를 보다 체계적으로 수집해야 하며, 특히 지속적인 관찰에 근거한 연구가 필요하다."

참 고 문 헌

강홍규, 조영미 (2002). 학교기하의 다양한 정의방법과 그 교수학적 의의. **수학교육학연구.** 12(1). 95-108.

고은성, 이경화 (2007). GSP 환경에서의 중학교 수학영재 학생들의 문제 해결 과정 분석 시각적 추론과 논리적 추론을 중심으로. **영재교육연구.** 17(3). 521-539

고은성, 이경화, 송상헌 (2008). 시각적 사고와 분석적 사고 사이에서 이미지의 역할. **학교수학.** 10(1). 63-78.

교육부 (2000). **중학교 교육 과정 해설(Ⅲ) - 수학, 과학, 기술, 가정.** 서울: 대한교과서 주식회사.

교육부 (2006a). **초등학교 교사용 지도서 수학 5-가.** 서울: 대한교과서 주식회사

교육부 (2006b). **초등학교 교사용 지도서 수학 5-나.** 서울: 대한교과서 주식회사

김민정, 이경화, 송상헌 (2008). 초등 수학영재의 대수적 사고 특성에 관한 분석. **학교수학.** 10(1). 23-42.

김지원, 송상헌 (2004). 한 수학영재아의 수학적 사고 특성에 관한 사례 연구. **수학교육학연구.** 14(1). 89-110.

나귀수, 이경화, 한대희, 송상헌 (2007). 수학 영재 학생들의 조건부 확률 문제해결 방법. **학교수학.** 9(3). 397-408.

류현아, 정영옥, 송상헌 (2007). 입체도형에 대한 6-7학년 수학영재들의 공간시각화 능력 분석. **학교수학.** 9(2). 277-289.

송상헌, 신은주 (2007). 수학 영재의 추상화 학습에서 기호의 의미 작용 과정 사례 분석. **학교수학. 9(1).** 161-180.

송상헌, 임재훈, 정영옥, 권석일, 김지원 (2007). 초등수학영재들이 페그퍼즐 과제에서 보여주는 대수적 일반화 과정 분석. **수학교육학연구.** 17(2). 163-178.

송상헌, 정영옥, 임재훈, 신은주, 이향훈 (2007). 수학영재들이 NIM 게임 과제에서 만든 문제 만들기 사례 분석. **수학교육학연구.** 17(1). 51-66.

송상헌, 장혜원, 정영옥 (2006). 초등학교 6학년 수학영재들의 기하 과제 증명 능력에 관한 사례 분석. **수학교육학연구.** 16(4). 327-344.

송상헌, 허지연, 임재훈 (2006). 도형의 최대 분할 과제에서 초등학교 수학 영재들이 보여주는 정당화의 유형 분석. **수학교육학연구.** 16(1). 79-94.

신은주, 신선화, 송상헌 (2007). 초등수학영재들의 메타인지적 사고 과정 사례 분석. **수학교육학연구.** 17(3). 201-220.

신을진, 송상헌 (2006). 초등영재의 성격유형과 학습동기, 자아효능감, 학습전략 사이의 관계 연구. **아시아교육연구.** 7(4). 167-186.

이경화, 최남광, 송상헌 (2007). 수학영재들의 아르키메데스 다면체 탐구 과정 - 정당화 과정과 표현 과정을 중심으로 -. **학교수학.** 9(4). 487-505.

조영미 (2001). **학교수학에 제시된 정의에 관한 연구.** 서울대학교 대학원 박사학위 논문.

최영희, 도종훈 (2004). 수학영재학생들의 인지적, 정의적, 창의적 특성 분석. **학교수학.** 6(4). 361-372.

De Villiers, M. (1998). To teach definitions in geometry or teach to define? *Proceedings of PME, 22*(2). 248-255. Stellenbosch, South Africa.

Denzin, N. K., & Lincoln, Y. S. (1994). *Handbook of qualitative research.* Thousand Oaks, CA: Sage.

Dreyfus, T., & Tsamir, P. (2004). Ben's consolidation of knowledge structures about infinite sets. *Journal of Mathematical Behavior, 23*(3). 271-300.

Eves, H. (1995). **수학사**(이우영, 신항균 공역). 서울: 경문사. (영어 원작은 1953년 출판).

Falcade, R., Mariotti, M. A., & Laborde, C. (2004). Towards a definition of function. Proceedings of PME, 28(3). 473-480. Bergen, Norway.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as educational task.* Dordrecht: D, Reidel Publishing Company.

Goetz, J. P., & LeCompte, M. D. (1984). *Ethnography and qualitative design in educational research.* Orlando, FL: Academic Press.

Harel, G., Selden, A., & Selden, J. (2006). *Advanced mathematical thinking.* In: A. Gutiérrez, & P. Boero (Eds.) Handbook of research on the psychology of mathematics education. Rotterdam, Netherlands: Sense Publishers.

Hekimoglu, S. (2004). Conducting a teaching experiment with a gifted student. *The Journal of Secondary Gifted Education, 16*(1). 14-19.

Hershkowitz, R., Schwarz, B. B., & Dreyfus, T. (2001). Abstraction in context: epistemic actions. *Journal for Research in Mathematics Education, 32.* 195-222.

Koichu, B., & Berman, A. (2005). When do gifted high school students use geometry to solve geometry problems? *The Journal of Secondary Gifted Education, 16*(4). 168-179.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in school children.*

The University of Chicago Press.

Lee, K. H. (2005). Three types of reasoning and creative informal proofs by mathematically gifted students. *Proceedings of PME, 29*(3). 241-248. Melbourne, Australia.

Mariotti, M. A., & Fischbein, E. (1997). Defining in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics, 34*. 219-248.

Ouvrier-Buffet, C. (2002). An activity for constructing a definition. *Proceedings of PME, 26*(4). 25-32, Norwich, United Kingdom.

Ouvrier-Buffet, C. (2004). Construction of mathematical definitions: An epistemological and didactical study. *Proceedings of PME, 28*(3). 473-480. Bergen, Norway.

Ouvrier-Buffet, C. (2006). Exploring mathematical definition construction processes. *Educational Studies in Mathematics, 63*. 259-282.

Shir, K., & Zaslavsky, O. (2001). What constitutes a (good) definition? The case of a square. *Proceedings of PME, 25*(4). 161-168. Utrecht, The Netherlands.

Shir, K. & Zaslavsky, O. (2002). Students' conceptions of an acceptable geometric definition. *Proceedings of PME, 26*(4). 201-208. Norwich, United Kingdom.

Skemp, R. R. (1987). **수학학습 심리학**(황우형 역). 서울: 사이언스북스. (영어 원작은 1971년 출판).

Skemp, R. R. (1996). **초등수학교육**(김판수, 박성택 공역). 서울: 교우사. (영어 원작은 1989년 출판).

Sriraman, B. (2003). Mathematical giftedness, problem solving, and the ability to formulate generalizations: The problem-solving experiences of four gifted students. *Journal of Secondary Gifted Education, 14*. 151-165.

Sriraman, B. (2004a). Gifted ninth graders' notions of proof: Investigating parallels in approaches of mathematically gifted students and professional mathematicians. *Journal for the Education of the Gifted, 27*(4). 267-292.

Sriraman, B. (2004b). Reflective abstraction, uniframes and the formulation of generalizations. Journal of Mathematical Behavior, 23(2). 205-222.

Tall, D. (2003). **고등수학적 사고**(류희찬, 조완영, 김인수 공역). 서울: 경문사. (영어 원작은 1991년 출판)

Tsamir, P., & Dreyfus, T. (2002). Comparing infinite sets - a process of abstraction: The case of Ben. *Journal of Mathematical Behavior, 21*. 1-23.

Van Dormolen, J., & Zaslavsky, O.(2003). The many facets of a definition: The case of periodicity. *Journal of Mathematical Behavior, 22*. 91-106.

Yim, J., Song, S., & Kim, J. (2008). The mathematically gifted elementary students' revisiting of Euler's polyhedron theorem. *The Montana Mathematics Enthusiast, (5)*1. 125-142.(ISSN 1551-3440)

Zaslavsky, O., & Shir, K. (2005). Students' conceptions of a mathematical definition. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(4). 317-346.

= Abstract =

The Analysis on Mathematically Gifted Students' Activities Constructing Definition of a Regular Polyhedron

Eunsung Ko

Korea National University of Education, Graduate School

Kyunghwa Lee

Korea National University of Education

Sanghun Song

Gyeongin National University of Education

This study was conducted with the focus on the process of constructing a definition and produced definitions as well as gifted students' conceptions of a mathematical definition. In the study, the students made five types of regular polyhedrons (section1), observed them and stated their characteristics (section2) and then constructed a definition of regular polyhedrons based on their observations (section3). We divided students into two groups by analyzing students' definitions. One group made definitions that were consist with a mathematical definition of regular polyhedrons, the other one made definitions that were not. We checked if they fulfilled requirements for a mathematical definition. Researchers sought to gain various suggestions through the analysis of the observations and definition laid down by the students and through the characteristics shown by the students in the process of defining the concept.

Key Words: Mathematics, Gifted/talent, Constructing definition, Regular polyhedrons, Mathematical thinking, Abstracting, Synthesizing, Generalizing

1차 원고접수: 2008년 3월 10일
수정원고접수: 2008년 4월 9일
최종게재결정: 2008년 4월 18일